

超过程的极限准则^{*}

王永进

(南开大学数学系, 天津 300071)

摘要 以超扩散过程为出发点, 系统地研究了完全分支下有限和无限测度空间上的超过程的长时间渐近行为, 给出了超过程极限的完整特征及相应的判别准则.

关键词 超过程 分支函数 灭绝与非灭绝 不变测度 平衡态

超过程作为分支粒子系统的极限模型自从建立以来已得到广泛的研究^[1], 而其中的一个重要研究主题即是粒子系统以及相应的超过程的终极趋向问题. 这方面的典型结果在文献 [2] 中可以看到, 这一方向迄今已有不少的研究工作^[1, 3~6], 不过总体说来这些工作均集中于研究特殊分支下的超过程(典型地, 如分支函数为 $\Phi(Z) = cZ^{1+\beta}$, $c > 0$ 为常数, $0 < \beta \leq 1$), 当然其中的处理方法也都对分支具有较强的针对性. 本文试图完整地解决一般分支情形下的超过程长时间的极限问题即给出其相应的极限准则. 同时, 既然已有的方法不能应用于处理一般的分支情形, 这里完全采用新的方法去处理问题, 其中也包含着对部分已有的结果重新给出了更为直接的论证.

1 超扩散过程

设 $\xi = (\xi_t, t \geq 0)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 L -扩散过程, 即由椭圆型微分算子

$$L = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^d b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

决定. 假设系数 (a_{ij}, b_j) 满足: (A) $(a_{ij}) = (\sigma_{ij})^T (\sigma_{ij})$ 为一对称正定矩阵, 且 $\sigma_{ij}(x), b_j(x) \in \mathbf{bC}^2(\mathbb{R}^d)$; (B) $|\sigma_{ij}(x)| + |b_j(x)| \leq M(1 + \|x\|)$ ($M > 0$ 为常数), 则对应的 L -扩散是一时齐的 Markov 过程^[7, 8], 并记其转移半群与转移函数分别为 $\{T_t, t \geq 0\}$ 和 $p(t; x, y)$.

其次考虑如下类型的连续函数

$$\Phi(Z) = bZ + cZ^2 + \int_0^\infty (e^{-Zu} - 1 + Zu) n(du), \quad (1.1)$$

其中, $c \geq 0$, $b \in \mathbb{R}^1$, $n(du)$ 是 $(0, \infty)$ 上满足 $\int_0^\infty u \wedge u^2 n(du) < \infty$ 的测度.

基于过程 ξ 和函数 Φ , 可以构造出一类以 ξ 为底过程且以 Φ 为分支函数的测度值分支过程(超过程). 具体描述如下:

首先, 假设 $M_F(\mathbb{R}^d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的有限 Radon 测度空间, 根据文献[9] 或[10] 的构造, 存在概率空间 $(\Omega^F, \mathcal{F}^F, P^F)$ 及其上取值于 $M_F(\mathbb{R}^d)$ 的超过程 $X_F := \{X_t^F, P_\mu^F; t \geq 0, \mu \in M_F(\mathbb{R}^d)\}$ 满足如下的分布特征:

$$\forall \phi \in \text{bC}(\mathbb{R}^d), E_\mu^F e^{-\langle X_t^F, \phi \rangle} = e^{-\langle \mu, U_t \phi \rangle}, \quad (1.2)$$

其中 $U_t \phi(x)$ 满足

$$U_t \phi(x) = T_t \phi(x) - \int_0^t dr T_{t-r}(\Phi(U_r \phi))(x). \quad (1.3)$$

若记 $u(t, x) = U_t \phi(x)$, 则 $u(t, x)$ 是如下方程的弱解:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu - \Phi(u), \\ u(0) = \phi. \end{cases} \quad (1.4)$$

上述 X^F 即为有限测度空间上的超过程.

其次, 如果设常数 $\frac{d}{2} < p < \frac{d}{2} + 1$, 令 $C_p(\mathbb{R}^d) = \{\psi \mid \psi \text{ 连续且 } \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\psi(x)(1 + \|x\|)^p| < \infty\}$ 和 $M_p(\mathbb{R}^d) = \left\{ \nu \mid \nu \text{ 是 Radon 测度且 } \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|)^{-1} \nu(dx) < \infty \right\}$, 则由文献[1, 11] 的构造定理同样可得: 存在概率空间 $(\Omega^I, \mathcal{F}^I, P^I)$ 及其上取值于 $M_p(\mathbb{R}^d)$ 的超过程 $X_I := \{X_t^I, P_\nu^I; t \geq 0, \nu \in M_p(\mathbb{R}^d)\}$ 满足如下的 Laplace 变换:

$$\forall \psi \in C_p(\mathbb{R}^d), E_\nu^I e^{-\langle X_t^I, \psi \rangle} = e^{-\langle \nu, V_t \psi \rangle}, \quad (1.5)$$

这里, $V_t \psi(x)$ 取代 $U_t \phi(x)$ 同样满足积分方程(1.3)并令 $v(t, x) = V_t \psi(x)$ 满足微分方程(1.4)(其中 ϕ 由 ψ 代替).

本文主要研究这两类超过程的长时间极限行为. 这里超过程涉及的分支函数是很广泛的一般形式^[1, 9], 尽管考虑的底过程是 L -扩散过程, 但这仅仅是一个出发点, 事实上本文的处理方法很大程度上可延伸到底过程为更广泛情形的超过程. 这里对底过程的本质要求是对其转移半群(或转移密度)有合适的控制. 限于文中篇幅, 在此不再作这方面的具体拓展.

2 有限测度空间上的超过程的灭绝与非灭绝

有限测度空间上超过程的长时间灭绝性已得到证实^[1], 但对于一般的分支情形却存在着非灭绝的情形(这一点似乎很少涉及), 这主要是通常研究的是特殊分支(如 $\Phi(Z) = cZ^{1+\beta}$, $0 < \beta \leq 1$)的超过程, 而在此可以得到一般性的结论:

定理 2.1 设 $X_F := X_F(\xi, \Phi)$ 是一般分支的超扩散过程, 即分支函数 $\Phi(Z)$ 具有一般形式(1.1)式,

(i) 若 $b \geq 0$, 则 $\langle X_t^F, 1 \rangle \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$, 即超过程是灭绝的;

(ii) 若 $b < 0$, 则 $\langle X_t^F, 1 \rangle \rightarrow \zeta (t \rightarrow \infty)$, 其中 $P_\mu^F(\zeta > 0) > 0$, 从而超过程是非灭绝的.

基于此定理, 在特殊分支 $(\Phi(Z) = cZ^{1+\beta}, 0 < \beta \leq 1)$ 下的超过程是灭绝的, 此即(i)的特殊情形, 而这早已为人们所知.

定理 2.1 的证 (i) 设 $b \geq 0$, 在(1.2)~(1.4)式中取 $\phi \equiv \theta > 0$, 并假设 u 与 x 无关而仅为 t 的函数, 则有

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\Phi(u), \\ u(0) = \theta, \end{cases} \quad (2.1)$$

或

$$\int_{u(t)}^{u(0)} [\Phi(s)]^{-1} ds = t. \quad (2.2)$$

注意到 $\Phi(s) > 0$ (当 $b \geq 0, s > 0$ 时), 则从 (2.1) 式知 $u(t)$ 是递减的, 令 $\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \geq 0$.

若 $\alpha > 0$, 则 $\Phi(s) > \Phi(\alpha) > 0 (s > \alpha)$, 这样, $\int_{\alpha}^{u(0)} [\Phi(s)]^{-1} ds < (u(0) - \alpha) [\Phi(\alpha)]^{-1} < \infty$.

但在 (2.2) 式中令 $t \rightarrow \infty$, 却有 $\int_{\alpha}^{u(0)} [\Phi(s)]^{-1} ds = \infty$, 因此 $\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$. 这样, (1.2) 式意味着

$$E_t^F e^{-\langle X_t^F, \theta \rangle} = e^{-\langle \mu, u(t) \rangle} \rightarrow 1, \quad \langle X_t^F, 1 \rangle \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

(ii) 当 $b < 0$ 时, 注意到 $\Phi'(Z) = b + 2cZ + \int_0^\infty u(1 - e^{-Zu})n(du) < 0$ (当 $Z \geq 0$ 充分小时), 即存在 $\epsilon > 0$, 使得 $\Phi'(Z) < 0, \forall Z \in [0, \epsilon)$. 而 $\Phi(0) = 0$, 所以 $\Phi(Z) < 0, Z \in (0, \epsilon)$.

情形 1 $\Phi(Z) < 0, \forall Z \in (0, \infty)$.

同(i)可得 (2.1) 式, 既然此时 $\Phi(u) < 0$, 因而 (2.1) 式的解 $u(t)$ 是 t 的增函数. 令 $\alpha_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) > 0$. 若 $\alpha_1 < \infty$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{u(0)}^{u(t)} \left[-\frac{1}{\Phi(s)} \right] ds \leq (\alpha_1 - \theta) \sup_{s \in [\theta, \alpha_1]} \left[-\frac{1}{\Phi(s)} \right] < \infty,$$

此与 (2.2) 式矛盾. 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty$, 此即 $E_t^F e^{-\langle X_t^F, \theta \rangle} = e^{-\langle \mu, u(t) \rangle} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ 或 $m_t^F = \langle X_t^F, 1 \rangle \rightarrow \infty$. 这表明质量过程趋向无限, 当然超过程是非灭绝的.

情形 2 $\Phi(Z) < 0, Z \in (0, \epsilon)$ 但对某个 $Z_0 \geq \epsilon, \Phi(Z_0) \geq 0$. 此时由 $\Phi(Z)$ 在 $(0, \infty)$ 上的连续性, 至少存在一个 $Z_1 > 0$, 使得 $\Phi(Z_1) = 0$.

既然存在 $Z_1 > 0$, 使得 $\Phi(Z_1) = 0$, 则 $u(t, x) \equiv Z_1$ 恰是

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu - \Phi(u), \\ u(0) = Z_1 \end{cases}$$

的唯一正解.

应用 (1.2) 式得 $E_t^F e^{-\langle X_t^F, Z_1 \rangle} = e^{-\langle \mu, Z_1 \rangle}$. 另一方面又应用超扩散的 Markov 性即知, $\{e^{-\langle X_t^F, Z_1 \rangle}, t \geq 0, P_t^F\}$ 是一个有界鞅, 因而鞅的收敛定理意味着 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\langle X_t^F, Z_1 \rangle}$ 亦即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle X_t^F, Z_1 \rangle$ 存在且满足 $E_t^F e^{-\lim_{t \rightarrow \infty} \langle X_t^F, Z_1 \rangle} = e^{-\langle \mu, Z_1 \rangle} = e^{-Z_1 \langle \mu, 1 \rangle}$. 由此即知 $\langle X_t^F, 1 \rangle \rightarrow \zeta, t \rightarrow \infty$, 且 $P_t^F(\zeta > 0) > 0$. 所以超过程是非灭绝的.

3 无限测度空间上超过程的平衡态问题

无限测度空间上的超过程的极限问题 (即平衡态存在性问题) 已有许多的研究工作^[3~6, 12], 但这些结果均考虑典型分支情形 $\Phi(Z) = cZ^2$ 或 $\Phi(Z) = cZ^{1+\beta} (0 < \beta < 1)$. 在此要

解决完全分支下的情形, 注意到无论 Campell 测度表现方法^[4] 还是后退树技术^[9] 等等, 均对超过过程分支有较强的依赖性, 因而都不能用来处理一般的分支情形. 本文完全用分析的方法处理问题, 从而完整地给出了一般分支下的超过过程的平衡态存在性准则. 同时不难发现, 在下面的特殊情形(例如定理 3.1(iii))中包含着对已有结果的重新证明, 值得一提的是所用的方法是非常简单和直接的(与文献 3~6] 比较).

定理 3.1 设 m 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度, ξ 是前述的 L -扩散过程且 m 是其不变测度. 记 $X_t = X_t(\xi, \Phi)$ 是 $M_p(\mathbb{R}^d)$ 上的超扩散过程(其中 $\Phi(Z)$ 具有一般形(1.1)式, 初始测度为 m),

(i) 若 $b < 0$, 则超过程存在非零的平衡态即存在非零的随机测度 X_∞ , 使得 $X_t^I \rightarrow X_\infty^I (t \rightarrow \infty)$;

(ii) 若 $b > 0$, 则超过程 $X_t^I \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$, 即只有平凡的零平衡态;

(iii) 若 $b = 0$, 即 $\Phi(Z) = cZ^2 + \int_0^\infty (e^{-Zu} - 1 + Zu)n(du)$, 其中 Lévy 测度 $n(du)$ 满足 $\int_0^\infty u^2 n(du) < \infty$ (此与(1.1)式的条件稍有不同), 则

i) 当 $d < 3$ 时, $X_t^I \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$,

ii) 当 $d \geq 3$ 时, $X_t^I \rightarrow X_\infty^I (t \rightarrow \infty)$, 且 $E_m X_\infty^I = m$, 即 $X_\infty^I \neq 0$.

此定理中随机测度的收敛均指测度的弱收敛(下同), d 为空间维数. 很显然该定理较为完整地反映了一般分支情形下的超过过程的极限特征. 其中, 当 $b > 0$ 或 $b = 0, d < 3$ 时超过程只有平凡的零平衡态, 而当 $b < 0$ 或 $b = 0, d \geq 3$ 时超过程有非平凡的极限态(或平衡态). 不过, 在 $b < 0$ 情形的结果中包含了极限态为无限的这一特殊情形(可见(i)的证明), 而在 $b = 0, d \geq 3$ 时, 则不可能有这一特例出现, 且此时的情形还常被称为超过过程的持续性(persistence)^[1, 6].

定理 3.1 的证 (i) 若 $b < 0$, 同定理 2.1(ii)的证明知, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\Phi(Z) < 0, \forall Z \in (0, \varepsilon)$. 令 $Z = \inf\{Z > 0, \Phi(Z) = 0\}$ (若为空集则令 $Z = \infty$). 由(1.5)式取 $\forall \psi \in C_p(\mathbb{R}^d)$, 且 $\|\psi\|_{\max} \leq 1$, 则

$$E_m e^{-\langle X_t^I, \psi \rangle} = e^{-\langle m, V_t \psi \rangle}, \quad (3.1)$$

其中 $v(t, x) := V_t \psi(x)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = Lv - \Phi(v), \\ v(0) = \psi \end{cases} \quad (3.2)$$

或

$$v(t, x) + \int_0^t T_{t-s} \Phi(v(s, \cdot))(x) ds = T_t \psi(x). \quad (3.3)$$

因为 Lebesgue 测度是 L -扩散半群 T_t 的不变测度, 故由上式可得

$$\langle m, v(t, \cdot) \rangle = \langle m, \psi \rangle - \int_0^t \langle m, \Phi(v(s, \cdot)) \rangle ds. \quad (3.4)$$

i) 若 $Z = \infty$, 则表明连续函数 $\Phi(Z) < 0, \forall Z \in (0, \infty)$. 因此在(3.4)式两边令 $t \rightarrow \infty$ 即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle m, v(t, \cdot) \rangle = \langle m, \psi - \int_0^\infty \langle m, \Phi(v(s, \cdot)) \rangle ds, \quad (3.5)$$

同时由(3.3)式注意到 $v(t, x) \geq T_t \psi(x)$. 另一方面, 既然 $Z = \infty$, 则(1.1)式中的 $c = 0$, 即 $\Phi(Z) = bZ + \int_0^\infty (e^{-Zu} - 1 + Zu) n(du)$. 而 $\Phi'(Z) = b + \int_0^\infty u(1 - e^{-uZ}) n(du)$ 关于 $Z \in [0, \infty)$ 是递增的(当 $n(du) \neq 0$ 时严格递增), 而且对 $\forall Z \in (0, \infty)$, $\Phi'(Z) < 0$. 若不然, 不妨设 $n(du) \neq 0$, 则存在常数 $Z_0 > 0$, 使得 $\Phi'(Z_0) > 0$ 且 $\Phi'(Z) \geq \Phi'(Z_0) =: c > 0, Z \in (Z_0, \infty)$. 这样就不可能对 $\forall Z \in (0, \infty)$, $\Phi(Z) < 0$. 故 $\Phi'(Z) < 0, \forall Z \in (0, \infty)$.

这样, 对 $\forall Z \in [0, 1], -\Phi'(Z) \geq -\Phi'(1) =: \bar{c} > 0$. 因此由 $v(t, x) \geq T_t \psi(x)$ 及 $\Phi(0) = 0$, 应用中值公式可得

$$-\int_0^\infty \langle m, \Phi(v(s, \cdot)) \rangle ds \geq \int_0^\infty \langle m, -\Phi(T_s \psi) \rangle ds = \int_0^\infty \langle m, -\Phi'(\eta(s, \cdot)) T_s \psi \rangle ds \geq \int_0^\infty \langle m, \bar{c} T_s \psi \rangle ds = \infty,$$

其中, $0 < \eta(s, x) < T_s \psi(x) \leq \|\psi\|_{\max} \leq 1$. 从(3.1)和(3.5)式可得, 对 $\forall \psi \in C_p(\mathbb{R}^d)$, $\|\psi\|_{\max} \leq 1$,

$$E_m^I e^{-\langle X_t^I, \psi \rangle} = e^{-\langle m, v(t, \cdot) \rangle} \rightarrow \exp \left\{ -\langle m, \psi \rangle + \int_0^\infty \langle m, \Phi(v(s, \cdot)) \rangle ds \right\} = 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

即

$$X_t^I \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3.6)$$

ii) 若 $Z < \infty$, 则 $\Phi(Z) < 0, \forall Z \in (0, Z)$. 取 $\|\psi\|_{\max} < Z$, 既然 $\Phi(Z) = 0$, 由比较原理知(3.2)式的解满足

$$0 \leq v(t, x) \big|_{v(0)=\psi} \leq v(t, x) \big|_{v(0)=Z} =: Z, \quad (3.7)$$

即(3.1)~(3.4)式中 v 满足: 当 $\|\psi\|_{\max} < Z$ 时, $0 \leq v(s, x) \leq Z((s, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$. 从而 $-\Phi(v(s, x)) \geq 0$. 这样, 在(3.4)式两边令 $t \rightarrow \infty$, 即得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle m, v(t, \cdot) \rangle = \langle m, \psi - \int_0^\infty \langle m, \Phi(v(s, \cdot)) \rangle ds =: \bar{v}(m, \psi) \geq \langle m, \psi \rangle.$$

所以当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$E_m^I e^{-\langle X_t^I, \psi \rangle} \rightarrow e^{-\bar{v}(m, \psi)} =: E_m^I e^{-\langle X_\infty^I, \psi \rangle}, \quad (3.8)$$

其中 X_∞^I 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P^I)$ 上某一随机测度, X_∞^I 以正概率非零.

(ii) 若 $b > 0$, 则 $\Phi(Z) > 0 (Z > 0)$. 由(3.4)式知 $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle m, v(t, \cdot) \rangle$ 存在, 记为常数 $c \geq 0$. 若 $c \neq 0$, 则当 t 充分大时,

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle m, \Phi(v(s, \cdot)) \rangle ds &\geq \int_N^t \langle m, b v(s, \cdot) \rangle ds \geq \\ &\int_N^t b(c - \varepsilon) ds \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

另一方面, 因 $\langle m, v(t, \cdot) \rangle \geq 0$, 由(3.4)式知 $\int_0^t \langle m, \Phi(v(s, \cdot)) \rangle ds \leq \langle m, \psi \rangle (\forall t \geq 0)$. 因而得出矛盾, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle m, v(t, \cdot) \rangle = 0$. 从(3.1)式即知 $X_t^I \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$.

(iii) 先证 ii) $b=0$, 故 $\Phi(Z) \geq 0$; 又 m 为 L -扩散的不变测度, 则由 (3.4) 式可得: 对 $\forall \psi \in C_p(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \langle m, V_t \psi \rangle &= \langle m, \psi \rangle - \int_0^t \langle m, \Phi(V_r \psi(\cdot)) \rangle dr \rightarrow \\ \langle m, \psi \rangle &- \int_0^\infty \langle m, \Phi(V_r \psi(\cdot)) \rangle dr \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.9)$$

一方面, 从 (3.1) 式得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_m e^{-\langle X_t^I, \psi \rangle} = e^{-\langle m, \psi \rangle + \int_0^\infty \langle m, \Phi(V_r \psi) \rangle dr} =: E_m e^{-\langle X_\infty^I, \psi \rangle},$$

其中 X_∞^I 是一个随机测度, 上式意味着在分布意义下 $X_t^I \rightarrow X_\infty^I (t \rightarrow \infty, \text{弱收敛})$. 另一方面,

$$\begin{aligned} 0 \leq \Phi(Z) &= cZ^2 + \int_0^\infty (e^{-sZ} - 1 + sZ) n(ds) \leq \\ &cZ^2 + \frac{1}{2} Z^2 \int_0^\infty s^2 n(ds) =: \kappa Z^2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

κ 是一个正常数, 且 $\Phi(Z) (Z \in [0, \infty))$ 是增函数. 因而 $\Phi(V_r(\theta\psi)) \leq \Phi(T_r(\theta\psi)) \leq \kappa \theta^2 (T_r \psi)^2$. 由 (3.3) 式可得

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{V_t(\theta\psi)}{\theta} = T_t \psi - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \int_0^t dr T_{t-r} \Phi(V_r(\theta\psi)) = T_t \psi.$$

这样, 从 (3.1) 和 (3.3) 式可得一阶矩公式 $E_m \langle X_t^I, \psi \rangle = \langle m, T_t \psi \rangle = \langle m, \psi \rangle$, 进一步应用 Fatou 引理得

$$E_m \langle X_\infty^I, \psi \rangle \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} E_m \langle X_t^I, \psi \rangle = \langle m, \psi \rangle. \quad (3.11)$$

又应用 Jensen 不等式得

$$e^{-E_m \langle X_\infty^I, \psi \rangle} \leq E_m e^{-\langle X_\infty^I, \psi \rangle} = e^{-\langle m, \psi \rangle + \int_0^\infty \langle m, \Phi(V_r \psi) \rangle dr},$$

即有

$$E_m \langle X_\infty^I, \psi \rangle \geq \langle m, \psi \rangle - \int_0^\infty \langle m, \Phi(V_r \psi) \rangle dr. \quad (3.12)$$

如果在上式中将 $\epsilon \psi (\epsilon > 0)$ 代替 ψ 可得

$$E_m \langle X_\infty^I, \psi \rangle \geq \langle m, \psi \rangle - \frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty \langle m, \Phi(V_r(\epsilon\psi)) \rangle dr =: \langle m, \psi \rangle - \delta(\epsilon). \quad (3.13)$$

下面估计 $\delta(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} \delta(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty \langle m, \Phi(V_r(\epsilon\psi)) \rangle dr = \frac{1}{\epsilon} \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \langle m, \Phi(V_r(\epsilon\psi)) \rangle dr =: \\ &\hat{q}(\epsilon) + \hat{q}_2(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.14)$$

一方面,

$$\begin{aligned} \hat{q}(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 \langle m, \Phi(V_r(\epsilon\psi)) \rangle dr \leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 \langle m, \kappa (T_r(\epsilon\psi))^2 \rangle dr \leq \\ &\kappa \|\psi\|_{\max} \langle m, \psi \rangle \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0^+); \end{aligned} \quad (3.15)$$

另一方面, 应用扩散密度估计^[7, 8]

$$\rho_{K_1, \tau_1}(t, x, y) - t^{\lambda} \rho_{K_2, \tau_2}(t, x, y) \leq p(t, x, y) \leq \rho_{K_3, \tau_3}(t, x, y), \quad (3.16)$$

其中 $\rho_{K, \tau}(t, x, y) = \frac{K}{t^{d/2}} e^{-\tau \|x-y\|^2/t}$, $K, \tau, \lambda > 0$, 因而

$$\begin{aligned} \delta_2(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_1^\infty \langle m, \Phi(V_r(\varepsilon\psi)) \rangle dr \leq \kappa \int_1^\infty \langle m, (T_r\psi)^2 \rangle dr \leq \\ &\kappa \int_1^\infty dr \int_{\mathbb{R}^d} m(dx) \left[\int_{\mathbb{R}^d} p(r, x, y)^2 \psi(y) dy \langle m, \psi \rangle \right] \leq \\ &\kappa \langle m, \psi \rangle \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy \psi(y) \int_1^\infty dr \frac{K_3^2}{r^d} e^{-2\tau_3 \|x-y\|^2/r} = \\ &\kappa \langle m, \psi \rangle \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy \psi(y) c \int_0^{2\tau_3 \|x-y\|^2} e^{-v} v^{d-2} dv / \|x-y\|^{2d-2} \leq \\ &c\kappa \langle m, \psi \rangle \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy \psi(y) \times \left[\frac{\int_0^{2\tau_3 \|x-y\|^2} v^{d-2} dv}{\|x-y\|^{2d-2}} I_{\{\|x-y\| \leq 1\}} + \right. \\ &\left. \frac{\int_0^\infty e^{-v} v^{d-2} dv}{\|x-y\|^{2d-2}} I_{\{\|x-y\| > 1\}} \right] = c\kappa \langle m, \psi \rangle \left[\frac{(2\tau_3)^{d-1}}{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) I_{\{\|x-y\| \leq 1\}} dx dy + \right. \\ &\Gamma(d-1) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\psi(y)}{\|x-y\|^{2d-2}} I_{\{\|x-y\| > 1\}} dx dy \Big] = \\ &c\kappa \langle m, \psi \rangle \left[\frac{(2\tau_3)^{d-1}}{d-1} \langle m, \psi \rangle V(B(0, 1)) + \frac{\Gamma(d-1)}{d} \langle m, \psi \rangle \right] \rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow 0^+), \end{aligned}$$

其中, $c > 0$ 为常数, $d \geq 3$, $V(B(0, 1))$ 是单位球的体积常数. 即当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, $\delta_2(\varepsilon) \rightarrow 0$. 从上式及(3.15)式可得当 $d \geq 3$ 时, $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$. 因而(3.11)和(3.13)式意味着

$$E_m \langle X_\infty^I, \psi \rangle = \langle m, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in C_p(\mathbb{R}^d), \quad d \geq 3.$$

i) 对 $\forall \psi \in C_{\text{exp}}^+(\mathbb{R}^d) = \{ \psi \in C(\mathbb{R}^d): \| \psi(x) e^{K_3 \|x\|^2} \|_{\max} < \infty, K_3 \text{ 为 (3.16) 式中的常数} \}$, 由(3.3)式可知

$$\langle m, \psi \rangle = \langle m, T_t \psi \rangle \geq \langle m, \int_0^t dr T_{t-r}(\Phi(V_r\psi)) \rangle = \int_0^t \langle m, \Phi(V_r\psi) \rangle dr. \quad (3.17)$$

考虑到当 $Z > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \Phi(Z) &= cZ^2 + \int_0^\infty (e^{-sz} - 1 + sz) n(ds) \geq cZ^2 + \int_0^{1/Z} \left(\frac{1}{2!} s^2 Z^2 - \frac{1}{3!} s^3 Z^3 \right) n(ds) \geq \\ &\left(c + \frac{1}{3} \int_0^{1/Z} s^2 n(ds) \right) Z^2 =: p(Z) Z^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中, $0 \leq p(Z) = c + \frac{1}{3} \int_0^{1/Z} s^2 n(ds) < \infty$. 若 $Z=0$, 令 $p(0) = c + \int_0^\infty s^2 n(ds) < \infty$, 此时同样有 $\Phi(Z) \geq p(Z) Z^2$. 又因 $n((0, \infty)) \neq 0$ 和 $c \neq 0$ 至少有一个成立, 故当 Z 较小时, 即对某个正数 δ 当 $0 < Z < \delta$ 时, 一定有 $p(Z) \geq \varepsilon$ (ε 是一个正数). 因此

$$\langle m, \psi \rangle \geq \int_0^t \langle m, p(V_r\psi)(V_r\psi)^2 \rangle dr \geq$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \langle m, \varepsilon(V_r \psi)^2 \rangle dr \geq \\
& \varepsilon \int_0^t dr \int_{\{\|x\|^2 \leq N(r+1)\}} dx [V_r \psi(x)]^2 \geq \\
& \varepsilon \int_0^t dr \frac{\left[\int_{\{\|x\|^2 \leq N(r+1)\}} V_r \psi(x) dx \right]^2}{m\{\|x\|^2 \leq N(r+1)\}}, \quad (3.19)
\end{aligned}$$

其中, 取 $\|\psi\|_{\max} < \delta$ 使得 $0 \leq V_r \psi \leq T_r \psi \leq \|\psi\| < \delta$, N 是一个正数, 使得 $m(\|x\|^2 \leq N(r+1)) > 0$. 注意到

$$\int_0^t dr [m\{\|x\|^2 \leq N(r+1)\}]^{-1} \geq C_d^{-1} \int_0^t [N(r+1)]^{-d/2} dr \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty, d \leq 2)$$

(C_d 为体积常数), 即知, 当空间维数 $d < 3$ 时,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\{\|x\|^2 \leq N(t+1)\}} V_t \psi(x) dx = 0.$$

又对 $\psi \in C_{\exp}^+(\mathbb{R}^d)$, $\|\psi(x)/p(1, x, 0)\|_{\max} \leq C < \infty$.

$$\begin{aligned}
& \int_{\{\|x\|^2 \geq N(t+1)\}} V_t \psi(x) dx \leq C \int_{\{\|x\|^2 \geq N(t+1)\}} (T_t p(1, \cdot, 0))(x) dx = \\
& C \int_{\{\|x\|^2 \geq N(t+1)\}} p(t+1, x, 0) dx \leq \\
& C \int_{\{\|x\|^2 \geq N\}} K_3 e^{-\tau_3 \|x\|^2} dx \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty, \forall t > 0). \quad (3.20)
\end{aligned}$$

若注意到 $\langle m, V_t \psi \rangle = \langle m, \psi \rangle - \int_0^t \langle m, \Phi(V_r \psi) \rangle dr$ 是关于 t 递减的, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle m, V_t \psi \rangle = \liminf \left[\int_{\{\|x\|^2 \leq N(t+1)\}} + \int_{\{\|x\|^2 \geq N(t+1)\}} \right] V_t \psi(x) dx = 0,$$

联系到(3.1)式, 此即对 $\forall \psi \in C_{\exp}^+(\mathbb{R}^d)$, $\langle X_t^I, \psi \rangle \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), 即 $X_t^I \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$, 弱收敛).

应该注意到在定理 3.1(iii)的结论中, $\Phi(Z)$ 的限制条件与完全的形式(1.1)式存在着间隙. 尽管如此, 实际上定理 3.1(iii)的证明方法能够覆盖未涉及的大部分情形. 为此, 给出如下两个命题以说明之.

命题 3.1 设 $X_t = X_t(\xi, \Phi)$ 为取值于 $M_p(\mathbb{R}^d)$ 的超扩散过程, 其中的分支函数 $\Phi(Z) = cZ^{1+\beta}$, $c > 0$ 为常数, $0 < \beta < 1$, 初始测度为 Lebesgue 测度 m , 则

- (i) 当 $d \leq 2/\beta$ 时, $X_t^I \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$;
- (ii) 当 $d > 2/\beta$ 时, $X_t^I \rightarrow X_\infty^I$, $t \rightarrow \infty$, 且 $E_m X_\infty^I = m$.

更进一步, 上述结论可推广到超对称稳定过程, 即

命题 3.2^[1, 5, 12] 设 $Y_t = Y_t(\xi^\alpha, \Phi)$ 为取值于 $M_p(\mathbb{R}^d)$ 的超对称稳定过程, 其中 $\xi^\alpha = (\xi_t^\alpha, t \geq 0)$ 为 α -对称稳定过程 ($0 < \alpha < 2$), 分支函数 $\Phi(Z) = cZ^{1+\beta}$, $c > 0$ 为常数, $0 < \beta \leq 1$, 初始测度为 Lebesgue 测度 m , 则

- (i) 当 $d \leq \alpha/\beta$ 时, $Y_t^I \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$;

(ii) 当 $d > \alpha/\beta$ 时, $Y_t^I \rightarrow Y_\infty^I$, $t \rightarrow \infty$, 且 $E_m Y_\infty^I = m$.

上述两个命题的证明可完全采用定理 3.1(iii)的证明, 只需对其中的几个估计如(3.10)、(3.16)和(3.18)式等作相应的修正即可(参见文献[13]).

致谢 感谢北京师范大学李增沪博士对本文初稿提出的有益建议.

参 考 文 献

- 1 Dawson D A. Measure-valued Markov processes. In: Hennequin P L, ed. Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Four XXI 1991. Lecture Notes in Math, Vol 1 451. Berlin: Springer, 1993. 1~260
- 2 Dawson D A. Interaction and hierarchy in measure-valued processes. In: Chatterji S D, ed. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich 1994. Boston: Birkhäuser, 1995. 986~996
- 3 Dawson D A. The critical measure-valued diffusion processes. Z Wahrsch Verw Geb, 1977, 40: 125~145
- 4 Dawson D A, Perkins E A. Historical processes. Mem Amer Math Soc, 1991, 93(454): 1~179
- 5 Gorostiza L G, Roelly-Coppoletta S, Wakolbinger A. Sur la persistance du processus de Dawson-Watanabe stable L^1 interversor de la limite en temps et de la renormalisation. In: Azéma J, Emery M, Yor M, eds. Sémin Prob XXIV. Lecture Notes in Math, Vol 1 426. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 275~281
- 6 Gorostiza L G, Wakolbinger A. Persistence criteria for a class of critical branching particle systems in continuous time. Ann Prob, 1991, 19: 266~288
- 7 Friedman A. Stochastic Differential Equation and Its Application, Vol 1. New York: Academic Press, 1975
- 8 Stroock D W, Varadhan S R S. Multidimensional Diffusion Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1979
- 9 Dynkin E B. Branching particle systems and superprocesses. Ann Prob, 1991, 19: 1 157~1 194
- 10 Fitzsimmons J. Construction and regularity of measure-valued branching processes. Israel J Math, 1988, 64: 333~361
- 11 Iscoe I. A weighted occupation time for a class of measure-valued branching process. Probab Th Rel Field, 1986, 71: 85~116
- 12 王永进, 吴 荣. 一类流动介质下的测度值分枝过程的平衡态问题. 科学通报, 1995, 40(19): 1 737~1 740
- 13 Wang Y J. A proof to the persistence criteria for a class of superprocesses. J Appl Prob, 1997, 34(2): 559~564