中国科学 : 数学 2018 年 第 48 卷 第 6 期 : 689 ∼ 698
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
综 述

Omori-Yau 极值原理及其应用

献给胡和生教授 90 华诞

陈群

武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072
E-mail: qunchen@whu.edu.cn

收稿日期: 2017-09-29; 接受日期: 2017-12-01; 网络出版日期: 2018-03-29
国家自然科学基金 (批准号: 11571259) 资助项目

摘要 在紧致 Riemann 流形上的几何与分析中, Hopf 最大值原理是一个非常有用的工具. Omori-Yau 极值原理是完备非紧 Riemann 流形上相应于紧致情形 Hopf 最大值原理的一个重要、基本而有力的工具. 本文概述了经典的 Omori-Yau 极值原理以及它的各种推广, 并给出它们在流形的几何与分析问题中的应用.

关键词 Omori-Yau 极值原理 子流形 调和映照

MSC (2010) 主题分类 53C44, 53C40, 53C43

1 Omori-Yau 极值原理及其推广

众所周知, 在紧致 Riemann 流形上的几何与分析中, Hopf 最大值原理是一个非常重要、基本而强有力的工具. 在流形是非紧的情形, 其上的几何与拓扑变得更加复杂, 这使得相应的分析问题也更难以处理, 那么, 一个自然的问题就是, 在完备非紧 Riemann 流形上, 是否有相应于紧致情形 Hopf 最大值原理的一个工具? 1967 年, Omori [1] 首先研究了这个问题, 得到如下结果:

定理 1.1 [1] 假设 M 是完备非紧 Riemann 流形, 其截面曲率有常数下界:

$$K_M \geqslant -K,$$

其中 K 为某个正的常数. 如果 u 是上有界的 C^2 函数, 那么, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在点 $x_\varepsilon \in M$ 使得

$$|\nabla u|(x_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \mathrm{Hess}(u)(x_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Omori [1] 的结果中关于截面曲率有下界的条件是一个很强的假设. 在 1975 年, Yau [2] 以及 Cheng 和 Yau [3] 将截面曲率条件减弱为 Ricci 曲率有下界条件, 得到了如下的结果:

英文引用格式: Chen Q. Omori-Yau maximum principles and their applications (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 689–698, doi: 10.1360/N012017-00213

定理 1.2 [2,3] 假设 M 是完备非紧 Riemann 流形, 其 Ricci 曲率有常数下界

$$\mathrm{Ricci}_M \geqslant -K,$$

其中 K 为某个正的常数. 如果 u 是上有界的 C^2 函数, 那么存在点列 $\{x_j\} \subset M$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} u(x_j) = \sup u, \quad \lim_{j\to\infty} |\nabla u|(x_j) = 0, \quad \lim_{j\to\infty} \Delta u(x_j) \leqslant 0. \tag{1.2}$$

我们称 (1.2) 为 Omori-Yau 极值原理.

这个结果为我们研究 Ricci 曲率具有常数下界的完备非紧 Riemann 流形上的几何分析提供了强有力的工具, 从而产生了广泛的应用. 当流形的 Ricci 曲率可能在无穷远处趋于负无穷大时, 是否仍然成立这种极值原理呢? 1992 年, Chen 和 Xin [4] 首先得到了这方面的结果:

定理 1.3 [4] 假设 M 是完备非紧 Riemann 流形, 其 Ricci 曲率满足

$$\mathrm{Ric}_M \geqslant -K(1 + r^2 \log^2(r+2)), \quad r \gg 1, \tag{1.3}$$

其中 $K > 0$ 是常数, r 表示 M 上到某个固定点的距离函数. 那么对任意的有上界 C^2 函数 u, 成立 Omori-Yau 极值原理 (1.2).

注 1.1 我们的结果中的曲率下界 $-K(1 + r^2 \log^2(r+2))$ 在下列意义下是最优的, 即对任意正数 α, 存在完备非紧的 Riemann 曲面 M, 其曲率在无穷远处的衰减阶数为 $-K(1 + r^{2+\alpha})$, 但在 M 上, Omori-Yau 极值原理不成立. 在文献 [5] 中, 条件 (1.3) 称为强二次衰减 (strongly quadratic decay).

此后, 有关 Omori-Yau 极值原理推广及应用方面出现了大量的研究文献, 例如, 文献 [6–13] 给出了在各种条件和情形下的 Omori-Yau 极值原理的推广结果; 文献 [5,14–20] 给出了 Omori-Yau 极值原理在流形的几何问题中的应用结果; 文献 [21–23] 给出了 Omori-Yau 极值原理在流形上的分析问题中的应用 (限于篇幅, 这里仅能列出部分的相关文献). 其中, 黄宣国 [9] 将文献 [4] 的结果推广到更一般的曲率条件:

定理 1.4 [9] 假设 M 是完备非紧 Riemann 流形, 其 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric}_M \geqslant -KG(r)$, 其中函数 $G(r)$ 满足

(i) $G > 0$, $G' \geqslant 0$;

(ii) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{G}} = +\infty$.

那么, 对任意 $u \in C^2(M)$, $\sup u < +\infty$, 成立 Omori-Yau 极值原理 (1.2).

1995 年, Ratto 等 [13] 也得到了相同的结果, 但对函数 $G(r)$ 还假设了额外的条件:

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{tG(\sqrt{t})}{G(t)} < +\infty.$$

Omori-Yau 极值原理的推广, 除了曲率条件之外, 还包括在某些分析条件下的 Omori-Yau 极值原理, 例如, Lima 和 Pessoa [10] 证明了以下结果:

定理 1.5 [10] 假设在完备非紧 Riemann 流形 M 上存在函数 γ 满足以下条件:

(h1) 当 $x \to \infty$ 时, $\gamma(x) \to +\infty$;

(h2) 存在 $A > 0$ 使得在某个紧集之外 $|\nabla\gamma| < A\sqrt{G(\gamma)}(\int_0^\gamma \frac{ds}{\sqrt{G(s)}} + 1)$;

(h3) 存在 $B > 0$ 使得在某个紧集之外 $\Delta\gamma \leqslant B\sqrt{G(\gamma)}(\int_0^\gamma \frac{ds}{\sqrt{G(s)}} + 1)$;

其中 $G : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是满足下列条件的光滑函数:

(i) $G(0)=1$, $G'\geqslant 0$;

(ii) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{G}}=+\infty$.

那么, 对于满足 $\lim_{x\to\infty}\frac{u(x)}{\phi(\gamma(x))}=0$ 的函数 $u\in C^2(M)$, 成立 Omori-Yau 极值原理 (1.2), 这里

$$\phi(t)=\log\left(\int_0^t\frac{ds}{\sqrt{G(s)}}+1\right).$$

这方面的推广还有关于半椭圆型微分算子的 Omori-Yau 极值原理 [24,25]、弱 Omori-Yau 极值原理 [11,26] 和黏性解的 Omori-Yau 极值原理 [21] 等.

流形上几何分析的中心问题是几何与分析之间的关系, Omori-Yau 极值原理正是在这方面提供了一个强有力的工具, 因此, 我们关心在新型几何条件下建立相应的 Omori-Yau 极值原理. 近年来, Bakry-Emery Ricci 曲率受到广泛研究, 定义如下:

$$\mathrm{Ric}_V:=\mathrm{Ric}-\frac{1}{2}L_Vg,\tag{1.4}$$

其中 L_V 表示关于 (M,g) 上的向量场 V 的李导数. 如果 Riemann 流形 (M,g) 满足 $\mathrm{Ric}_V=\rho g$ (ρ 为常数), 则称 M 为 Ricci 孤子. 当 $V=\nabla f$ 时, Ricci 孤子分别称为梯度稳定、收缩和扩张孤子, 如果常数 ρ 分别为零、正和负.

Chen 和 Qiu [8] 对于 (M,g) 上的算子 $\Delta_V:=\Delta+\langle V,\nabla\cdot\rangle$ 建立了如下的 Omori-Yau 极值原理:

定理 1.6 [8]　设 (M^m,g) 是完备 Riemann 流形, V 是 M 上的 C^1 向量场. 如果 $\mathrm{Ric}_V\geqslant -F(r)g$, 其中 r 是 M 上到固定点 $x_0\in M$ 的距离函数, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个正连续函数, 满足

$$\varphi(t):=\int_{\rho_0+1}^t\frac{dr}{\int_{\rho_0}^r F(s)ds+1}\to+\infty,\quad t\to+\infty,$$

其中 ρ_0 是某个常数. 设 $f\in C^2(M)$ 满足

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(r(x))}=0,$$

那么存在点列 $\{x_j\}\subset M$, 使得

$$\lim_{j\to\infty}f(x_j)=\sup f,\quad \lim_{j\to\infty}|\nabla f|(x_j)=0,\quad \lim_{j\to\infty}\Delta_Vf(x_j)\leqslant 0.\tag{1.5}$$

注 1.2　文献 [27] 也证明了一个关于算子 Δ_V 的 Omori-Yau 极值原理, 但要假设向量场 V 满足一定的增长条件, 上述结果去掉了关于 V 的假设条件, 因此对于在几何上进行应用有极大的好处.

注 1.3　注意此处 $F(\cdot)$ 不必是单调非减函数. 例如, 当 $\mathrm{Ric}_V\geqslant 0$ 时, 我们可以选取 $F(t)=\frac{1}{\rho_0t^2}$, 那么 $\varphi(t)=t+\rho_0\ln|t-\rho_0|$. 这样, 对于满足 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{r(x)+\rho_0\ln|r(x)-\rho_0|}=0$ 的函数 $f\in C^2(M)$, 存在点列 $\{x_j\}\subset M$, 使得 (2.6) 成立.

我们还可以证明以下的结果:

定理 1.7 [8]　假设在完备非紧 Riemann 流形 M 上存在函数 γ 满足

(i) 当 $x\to\infty$, $\gamma(x)\to+\infty$;

(ii) 在某个紧集之外, 有 $|\nabla\gamma|<C_1W(\gamma)$;

(iii) 在某个紧集之外, 有 $\Delta_V\gamma\leqslant C_2W(\gamma)$, 其中 $C_1,C_2>0$ 为常数, $W:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是 C^2 的非减函数.

记 $\varphi(t) := \int_0^t \frac{ds}{W(s)}$, 则对任意满足

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(\gamma(x))} = 0$$

的函数 $f \in C^2(M)$, 存在点列 $\{x_j\} \subset M$ 使得 (2.6) 成立.

相关的结果可参见文献 [10,24,28]. 从定理 1.6 立即推知, 在 Ricci 孤子上成立如下的 Omori-Yau 极值原理:

推论 1.1 [8] (1) 设 (M, g) 是完备收缩 (或稳定) Ricci 孤子, 即对常数 $\rho > 0$ (或 $\rho = 0$) 成立 $\mathrm{Ric}_V = \rho g$. 设 $f \in C^2(M)$ 满足

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{r(x)} = 0,$$

那么, 存在点列 $\{x_j\} \subset M$ 使得 (2.6) 成立.

(2) 设 (M, g) 是完备扩张 Ricci 孤子, 即对常数 $\rho < 0$ 成立 $\mathrm{Ric}_V = \rho g$. 设 $f \in C^2(M)$ 满足

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ln(\rho(\rho_0 - r(x)) + 1)} = 0,$$

其中 ρ_0 为正常数, 那么, 存在点列 $\{x_j\} \subset M$ 使得 (2.6) 成立.

注 1.4 Fernández-López 和 García-Río [29] 证明了在 Ricci 孤子上, 对于有上界的 C^2 函数 f 成立 Omori-Yau 极值原理, 与之相比, 我们的结果说明, 对于更广泛的按一定速率趋于无穷大的函数 f, Omori-Yau 极值原理仍然成立.

2 Omori-Yau 极值原理的几何应用

文献 [4] 运用 Omori-Yau 极值原理工具, 研究了 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{m+p}$ 中具有平行平均曲率子流形 M^m 的极小性. 考虑从 M 到 Riemann 流形 N 中测地凸球 $B_R(y_0)$ 的映照 f, 称 R 为映照的像半径, 通过构造 N 上的距离函数与映照 f 适当复合函数, 并对其应用 Omori-Yau 极值原理, 我们首先得到像半径的下界估计, 然后利用 Gauss 映照的调和性质, 并结合像半径估计, 得到如下定理:

定理 2.1 [4] 设 M^m 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{m+p}$ 中具有平行平均曲率的子流形, 数量曲率满足

$$S \geqslant -K(1 + r^2 \log^2(r + 2)), \quad r \gg 1.$$

如果 Gauss 映照 $\gamma : M \to G_{m,p}$ 的像落在测地凸球 $B_R(y_0) \subset G_{m,p}$ 中, $R < \pi/2\sqrt{K}$ (若 $G_{m,p}$ 为球面, 则 $K = 1$, 否则 $K = 2$), 那么, M 必为极小子流形.

对于 Minkowski 空间中的常平均曲率类空超曲面, Xin [30] 于 1991 年通过平均曲率和 Gauss 映照像半径来估计第二基本形式模长平方, 并运用 Omori-Yau 极值原理证明了如下的刚性定理:

定理 2.2 [30] 设 M^m 是 Minkowski 空间 $\mathbb{R}_1^{m+1}$ 中的完备常平均曲率类空超曲面. 如果其 Gauss 映照像在 $H^m(-1)$ 中有界, 那么, M 必为线性子空间.

这个结果后来被进一步推广到 Gauss 映照像或高余维数等更一般情形 (参见文献 [20,31–34]).

对于乘积空间 $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ 中柱形有界的超曲面, Bessa 和 Coasta [5] 通过构造距离函数与浸入映照的适当复合函数, 运用 Omori-Yau 极值原理 (定理 1.3), 证明了以下结果:

定理 2.3 [5] 假设 M^n 是等距浸入到乘积空间 $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$ 中的柱形有界的完备超曲面, 如果 M 的 Ricci 曲率具有强二次衰减, 那么其平均曲率有如下估计:

$$\sup_M |H| \geqslant \frac{n-1}{n}.$$

关于这一类问题的相关研究, 参见文献 [12, 14].

下面考虑 Euclid 空间和伪 Euclid 空间中平均曲率流的自收缩子 (self-shrinker) 和平移孤子 (translating soliton). Euclid 空间 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的 Riemann 子流形 M^m 称为自收缩子, 如果它满足

$$H=-X^N.$$

其中 H 是 M 在 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的平均曲率向量, X^N 是位置向量 X 的法向部分. 定义 M 上的微分算子 (参见文献 [35])

$$\mathcal{L}:=\Delta-\langle X,\nabla(\cdot)\rangle=\mathrm{e}^{|X|^2}\mathrm{div}(\mathrm{e}^{-|X|^2}\nabla(\cdot)). \tag{2.1}$$

Cheng 和 Peng [7] 建立了关于算子 $\mathcal{L}$ 的极值原理:

定理 2.4 [7] 设 $X: M^n\to\mathbb{R}^{n+p}$ $(p\geqslant 1)$ 是完备自收缩子, Ricci 曲率有常数下界. 设函数 $f\in C^2(M)$ 有上界, 那么存在点列 $\{p_j\}\subset M$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} f(X(p_j))=\sup f,\quad \lim_{j\to\infty}|\nabla f|(X(p_j))=0,\quad \lim_{j\to\infty}\mathcal{L}f(X(p_j))\leqslant 0. \tag{2.2}$$

对平均曲率模长平方函数应用这个极值原理, 他们给出了关于 Euclid 空间自收缩子的分类定理:

定理 2.5 [7] 设 $X: M^n\to\mathbb{R}^{n+p}$ 是 n 维完备无边界自收缩子, 那么下列之一必成立:

(1) $\sup_M|B|\geqslant 1$;

(2) $B\equiv 0$, 即 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超平面,

其中 B 表示 M 的第二基本形式.

Chen 等 [27] 给出了 Euclid 空间自收缩子上的 Omori-Yau 极值原理:

定理 2.6 [27] 设 $X: M^n\to\mathbb{R}^{n+p}$ 是完备正常的自收缩子, 函数 $f\in C^2(M)$ 有上界, 那么存在点列 $\{p_j\}\subset M$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} f(X(p_j))=\sup f,\quad \lim_{j\to\infty}|\nabla f|(X(p_j))=0,\quad \lim_{j\to\infty}\mathcal{L}f(X(p_j))\leqslant 0. \tag{2.3}$$

作为应用, 我们有下面的定理:

定理 2.7 [27] 设 $X: M^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是完备正常的自收缩子, 平均曲率 H 处处非零, 则 M 具有常平均曲率的充要条件是存在常数 $C>0$ 使得

$$|B|^2\leqslant 1+C\frac{|\nabla H|^2}{H^2+1}.$$

Euclid 空间 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的等距浸入子流形 M^m 称为平移孤子, 如果其平均曲率满足

$$H=-v^N, \tag{2.4}$$

其中 v 是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中单位长度的常向量, v^N 表示 v 到 M 法丛上的投影. 令

$$\mathcal{L}_{II}:=\Delta+\langle v,\nabla(\cdot)\rangle. \tag{2.5}$$

Xin [36] 建立了平移孤子上的 Omori-Yau 极值原理:

定理 2.8 [36] 设 $X: M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ 是完备平移孤子, r 表示 M 上到固定点的 Euclid 距离函数, 函数 $f \in C^2(M)$ 满足

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{f(x)}{r(x)}=0,$$

那么存在点列 $\{p_j\} \subset M$, 使得

$$\begin{aligned}&\lim_{j\to\infty} f(X(p_j))=\sup f,\\&\lim_{j\to\infty}|\nabla f|(X(p_j))=0,\\&\lim_{j\to\infty}\mathcal{L}_{II}f(X(p_j))\leqslant 0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

应用上述结果, 他给出了在 Gauss 映照像条件下, 完备平移孤子的刚性定理 (参见文献 [36]).

下面考虑伪 Euclid 空间中的类空自收缩子和平移孤子. 根据计算可知, 这两类子流形的 Ricci_V 张量都满足我们关于 Δ_V 算子的 Omori-Yau 极值原理(定理 1.6) 中的曲率条件, 通过用平均曲率构造合适的试验函数, 并对其应用极值原理, 我们最终证明如下的定理:

定理 2.9 [8] 设 $X:(M^m, g)\to\mathbb{R}^{m+n}_n$ 是完备类空自收缩子, 则 M 必为仿射 m- 平面.

注 2.1 在此之前的同类结果中 (如文献 [27]), 需要对 M 的位置向量、平均曲率或第二基本形式等量假设一定的增长条件. 运用新的 Omori-Yau 极值原理, 使得我们可以去掉这类条件.

$X: M^m\to\mathbb{R}^{m+n}_n$ 称为平移孤子, 如果

$$H=-(E_{m+n})^N,\tag{2.7}$$

其中 H 是 M 的平均曲率, $\{E_1,\dots,E_{m+n}\}$ 是 $\mathbb{R}^{m+n}_n$ 的标准基, 且 $\langle E_{m+i},E_{m+i}\rangle=-1$ $(i=1,\dots,n)$. 注意, 不同文献对平移孤子的定义可能略有不同. 类似于定理 2.9, 对类空的平移孤子, 运用 Omori-Yau 极值原理(定理 1.6), 我们有下面的定理:

定理 2.10 [8] 在伪 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{m+n}_n$ 中不存在完备类空的平移孤子 M^m.

3 Omori-Yau 极值原理的分析应用

现有文献中关于 Omori-Yau 极值原理的分析应用, 主要有完备非紧 Riemann 流形上某些微分方程或微分不等式的解的性质. 例如, 文献 [13] 利用 Omori-Yau 极值原理给出了微分不等式 $\Delta u \geqslant \phi(u,|\nabla u|)$ 解的有界性的充分条件. 这里主要考虑对于调和映照相关问题的应用.

我们知道, 调和映照的全纯性是一个十分重要的分析问题. 1985 年, 忻元龙 [37] 得到了如下结果:

定理 3.1 [23,37] 设 M 是完备的 Riemann 面, Gauss 曲率 K 有下界, $\mathbb{CP}^n$ 是带 Fubini-Study 度量的复射影空间, $f: M\to\mathbb{CP}^n$ 为调和映照. 如果

$$e''\leqslant K+\frac{1}{2}e'-\delta,$$

那么, f 是全纯映照; 如果

$$e'\leqslant K+\frac{1}{2}e''-\delta,$$

那么, f 是反全纯映照, 其中 δ 是任意正数, e' 和 e'' 是 f 的部分能量密度.

证明的方法是通过对部分能量密度的适当函数运用 Omori-Yau 极值原理, 利用这一方法, Chen 和 Zhou[38] 运用定理 1.3 考虑了 Kähler 叶状流形之间横截调和映照的横截全纯性和反全纯性, 得到如下的相应结果:

定理 3.2[38] 设 M 是 $p+2$ 维 Riemann 流形, 带有一个余维数 2 的 Kähler 叶化, 其 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ricci}_M \geqslant -C(1+r^2\log^2(r+2))$, 其中 r 是 M 上到固定点 $x_0 \in M$ 的距离函数, C 为正常数. 设 M' 是 Kähler 叶状流形, 其横截全纯截面曲率为正常数 λ, $f: M \to M'$ 是横截调和映照, 则

(i) 如果 $e_T^-(f) \leqslant \frac{K}{\lambda} + \frac{1}{2}e_T^+(f) - \delta$, 那么 f 是横截全纯映照;

(ii) 如果 $e_T^+(f) \leqslant \frac{K}{\lambda} + \frac{1}{2}e_T^-(f) - \delta$, 那么 f 是横截反全纯映照, 其中 δ 是任意正数, e_T^+ 和 e_T^- 是 f 的部分横截能量密度, K 是 M 的横截全纯截面曲率.

经典的 Schwarz-Pick 引理说从复平面上单位圆盘到自身的全纯映照必是缩小 Poincaré 度量的, Ahlfors[39] 和 Chern[40] 给出了各种推广. 1978 年, Yau[41] 证明了 Schwarz 引理: 从 Ricci 曲率有下界的 Kähler 流形到全纯双截曲率有负常数上界的 Hermite 流形的全纯映照在常数倍意义下必是距离非增的. Chen 和 Yang[42] 将上述结果从 Kähler 流形推广到 Hermite 流形的情形. 后来, Tosatti[43] 建立了概 Hermite 流形之间全纯映照的 Schwarz 引理. 另一方面, Goldberg 和 Har'El[44] 及 Shen[45] 等证明了对调和映照来说同样有这类结果. 在这些结果的证明中, Omori-Yau 极值原理的运用是关键的一步.

设 $u:(M^m,g) \to (N^n,h)$ 是 Riemann 流形之间的光滑映照, 对固定点 $x \in M$, 有线性映照 $du: T_xM \to T_{u(x)}N$ 及其转置映照 $du^\dagger: T_{u(x)}N \to T_xM$, 它们满足

$$\langle du(X), Y\rangle_h = \langle X, du^\dagger(Y)\rangle_g, \quad X \in \Gamma(TM), \quad Y \in \Gamma(TN).$$

因此有线性映照 $du^\dagger \circ du: T_xM \to T_xM$. 设 $\{e_i\}_{i=1}^m$ 和 $\{\tilde{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ 分别为 TM 和 TN 上的局部幺正标架场. 令 $du^\dagger \circ du(e_i) = U_{ij}e_j$, 则

$$U_{ij} = \langle du^\dagger \circ du(e_i), e_j\rangle = \langle du(e_i), du(e_j)\rangle = u_i^\alpha u_j^\alpha.$$

(U_{ij}) 是 m 阶半正定矩阵, 其特征值非负, 记为 $\lambda_1(x) \geqslant \lambda_2(x) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m(x) \geqslant 0$.

定义 3.1[44, 45] 光滑映照 $u: M \to N$ 称为 β 阶有界膨胀的, 如果存在正数 β 使得 $\lambda_1(x) \leqslant \beta^2\lambda_2(x)$ 在任意点 $x \in M$ 成立. u 称为广义 β 阶有界膨胀的, 如果 $\lambda_1(x) \leqslant \beta^2(\lambda_2(x) + \cdots + \lambda_m(x))$ 在任意点 $x \in M$ 成立.

设 (M^m,g) 和 (N^n,h) 为 Riemann 流形, V 是 M 上的 C^1 向量场. 称 $u: M \to N$ 是 V- 调和映照 (参见文献 [46]), 如果

$$\tau_V(u) = \tau(u) + du(V) = 0, \tag{3.1}$$

其中 $\tau(u)$ 是 u 的张力场.

最近, Chen 和 Zhao[47] 得到了关于 V- 调和映照的 Schwarz 引理, 并给出了它在概 Hermite 流形的全纯映照等方面的应用.

定理 3.3[47] 设 (M^m,g) 是完备 Riemann 流形, Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric}_V \geqslant -A$, 其中 A 为常数, (N^n,h) 是 Riemann 流形, 截面曲率具有负常数上界 $-B$.

如果 $A>0$, $u: M \to N$ 是具有广义 β 阶有界膨胀的非常值 V- 调和映照, 那么,

$$u^*h \leqslant \frac{Ak^2\beta^4}{2B(1+\beta^2)}g,$$

其中 $k=\min\{m,n\}$. 如果 $A\leqslant 0$, 那么不存在从 M 到 N 的非常值广义 β 阶有界膨胀的 V- 调和映照.

证明的方法是, 首先将算子 Δ_V 作用于能量密度 $e(u)$, 利用广义有界膨胀条件从 Weitzenböck 公式得到 $\Delta_V e(u)$ 的微分不等式, 其次, 将 Omori-Yau 极值原理 (定理 1.6) 应用到函数 $-1/\sqrt{e(u)+C}$ (C 为常数).

下面用定理 3.3 来考虑概 Hermite 流形到拟 Kähler 流形的全纯映照. 设 (M^{2m},g,J) 和 (N^{2n},h,J') 为概 Hermite 流形. 称 $u:M\to N$ 是全纯的, 如果 $du\circ J=J'\circ du$. 易知, 对全纯映照, 有

$$du^\dagger\circ du\circ J=J\circ du^\dagger\circ du,$$

因此, $\lambda_1=\lambda_2$, 于是, 概 Hermite 流形之间的任意全纯映照必为一阶有界膨胀的.

定义 3.2 概 Hermite 流形 (M,g,J) 称为拟 Kähler 流形, 如果 $(\nabla_X J)Y+(\nabla_{JX}J)JY=0$ 对任意 $X,Y\in\Gamma(TM)$ 成立.

可以证明 (参见文献 [47, 引理 4.2]), 如果 $u:(M^{2m},g,J)\to(N^{2n},h,J')$ 是概 Hermite 流形到拟 Kähler 流形的全纯映照, 那么 u 是 V- 调和映照, 其中 $V=-J\delta J$, δ 是 M 上的余微分算子. 因此, 可以将定理 3.3 应用于全纯映照 u, 得到如下的定理:

定理 3.4[47] 设 (M^{2m},g,J) 是完备概 Hermite 流形, Ricci 曲率满足

$$\mathrm{Ricci}_M+\frac{1}{2}L_{J\delta J}g\geqslant -A,$$

其中 A 为常数, (N^{2n},h,J') 是拟 Kähler 流形, 截面曲率有负常数上界 $-B$. 设 $u:M\to N$ 为非常值全纯映照, 则 $A>0$ 且

$$u^*h\leqslant\frac{A\ell^2}{4B}g,$$

其中 $\ell=\min\{2m,2n\}$. 如果 $A\leqslant 0$, 则不存在从 M 到 N 的非常值全纯映照.

Yau[41] 证明了在完备、具有非负 Ricci 曲率的 Kähler 流形上不存在非常值有界全纯函数. 类似地, 从定理 3.4 可以得到如下结论:

推论 3.1[47] 设 (M,g,J) 是概 Hermite 流形, Ricci 曲率满足

$$\mathrm{Ricci}_M+\frac{1}{2}L_{J\delta J}g\geqslant 0,$$

则在 M 上不存在非常值有界全纯函数 $u:M\to\mathbb{C}$.

参考文献

1 Omori H. Isometric immersions of Riemannian manifolds. J Math Soc Japan, 1967, 19: 205–214
2 Yau S T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. Comm Pure Appl Math, 1975, 28: 201–228
3 Cheng S Y, Yau S T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications. Comm Pure Appl Math, 1975, 28: 333–354
4 Chen Q, Xin Y L. A generalized maximum principle and its applications in geometry. Amer J Math, 1992, 114: 355–366
5 Bessa G P, Costa M S. On cylindrically bounded H-hypersurfaces of $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$. Differential Geom Appl, 2008, 26: 323–326
6 Alias L J, Mastrolia P, Rigoli M. Maximum Principles and Geometric Applications. New York: Springer, 2016
7 Cheng Q M, Peng Y. Complete self-shrinkers of the mean curvature flow. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 52: 497–506

8 Chen Q, Qiu H B. Rigidity of self-shrinkers and translating solitons of mean curvature flows. Adv Math, 2016, 294: 517–531
9 黄宣国. 完备黎曼流形上的最大值原理. 数学年刊 A 辑, 1993, 14: 175–185
10 Lima B P, Pessoa L F. On the Omori-Yau maximum principle and geometric applications. ArXiv:1201.1675, 2012
11 Pigola S, Rigoli M, Setti A. Maximum Principles on Riemannian Manifolds and Applications. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 822. Providence: Amer Math Soc, 2005
12 Qiu H B, Xin Y L. Proper manifolds in product manifolds. Chin Ann Math Ser B, 2012, 33: 1–16
13 Ratto A, Rigoli M, Setti A G. On the Omori-Yau maximum principle and its applications to differential equations and geometry. J Funct Anal, 1995, 134: 486–510
14 Alías L J, Bessa G P, Dajczer M. The mean curvature of cylindrically bounded submanifolds. Math Ann, 2009, 345: 367–376
15 Alías L J, Dajczer M. Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces. Proc Edinb Math Soc (2), 2007, 50: 511–526
16 Bejan C L, Binh T Q, Tamassy L. Isometric or harmonic mappings of complete Riemannian manifolds. Publ Math Debrecen, 2002, 60: 455–461
17 Jost J, Xin Y L. Bernstein type theorems for higher codimension. Calc Var Partial Differential Equations, 1999, 9: 277–296
18 Pigola S, Rimoldi M, Setti A G. Remarks on non-compact gradient Ricci solitons. Math Z, 2011, 268: 777–790
19 Xin Y L. Mean curvature flow with bounded Gauss image. Results Math, 2011, 59: 415–436
20 Xin Y L. Minimal Submanifolds and Related Topics. Singapore: World Scientific Publication, 2003
21 Peng S G, Zhou D T. Maximum principle for viscosity solutions on Riemannian manifolds. ArXiv:0806.4768, 2008
22 Takegoshi K. A priori upper bounds of solutions satisfying a certain differential inequality on complete manifolds. Osaka J Math, 2006, 43: 791–806
23 Xin Y L. Geometry of Harmonic Maps. Basel: Birkhäuser, 1994
24 Bessa G P, Pessoa L F. Maximum principle for semi-elliptic trace operators and geometric applications. Bull Braz Math Soc (NS), 2014, 45: 243–265
25 Lima B P. Omori-Yau maximum principle for the operator L_r and its applications. PhD Thesis. Ceará: Universidade Federal do Cear'a-UFC, 2000
26 Grigor'yan A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. Bull Amer Math Soc, 1999, 36: 135–249
27 Chen Q, Jost J, Qiu H B. Omori-Yau maximum principles, V-harmonic maps and their geometric applications. Ann Global Anal Geom, 2014, 46: 259–279
28 Albanese G, Alías L J, Rigoli M. A general form of the weak maximum principle and some applications. Rev Mat Iberoamericana, 2013, 29: 1437–1476
29 Fernández-López M, García-Río E. Maximum principles and gradient Ricci solitons. J Differential Equations, 2011, 251: 73–81
30 Xin Y L. On the Gauss image of a spacelike hypersurface with constant mean curvature in Minkowski space. Comment Math Helv, 1991, 66: 590–598
31 Cao H D, Shen Y, Zhu S H. A Bernstein theorem for complete spacelike constant mean curvature hypersurfaces in Minkowski space. Calc Var Partial Differential Equations, 1998, 7: 141–157
32 Jost J, Xin Y L. Some aspects of the global geometry of entire space-like submanifolds. Results Math, 2001, 40: 233–245
33 Xin Y L, Ye R. Bernstein-type theorems for space-like surfaces with parallel mean curvature. J Reine Angew Math, 1997, 489: 189–198
34 Zhao Z C. Spacelike graphs with parallel mean curvature in pseudo-Riemannian product manifolds. Chin Ann Math Ser B, 2012, 33: 17–32
35 Colding T H, Minicozzi II W P. Generic mean curvature flow, I: Generic singularities. Ann of Math (2), 2012, 175: 755–833
36 Xin Y L. Translating solitons of the mean curvature flow. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 54: 1995–2016
37 忻元龙. 一类调和映照的全纯性. 数学学报, 1985, 28: 382–386

38 Chen Q, Zhou W B. Bochner-type formulas for transversally harmonic maps. Internat J Math, 2012, 23: 1250003
39 Ahlfors L V. An extension of Schwarz's lemma. Trans Amer Math Soc, 1938, 43: 359–364
40 Chern S S. On holomorphic mappings of Hermitian manifolds of the same dimension. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 11. Providence: Amer Math Soc, 1968, 157–170
41 Yau S T. A general Schwarz lemma for Kähler manifolds. Amer J Math, 1978, 100: 197–203
42 Chen Z H, Yang H C. On the Schwarz lemma for complete Hermitian manifolds. In: Several Complex Variables. New York: Springer, 1984, 99–116
43 Tosatti V. A general Schwarz lemma for almost-Hermitian manifolds. Comm Anal Geom, 2007, 15: 1063–1086
44 Goldberg S I, Har'El Z. Mappings of almost Hermitian manifolds. J Differential Geom, 1979, 14: 67–80
45 Shen C L. A generalization of the Schwarz-Ahlfors lemma to the theory of harmonic maps. J Reine Angew Math, 1984, 348: 23–33
46 Chen Q, Jost J, Wang G F. A maximum principle for generalizations of harmonic maps in Hermitian, affine, Weyl and Finsler geometry. J Geom Anal, 2015, 25: 2407–2426
47 Chen Q, Zhao G W. A Schwarz lemma for V-harmonic maps and their applications. Bull Aust Math Soc, 2017, 96: 504–512

Omori-Yau maximum principles and their applications

Qun Chen

Abstract In the geometry and analysis on compact Riemannian manifolds, the Hopf maximum principle is a very useful tool. The Omori-Yau maximum principle is an important, basic and powerful tool on noncompact Riemannian manifolds corresponding to the Hopf maximum principle in the compact case. In this paper, we give a survey on the classical Omori-Yau maximum principle and its various generalizations, as well as their applications in the geometry and analysis on manifolds.

Keywords Omori-Yau maximum principle, submanifold, harmonic map

MSC(2010) 53C44, 53C40, 53C43

doi: 10.1360/N012017-00213