科学通报

第40卷　第2期　CHINESE SCIENCE BULLETIN　1995年1月

扰动重力位混合边值问题的适定性和估计理论*

朱灼文

(中国科学院测量与地球物理研究所，武昌 430077)

于锦海

(郑州测绘学院，郑州 450052)

关键词　扰动重力位　混合边值问题　适定性　强制性　估计

以 S 表示地球表面，S_1 为其陆地部分，S_2 为海洋部分；r 表示点的地心距．扰动重力位 T 的混合边值问题

$$\begin{cases} \Delta T=0, & \text{在 } S \text{ 外}, \\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial r}+\dfrac{2T}{r}\right|_{S_1}=\alpha_1, & \\ T|_{S_2}=\beta_2, & \\ T=O\left(\dfrac{1}{r}\right), & \text{在 } \infty \text{ 处} \end{cases} \tag{P}$$

是一类新型大地边值问题．这类问题对现代大地测量理论和实用十分重要，特别是其适定性和估计在相应非线性问题中起关键作用．研究其适定性的文献已不少，例如文献[1～4]，但所得到的结果与现实地球状况不符．迄今认为最好的适定性条件也不过是：面积比 $\mu=|S_1|/|S|\leqslant 17\%$，但 S_1 必需是球冠．至于估计理论，尚未见有人研究．本文对问题(P)的适定性条件作出改善，得到更接近实情的结果：$\mu\leqslant 20\%$，任意形状的 S_1．此外还首次给出问题(P)的 Schauder 估计与 L^p-估计．

1　存在唯一性

定理 1.1　设 $\alpha_1\in H^{-\frac{1}{2}}(S_1)$ 和 $\beta_2\in H^{\frac{1}{2}}(S_2)$．若 $\mu\leqslant\dfrac{1}{5}$，不管 S_1 的形状如何，问题(P)的唯一可解，这里 $H^p(S_j)$ 为 Sobolev 空间 $W^{p,2}(S_j)$．

证　由二阶椭圆型偏微分方程理论知[5]：问题(P)的解的存在性与唯一性同时成立．故只需证明所对应的齐次边值问题只有平凡解即可．记 $\alpha=\left.\dfrac{\partial T}{\partial r}+\dfrac{2T}{r}\right|_S$ 和 $\beta=T|_S$．显然，在齐次边界条件 $\alpha|_{S_1}=\alpha_1=0$ 和 $\beta|_{S_2}=\beta_2=0$ 下，有

1994-03-28 收稿，1994-08-30 收修改稿

*国家自然科学基金资助项目

$$\iint_S \alpha\beta \mathrm{d}s=0. \tag{1.1}$$

对 β 作球谐展开

$$\beta=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nm}R_{nm}, \tag{1.2}$$

其中 R_{nm} 为完全规格化 Legendre 面球函数．相应地，有

$$\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \frac{1-n}{R}\, a_{nm}R_{nm}, \tag{1.3}$$

其中 R 为平均地球半径．将 (1.2) 和 (1.3) 式代入 (1.1) 式得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(n-1)a_{nm}^2=a_{00}^2\leqslant\mu\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} n a_{nm}^2+\sum_{m=-1}^{1} a_{1m}^2\right\}. \tag{1.4}$$

易知

$$\sum_{m=-1}^{1} a_{1m}^2\leqslant\iint_S\beta^2\mathrm{d}s\cdot\sum_{m=-1}^{1}\iint_S R_{1m}^2\mathrm{d}s\leqslant 3\mu\iint_S\beta^2\mathrm{d}s. \tag{1.5}$$

对 $\iint_S \beta^2\mathrm{d}s$ 不断使用 (1.4) 式进行估计，可得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left\{n-1-n\mu\sum_{j=0}^{k-1}(3\mu)^j\right\}a_{nm}^2\leqslant\mu(3\mu)^k\iint_S\beta^2\mathrm{d}s. \tag{1.6}$$

若 $3\mu<1$，在上式中令 $k\to\infty$，又若恒有

$$n-1-\frac{n\mu}{1-3\mu}>0,\quad n=2,\ 3,\ \cdots, \tag{1.7}$$

则必然

$$a_{nm}=0,\quad n=2,\ 3,\ \cdots;\quad m=0,\ \pm1,\ \cdots,\pm n. \tag{1.8}$$

解不等式 (1.7)，得

$$\mu\leqslant\frac{1}{5}=20\%. \tag{1.9}$$

在此条件下，(1.2) 式变为

$$\beta=a_{00}R_{00}+\sum_{m=-1}^{1}a_{1m}R_{1m}. \tag{1.10}$$

因 $\beta|_{S_2}=0$，易知：$a_{00}=a_{1m}=0$，即 $\beta|_S=0$．由此借调和函数的极值原理知：在 S 外 $T=0$；亦即齐次边值下的问题 (P) 只有平凡解．定理得证．

2　强制性

借 Kelvin 变换变问题 (P) 为内部问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{2u}{R}\right)\right|_{S_1}=\alpha_1^*, & \\ u|_{S_2}=\beta_2^*, & \end{cases} \tag{KP}$$

其中 Ω 为 S 所界的内部域，$u(y)=|x|T(x)$, x 和 y 分别为原空间和像空间的点，$\alpha_1^*=R\alpha_1$, $\beta_2^*=R\beta_2$.

作问题(KP)相应的二次泛函

$$I_{S_1}(u)=\iiint_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}\Omega-\frac{1}{R}\iint_{S_1}u^2\mathrm{d}s,\ \otimes u\in V(I_{S_1}),\tag{2.1}$$

其中 $V(I_{S_1})=\{u;\ u\in H^1(\Omega),\ u|_{S_2}=0\}$. 根据 Sobolev 空间的性质，可对 $V(I_{S_1})$ 赋范以 $\|u\|_{H^1(\Omega)}=\left\{\iiint_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}\Omega\right\}^{\frac{1}{2}}$.

定理 2.1 对于任意形状的 S_1, 存在常数 $\delta>0$, 使得当 $|S_1|\leqslant\delta$ 时，$I_{S_1}(u)$ 是强制的，即有常数 $K>0$, 使 $I_{S_1}(u)\geqslant K\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$, $\otimes u\in V(I_{S_1})$.

证 借嵌入定理[6], 可得

$$\iint_{S_1}u^2\mathrm{d}s\leqslant|S_1|^{\frac{1}{2}}\left\{\iint_{S_1}u^4\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant c|S_1|^{\frac{1}{2}}\iiint_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}\Omega,\ \otimes u\in V(I_{S_1}),\tag{2.2}$$

此处 c 为常数. 将(2.2)式代入(2.1)式，并令 $K=1-c_1|S_1|^{\frac{1}{2}}$ 以及取 $\delta<\frac{1}{c_1^2}$, c_1 为常数，便有定理结论.

由于$|s|\leqslant\delta$ 时，$I_{S_1}(u)$ 具有强制性，进而有

$$\inf I_{S_1}(u)=I_{S_1}(u_{S_1})=K_{S_1}>0,\quad \otimes u\in E=\{u;\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1\},\tag{2.3}$$

而且 K_{S_1} 为问题(KP)对应的齐次边值问题的最小特征值，u_{S_1} 为相应的特征函数.

定理 2.2 对于任意形状的 S_1, 若 $\delta\leqslant\frac{|S|}{5}$, 即 $\mu\leqslant\frac{1}{5}$, 则 $I_{S_1^{(0)}}(u)$是强制的.

证 倘结论不成立，则有 $S_1^{(0)}$: $\frac{|S_1^{(0)}|}{|S|}\leqslant\frac{1}{5}$, 使 $\inf I_{S_1^{(0)}}(u)=K_{S_1^{(0)}}\leqslant 0$, $\otimes u\in E$. 但因(2.3)式成立，故利用连续性方法[6]知：存在 S_1^*: $S_1^*\subset S_1^{(0)}$ 和 $u_{S_1^*}$, 使 $\inf I_{S_1^*}(u)=I_{S_1^*}(u_{S_1^*})=K_{S_1^*}=0,\otimes u\in E$. 对于这样的 S_1^*, 一方面 $\frac{|S_1^*|}{|S|}\leqslant\frac{1}{5}$, 另一方面 $K_{S_1^*}=0$ 对应非零特征函数 $u_{S_1^*}\in E$. 这意味着问题(KP)，从而(P)对应的齐次边值问题存在非平凡解. 这与定理 1.1 矛盾. 定理得证.

可以证明：I_{S_1} 强制，则问题(P)稳定.

3 Schauder 估计和 L^p- 估计

分别将基本空间取为 Hölder 空间 C^k 和 Sobolev 空间 $W^{k,p}$. 设 $\alpha_1^*\in C^{1+\lambda}(S_1)$, $\beta_2^*\in C^{2+\lambda}(S_2)$, $0<\lambda\leqslant 1$.

定理 3.1 若 $\mu\leqslant\frac{1}{5}$, 则对于问题(KP)的解 u, 有 Schauder 估计

$$\|u\|_{C^{2+\lambda}(\overline{\Omega})}\leqslant c\{\|\alpha_1^*\|_{C^{1+\lambda}(S_1)}+\|\beta_2^*\|_{C^{2+\lambda}(S_2)}\}\tag{3.1}$$

和 L^p- 估计

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leqslant c\{\|\alpha_1^*\|_{W^{1-\frac{1}{p}}(S_1)}+\|\beta_2^*\|_{W^{2-\frac{1}{p}}(S_2)}\},\tag{3.2}$$

这里及下面，c 表示不同的估计常数.

证　利用椭圆型方程的 Schauder 估计[5], 不难得到

$$\|u\|_{C^{2+\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant c_1\{\|\alpha_1^*\|_{C^{1+\lambda}(S_1)} + \|\beta_2^*\|_{C^{2+\lambda}(S_2)}\} + c_2\|u\|_0, \tag{3.3}$$

此处 $\|u\|_0 = \max\limits_{\bar{\Omega}}|u|$. 因 $\mu \leqslant \dfrac{1}{5}$ 时强制性成立, 故

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\{\|\alpha_1^*\|_{C^{1+\lambda}(S_1)} + \|\beta_2^*\|_{C^{2+\lambda}(S_2)}\}. \tag{3.4}$$

利用椭圆型方程的 L^p-估计[5], 可得

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c\{\|\alpha_1^*\|_{C^{1+\lambda}(S_1)} + \|\beta_2^*\|_{C^{2+\lambda}(S_2)}\}. \tag{3.5}$$

又, Ω 是三维球域, 故由嵌入定理[6] 知

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leqslant c\|u\|_{H^2(\Omega)}. \tag{3.6}$$

将 (3.5) 和 (3.6) 式代入 (3.3) 式, 即得 (3.1) 式. 类似地有 (3.2) 式.

定理 3.2　若 $\mu \leqslant \dfrac{1}{5}$, 则对于问题 (P) 的解 T, 有 Schauder 估计

$$\|T\|_{C^{2+\lambda}(S)} \leqslant c\{\|\alpha_1\|_{C^{1+\lambda}(S_1)} + \|\beta_2\|_{C^{2+\lambda}(S_2)}\} \tag{3.7}$$

和 L^p- 估计

$$\|T\|_{W^{2,p}(S)} \leqslant c\{\|\alpha_1\|_{W^{1-\frac{1}{p}}(S_1)} + \|\beta_2\|_{W^{2-\frac{1}{p}}(S_2)}\}. \tag{3.8}$$

证　注意到 $u|_s = RT$, 从 (3.1) 和 (3.2) 式立即得 (3.7) 和 (3.8) 式.

参　考　文　献

1 Sacerdote F, Sansò F. A contribution to the analysis of the altimetry-gravimetry problem. Bull Geol, 1983, 57: 257～272
2 Sansò F. A discussion on the altimetry-gravimetry problem, Invited paper. In: 18. General Assembly of IUGG, Hamburg, 1983
3 Holata P. Mixed boundary value problem in physical geoldesy. In: Proc of Int Symp on Figure of the Earth, Moon and Other Planets, Prague, 1982, 255: 285
4 Svensson S L. Some remarks on the altimetry-gravimetry problem. In: Proc of 1st Hotine-marussi Symp on Math Geod, Rome, 1985. 559～582
5 Gilbarg D, Trudinger N L. Elliptical Partial Differential Equations of Second Order. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1983
6 Morrey C B. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1966