关于 Columbus 问题的几点注记

徐 硕 昌

（中国科学院力学研究所、北京）

在 Columbus 问题的研究中，应用全充液腔体定点旋转运动稳定理论模型（以下简称定点模型）已有长期历史[1-12]．最近，文献［13］认为“定点模型”是错误的，这是一个无视这个问题理论和实验研究历史的武断的结论． 文献［13］中公式（5）和（6）只是小扰动条件下线性理论的结果，却被作为依据导出大扰动条件下的公式（7）． 本文目的就是为了澄清这些问题，同时叙述了一项新的流体转子陀螺实验．

一、Columbus 问题的理论模型

在 Lamb 的经典著作“流体动力学”一书的 §384 中总结了 20 世纪初期以前全充液椭球壳的振动和稳定性的研究．在这章引言中明确指出这个课题源于由牛顿开始研究的地球形状问题[1]，这项研究主要目的在于解释地球的形状和运动以及 Kelvin 实验． Kelvin 在进行流体转子陀螺仪实验的同时提出了“Columbus 蛋疑难”[2]．文献［5，6］在考证这些历史史实的基础上，对 Columbus 问题作了概述． “Columbus 蛋疑难”只是问题的发端，文献［13］把“哥仑布蛋”就等同于 Columbus 问题是本末倒置．为了说明问题，有必要把不同时期所研究理论模型列举一下．

1687 年，牛顿提出充满液体的薄迴转椭球壳地球模型．

1877—1880 年 Kelvin 进行了迴转椭球型流体转子陀螺仪实验和提出“Columbus 蛋疑难”．

以后，理论研究主要致力于解释 Kelvin 的实验事实，问题被用全充液迴转椭球壳的振动和稳定模型所描述． 这些研究包括 Greenhill (1880)，Hough (1885)，Жукоьский (1885)，Poincare (1910)，Basset (1912)，这一时期的研究结果被总结在文献［1］§384 中．

20 世纪上半世纪，这个问题引起了许多科学家、特别是苏联学者的兴趣，包括 Четаев (1957)，Соболев (1960)，Сретенского (1951)，Охоцимской (1956)，Жак (1958)、Ишлинского и Темченко (1960)，Малащенко (1960)，Румянцев (1965)，Stewartson (1959)，Parks (1979) 等．60 年代前研究结果被总结在文献［3］中．

在上述研究中，除 Жуковский 和 Румянцев 研究范围较广，其他作者都用定点模型．这里未列举部分充液腔体的运动及稳定方面的研究．

近年来，我国学者的研究[5-12]是用“定点模型”，考虑液体粘性的影响，导得和 Kelvin 实验一致的理论结果．与此同时，“平面约束模型”是 Chapman 早在 1903 年就进行了研究，以后一直被重视[14]．“定点模型”只是小扰动情形下“Columbus 蛋”的近似理论，一般情形得按“平面

本文 1985 年 12 月 3 日收到．

约束模型"处理.

二、对文献 [13] 的几点看法

1.研究鸡蛋在平面上旋转现象一般被简化为具有球形端部的陀螺在平面上的运动[14]. 刚体陀螺研究表明,端部曲率和平面的光滑度是两个最重要的物理因素[15]. 文献 [13] 把鸡蛋简化为迴转椭球在完全光滑平面上运动并不是一个很合理的模型. 平面完全光滑时,平动对鸡蛋旋转稳定没有影响. 陀螺试验表明,恰是因为陀螺和平面之间摩擦取决于平动速度,才出现翻转陀螺及横转的熟鸡蛋会立起来等许多奇特的现象. 文献 [15] 表明,完全光滑条件得到稳定条件 (7.17) 和定点模型结论一致. 所以,文献 [13] 在小扰动条件下得出稳定结果和定点模型不会两样. 对这两种模型关系下面我们还要进一步讨论.

2.文献 [13] 混淆了"局部稳定"和"全局稳定"的概念. 此文公式 (5) 和 (6) 只在小扰动条件下才适用,用于证明定理 4 却得到大扰动的结论. 事实上小扰动不稳定并不意味大范围一定不稳定,这两种稳定性的关系在有关稳定性专著中讲得很清楚[16]. 文献 [13] 既没有对势能变化作全面定性分析,又没有对扰动运动作全局定性分析,得出大范围稳定结论是没有根据的.

3.文献 [13] 的公式 (7) $\lim\limits_{\rho_0^{(1)}\to 0}\omega_3=\left(\dfrac{C}{A}-1\right)\Omega$ 缺乏依据,与实验事实不符.

文献 [13] 认为鸡蛋直立旋转失稳后变为横躺着旋转,可用角动量守恒计算出最终角速度为$\left(\dfrac{C}{A}-1\right)\Omega$, 事实上,这里不能应用角动量守恒,因为鸡蛋由直立状态变为横躺状态,重力矩始终在起作用. 同时流体系统的不稳定意味着流体宏观运动动能将不断转化为扰动能量. 鸡蛋直立旋转状态失稳后,流体速度变为紊乱,粘性将不断耗散动能,所以速度分布的改变不能由角动量守恒来决定.

Kelvin 实验表明,长形流体转子陀螺只要扶住框架的手一松,陀螺就不可控制,歪倒后不久就停止转动. 我们进行的流体转子陀螺实验也表明,失稳后,能量耗散过程很快,流体在未建立新的整体旋转状态前就耗散掉了. 所以,按角动量守恒决定的公式 (7) 是不对的.

三、"定点模型"和"平面约束模型"

1.受平面约束的轴对称物体的规则进动是定点运动: 在经典力学中这是一个为人熟知事实,在刚体上虽没有定点,在平面之外有定点,这就是刚体瞬时转动轴的交点. 刚体瞬时转动轴线形成一个圆锥面(空间极迹),此锥面的顶点就是定点. 根据物体的对称性及规则进动关于垂直中轴线对称性可知这点是唯一的. 另一方面,根据刚体此时是由两种旋转运动所合成,一种是绕对称轴的自旋,另一种是绕垂直中轴线的旋转,两个角速度交点就是运动的定点.

通过观察玩具陀螺可以看到上述现象,玩具陀螺一般是一个尖锥形或下部尖点是一个球面. 不管哪种情形,它或是绕垂直对称轴旋转或是作规则进动. 高速旋转的卵形体在平面上通常也是如此运动. 属于这种情形都可用定点模型描述.

2.小扰动条件下,定点模型可作为平面约束情形的一种近似描述:

物体在平面上旋转运动和定点运动不同在于两方面: (1) 平动运动; (2) 接触点位置的变换. 当平面完全光滑时,平动速度对物体旋转的稳定没有影响,小扰动时,接触点变化范围

很小，特别是当物体端部曲率半径很小时，定点模型是一种很好的近似．端部半径很大时，差误就大些．

在处理流体力学稳定问题时，小扰动自由面边界条件就在未扰动的自由面上给定．这里接触点变化和自由面变化相当，在一定条件下，两种模型结论相同就不奇怪了．对于非完全光滑情形，端部曲率半径很大时，平面约束情形和定点模型就会大相径庭[15]．

四、一项流体转子陀螺仪实验

1. 均匀圆柱体和均匀迴转椭球体的等效 根据主惯量张量的等效，我们可以用圆柱体代替 Kelvin 实验中的迴转椭球型转子．假设转子壳体惯量比较内部流体(水)惯量可以忽略．一般，轴对称物体的中心惯性椭球方程为

$$J_1x^2+J_2y^2+J_3z^2=1, \tag{1}$$

其中 $J_1=J_2$.

对于正圆柱体(半径为 r，高为 l)：

$$J_1=J_2=\frac{M}{4}\left(r^2+\frac{l^2}{3}\right), \tag{2}$$

$$J_3=\frac{1}{2}Mr^2, \tag{3}$$

其中 M 为总质量．

对于迴转椭球体(极半径为 c，赤道半径为 a)：

$$J_1=J_2=\frac{1}{5}M(a^2+c^2), \tag{4}$$

$$J_3=\frac{2}{5}Ma^2. \tag{5}$$

比较 (2)，(4) 及 (3)，(5) 得到：半径为 r，高为 l 的均匀正圆柱体和 $a=\frac{\sqrt{5}}{2}r$，$c=\frac{\sqrt{15}}{6}l$ 的均匀迴转椭球体是等效的．

转子中心惯性椭球是圆球的条件是

$$J_1=J_2=J_3. \tag{6}$$

由此得到 $l=\sqrt{3}\,r$ 和球等效．当 $l>\sqrt{3}\,r$ 中心惯性椭球是长迴转椭球体；当 $l<\sqrt{3}\,r$ 时是扁迴转椭球体．

2. 实验装置 用直径 100mm 的罐头盒，截成高度分别为 20mm，30mm，40mm，50mm，60mm，70mm，86.5mm，95mm 和 120 mm 等，上下底密封．中心用 $\phi 4$ 铜管和上、下底面相连通，在盒内灌满水，即制成陀螺的转子．用 $\phi 2$ 铜丝做轴，轴上刻有螺纹，用薄螺母做轮轴以调节陀螺支点高度．轴端部可做成尖形或各种曲率的球面．将轴插入转子中心铜管内，只要一手提住轴的上端，另一手给转子切向加力，转子每秒能转到 5～10 转，当陀螺是稳定时，将轴放到桌面上，它能稳定的旋转，这样做成各种不同尺寸的流体转子陀螺仪．

3. 实验结果 当转子高为 $l=86.5$mm，其中心惯性椭球是球，处于临界稳定状态．将上述转子轴做成 $2c=\frac{\sqrt{15}}{3}l$ 所对应的长度，端部做成尖形和球形两种；这两种情形分别对应

“定点模型”和“平面约束模型”,实验结果表明两种情形要么都稳定,要么都不稳定.

用上述方法实验,当转子高度不超过 70mm 的六种情形都是稳定的,其他情形都是一放手陀螺就倒在桌面上. 转子越高,陀螺将越稳定,支点越低越易稳定. 由于转子转速不高,转速也没确定,对于不稳定情形做得不精确. 但变化趋势很明显,转子越厚越不易稳定. 这里我们将 Kelvin 实验做得更细致些. 要更精确必须将转子放在球形框架内,保证中心是定点(类似 Kelvin 实验),要能确定转速实验才能更精确.

我们的实验不仅重新验证 Kelvin 的结论,而且证明了小扰动情形,“定点模型”和“平面约束模型”是等效的.

致谢: 实验工作得到王平生同志的支持和帮助,在此向他表示感谢.

参 考 文 献

[1] Lamb, H., *Hydrodynamics*, Cambridge, 1932.
[2] Keivin, L., *Math. and Phys.*, Papers 3, 4, Cambridge, 1910.
[3] Мойсеев, Н. Н. и Руманцев, В. В., *Динамика Тела с Полостями*, Содержащими Жидкость, М Изд-во «Наука», 1965.
[4] Parks, P. C., *ASME J. of Appl. Mech.*, **46**(1979), 259—262.
[5] 徐硕昌, 自然杂志, **5**(1982), 1: 22—24.
[6] 徐硕昌, 力学学报, 1981 年特刊, 31—36.
[7] 徐硕昌, 中国科学, A 辑, 1979, 9: 857—865; 1982, 3: 254—264.
[8] 徐硕昌, 中国科学, A 辑, 1984, 11: 1017—1024.
[9] 徐硕昌, 科学通报, **26**(1981), 1: 14—17.
[10] 李骊, 应用数学和力学, **4**(1983), 5: 609—620; 6: 771—780.
[11] 秦元勋、管克英、李骊, 科学通报, **29**(1984), 4: 198—201.
[12] 徐硕昌、戴世强, 应用数学和力学, **6**(1985), 7: 573—582.
[13] 朱如曾, 科学通报, **30**(1985), 17: 1305—1308.
[14] Chapman, H. W., *Philos. Magaz.*, **6**(1903), 5: 458.
[15] Magnus, K., 陀螺仪理论及其应用(贾书惠等译), 国防工业出版社, 1983.
[16] 秦元勋、王慕秋、王联, 运动稳定性理论及其应用, 科学出版社, 1981.