

摄动级数的奇性判别法

李 家 春

(中国科学院力学研究所,北京)

摘 要

本文主要研究摄动理论中 Van Dyke 方法的数学方面,讨论了摄动级数的奇性判别法。文中导出了具有复共轭奇点情况下的符号判别法和 Domb-Syke 图示法,推广了 Van Dyke 关于实奇点的结论,考虑了低阶奇点对判别法则的影响;最后,作者还提出了由 Euler 变换获得的新摄动级数,来确定原摄动级数奇点位置的方法。

一、引 言

近二十年来,计算机的发展对于应用数学的研究方法产生了深刻的影响,在分析工作中也尽可能地利用计算机,出现了半分析、半数值的混合法。在摄动理论中,为了扩大摄动级数参数的适用范围, Van Dyke 提出的改进摄动级数收敛性的方法就是一例。它在流体力学和其它学科中,已经得到了卓有成效的应用^[1,2]。

然而, Van Dyke 方法的数学理论还处在发展初期。该方法要求物理问题的解必须解析地依赖于摄动参数,它仅适用于渐近序列为参数的整数幂函数的情况。因此,对于 Van Dyke 方法数学理论的研究,必将使它克服某些局限性,从而得到更广泛的应用,同时也可推广复变函数论的某些结论^[3]。

为了运用 Van Dyke 提出的 Shanks 变换、Padé 逼近和 Euler 变换进行解析延拓,对发散级数求和或加速慢收敛级数的收敛速度,必须首先确定该摄动级数奇点的位置和性质。

文献[1]中, Van Dyke 提出了确定摄动级数实奇点位置和性质的符号判别法和 Domb-Syke 图示法^[4]。他指出,当摄动幂级数的系数 f_n 符号不变时,该级数的奇点在 ε_0 处;当它的系数 f_n 的符号正负相间时,该级数的奇点在 $-\varepsilon_0$ 处,其中 ε_0 为收敛半径(注意,当 $n > N$ 时,系数 f_n 的符号符合上述规律,结论依然正确)。至于 Domb-Syke 图示法,它仅适用如下三类奇点:

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon)^\alpha, \log(\varepsilon_0 - \varepsilon), (\varepsilon_0 - \varepsilon)^\alpha \log(\varepsilon_0 - \varepsilon). \quad (1.1)$$

对第一类奇点 α 为任意负数;对第三类奇点 α 为任意正整数;若 $\alpha = 0$, 就是第二类奇点。

然而,这三类奇点可以几乎包括大部分物理问题所遇到的奇点类型。此时,由于

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} \sim \frac{1}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{\alpha + 1}{n}\right)^{-1}, \quad (1.2)$$

本文 1980 年 10 月 24 日收到, 1981 年 9 月 4 日收到修改稿。

1) 见附录。

因此, 在以 $1/n$ 为横坐标, f_n/f_{n-1} 为纵坐标的 Domb-Syke 图上, 由该曲线的截距和斜率便可确定奇点的位置和性质.

二、复共轭奇点的奇性判别法

引理 1. 若摄动级数为实系数的幂级数, 该级数不在实轴上的奇点必共轭地成对出现. 证. 设该摄动级数为:

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n, \tag{2.1}$$

其中 f_n 为实系数, 幂级数 (2.1) 的收敛半径为 ε_0 . 我们要证明, 若 $z_0 = \varepsilon_0 e^{i\theta_0}$ 为 $f(\varepsilon)$ 的奇点, $\theta_0 \neq 0$, 则 $\bar{z}_0 = \varepsilon_0 e^{-i\theta_0}$ 必定也是它的奇点.

用反证法. 假定 \bar{z}_0 不是幂级数 (2.1) 的奇点, 则函数 $f(\varepsilon)$ 可以以 \bar{z}_0 为圆心, δ 为半径的小圆 \bar{z}_δ 进行解析延拓, 得到在下半圆 \bar{O}_{ε_0} 扩充了的区域, $\bar{O}_{\varepsilon_0} \vee \bar{z}_\delta$ 上的解析函数 $F_i(\varepsilon)$ (这里 \vee 表示两个集合之和, 见图 1), 在区域 \bar{O}_{ε_0} 上, 有

$$F_i(\varepsilon) \equiv f(\varepsilon). \tag{2.2}$$

根据对称原理, 可以得到上半圆 O_{ε_0} 扩充了的区域 $O_{\varepsilon_0} \vee z_\delta$ 上的解析函数 $F_U(\varepsilon)$, 其中, z_δ 是以 z_0 为圆心, δ 为半径的小圆. 在 O_{ε_0} 内有

$$F_U(\varepsilon) = \overline{F_i(\bar{\varepsilon})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{f_n \bar{\varepsilon}^n} \equiv f(\varepsilon), \tag{2.3}$$

所以, $F_U(\varepsilon)$ 在 O_{ε_0} 内恒等于函数 $f(\varepsilon)$, 即它可以通过 $z_0 = \varepsilon_0 e^{i\theta_0}$ 进行解析延拓, 这一结论同 z_0 为奇点的假设矛盾, 故 $\bar{z}_0 = \varepsilon_0 e^{-i\theta_0}$ 必定也是奇点.

引理 1 证毕.

现在先来讨论只有一对复共轭奇点的情况. 为了方便起见, 不妨假定幂级数 (2.1) 的收敛半径为 1, 这时, 除了 $e^{\pm i\theta_0}$ 外, 不存在其它有限的奇点, $F(\varepsilon)$ 便可表达为

$$F(\varepsilon) = A(e^{-i\theta_0} - \varepsilon)^\alpha + \text{c. c.} + G(\varepsilon), \tag{2.4}$$

这里 $F(\varepsilon)$ 是幂级数 (2.1) 在复平面上的解析延拓. $\alpha < 0$, 即该奇点为 Van Dyke 讨论的第一类奇点, 对于另两类奇点, 可进行类似的讨论; c. c. 表示第一项的复共轭部分; $G(\varepsilon)$ 是全平面上除 ∞ 外的解析函数, 如果 ∞ 处不是本性奇点, 它是多项式, 仅对前两项展开成幂级数后的有限项系数有影响. 所以当 n 充分大时, 我们只要考虑由前两项产生的系数就足够了, 于是

$$\begin{aligned} f_n &= 2\text{Re} \left[(-1)^n \binom{\alpha}{n} |A| e^{(n\theta_0 + \zeta_0)i} \right] \\ &= 2 \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+n-1)}{n!} |A| \cos(\zeta_0 + n\theta_0), \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $\zeta_0 = \arg A - \alpha\theta_0$. 因此, f_n 的符号将由幅角为 $\zeta_0 + n\theta_0$ 的矢径所处的象限来决定, 一、四象限取正, 二、三象限取负.

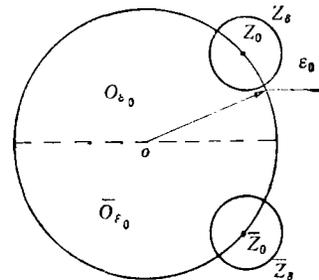


图 1

我们假定幂级数系数的符号规律为

$$\underbrace{+++ \cdots}_{N_0}; \underbrace{--- \cdots}_{N_1}; \underbrace{+++ \cdots}_{N_2}; \cdots \quad (2.6)$$

显然可得

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \zeta_0 + N_0\theta_0 < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} < \zeta_0 + (N_0 + N_1)\theta_0 < \frac{3\pi}{2}, \\ \cdots \cdots \cdots \\ \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi < \zeta_0 + (N_0 + N_1 + \cdots + N_k)\theta_0 < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

所以

$$\frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi - \zeta_0}{\sum_{i=0}^k N_i} < \theta_0 < \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \zeta_0}{\sum_{i=0}^k N_i} \quad (k=0, 1, 2, \cdots), \quad (2.8)$$

由此导出,

$$\theta_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k\pi}{\sum_{i=0}^k N_i}. \quad (2.9)$$

这样,我们便得到了如下的符号判别法:

定理 1. 摄动幂级数 (2.1) 的系数符号为 N_0 个正号, N_1 个负号, \cdots , 那么它的奇点在 $\varepsilon_0 e^{\pm i\theta_0}$ 处, 其中 θ_0 由 (2.9) 式确定.

由该定理可见, Van Dyke 原先的法则仅为我们的特例. 当 f_n 不变号时, $N_1 = \infty$, $\theta_0 = 0$, 奇点在 ε_0 处; 当 f_n 符号正负相间时, $N_1 = N_2 = \cdots = 1$,

$$\theta_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k\pi}{k+1} = \pi, \quad (2.10)$$

即奇点在 $-\varepsilon_0$ 处.

我们还可推断, N 个正负号相间时, 奇点在 $\varepsilon_0 e^{\pm i \frac{\pi}{N}}$ 处.

下面,我们来考虑 Domb-Syke 图示法. 由具有复共轭奇点的幂级数系数表达式 (2.5) 同具有实奇点的幂级数系数表达式 (A.1) 进行比较, 可见两者仅相差一个 $2 \cos(\zeta_0 + n\theta_0)$ 的因子. 而奇点的性质主要是由不含该因子的系数来决定的, 于是我们便可得到下述结论.

定理 2. 对于具有复共轭奇点的幂级数 (2.1), 若以 $1/n$ 为横坐标, 以 $f_n \cos[(n-1)\theta_0 + \zeta_0] / f_{n-1} \cos[n\theta_0 + \zeta_0]$ 为纵坐标, Domb-Syke 图示法依然有效.

显然, 当奇点在实轴上即 $\theta_0 = 0, \pi$ 时, 它又变成以 f_n / f_{n-1} 为纵坐标的情况了.

三、具有一对以上复共轭奇点的情况

如果除了奇点 $e^{\pm i\theta_0}$ 外, 还有其它奇点, 我们分两种情形来讨论

i) 在收敛圆上还有别的奇点. 不妨假定在 $e^{\pm i\theta_1}$ 处还有 β 阶奇点, $\alpha < \beta < 0$. 这时, 由

幂级数 (2.1) 解析延拓的函数 $F(\varepsilon)$ 可表达为:

$$F(\varepsilon) = A(e^{-i\theta_0} - \varepsilon)^\alpha + c. c. + B(e^{-i\theta_1} - \varepsilon)^\beta + c. c. + G(\varepsilon), \quad (3.1)$$

由类似于上节的讨论, 我们仅考虑第一、二项及第三、四项获得的系数就足够了. 比较它们的系数 a_n 和 b_n 的量级, 由 (2.5) 式可得

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \sim \left| \frac{A}{B} \right| \frac{\Gamma(-\alpha + n)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(-\beta + n)\Gamma(-\alpha)}, \quad (3.2)$$

式中 Γ 为伽马函数, 由 Stirling 公式可知, 其渐近表达式为:

$$\Gamma(n) \sim n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi},$$

所以,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \sim \left| \frac{A}{B} \right| \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(-\alpha)} e^{\alpha-\beta} n^{\beta-\alpha}. \quad (3.3)$$

由此可见, 当 $\alpha < \beta < 0$ 时, 上述比值以 $n^{\beta-\alpha}$ 的量阶趋于无穷, 故展开式的符号主要由高阶奇点的项来决定的. 此外, 由于

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{a_n + b_n}{a_{n-1} + b_{n-1}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\right) \right], \quad (3.4)$$

因此, Domb-Syke 图的特性也是主要由高阶奇点项来决定的.

对于第二、三类奇点可进行类似的分析. 于是, 我们导出

定理 3. 对于在同一收敛圆上有若干对复共轭奇点的摄动级数, 符号判别法和 Domb-Syke 图示法所确定的是最高阶奇点的位置和性质.

ii) $F(\varepsilon)$ 在收敛圆外还有别的奇点. 假定在 $Re^{\pm i\theta_2}$ 处有 γ 阶奇点, $R > 1$, $\alpha < 0$, $\gamma < 0$, 这时

$$F(\varepsilon) = A(e^{-i\theta_0} - \varepsilon)^\alpha + c. c. + C(Re^{-i\theta_2} - \varepsilon)^\gamma + c. c. + G(\varepsilon). \quad (3.5)$$

同样, 比较第一、二项和第三、四项得到的系数,

$$\left| \frac{a_n}{c_n} \right| \sim \left| \frac{A}{C} \right| \frac{\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(-\alpha)} e^{\alpha-\gamma} n^{\gamma-\alpha} R^{n-\gamma}. \quad (3.6)$$

由于因子 $R^{n-\gamma}$ 的存在, 不管 α , γ 谁大谁小, 上式总趋于 ∞ , 所以是以收敛圆上的奇点为主.

对于收敛圆上和圆外的奇点都是第二、三类的情况, 结论相同.

如果收敛圆上是第二、三类奇点, 收敛圆外是第一类奇点, 这时

$$F(\varepsilon) = A(e^{-i\theta_0} - \varepsilon)^\alpha \log(e^{-i\theta_0} - \varepsilon) + c. c. + C(Re^{-i\theta_2} - \varepsilon)^\gamma + c. c. + G(\varepsilon), \quad (3.7)$$

其中 α 为正整数, $\gamma < 0$ 由附录可知, 第一、二项的系数为 $O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ 量阶的. 于是由附录的

(A.6), (A.1) 和 Stirling 公式, 可得

$$\left| \frac{a_n}{c_n} \right| \sim \left| \frac{A}{C} \right| \alpha! \Gamma(-\gamma) n^{-n+\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} e^{n-\gamma} R^{n-\gamma} / \sqrt{2\pi}. \quad (3.8)$$

这时, 由于 n^{-n} 因子的存在, 上式趋于零, 所以起主要作用的是负幂次奇点. 所以, 我们的结论是:

定理 4. 当收敛圆上、收敛圆外均有奇点时, 如果它们是同类奇点, 那么奇性判别法首先确定收敛圆上的奇点位置和性质; 如果它们是不同的奇点, 那么奇性判别法首先确定负次幂奇

点的位置和性质(注意,第二、三类奇点系数的量阶有统一的表达式 $O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$,故可以看作同类奇点.)

确定了第一个奇点的位置和性质后,为了确定别的奇点性质和位置,我们可以构造一个新函数,

$$H(\varepsilon) = F(\varepsilon) - A(e^{-i\theta_0} - \varepsilon)^\alpha - c.c., \quad (3.9)$$

其中 A 由下式确定

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow e^{-i\theta_0}} F(\varepsilon)(e^{-i\theta_0} - \varepsilon)^{-\alpha}. \quad (3.10)$$

这样,可再次使用摄动级数的奇性判别法来研究函数 $H(\varepsilon)$,便可了解 $F(\varepsilon)$ 其它奇点的位置和性质.

四、由 Euler 变换得到的新摄动级数确定奇点位置

若奇点位置不在正实轴上,往往可用 Euler 变换

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \quad (4.1)$$

来扩大摄动级数的适用范围. 这时级数 (2.1) 变为新的摄动级数

$$f(\varepsilon) = E(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^n. \quad (4.2)$$

考察分式线性变换的对应关系, ε 平面上的偏心圆族

$$y^2 + \left(x - \frac{K^2}{1 - K^2}\right)^2 = \frac{K^2}{(1 - K^2)^2}. \quad (4.3)$$

映照为 ζ 平面上的同心圆 $|\zeta| = K$, 其中 $\varepsilon = x + iy$, $\zeta = u + iv$ (见图 2). 因此,若摄动级数 (4.2) 的收敛半径为 K ,则摄动级数 (2.1) 可以沿着正实轴解析延拓到 x_c ,

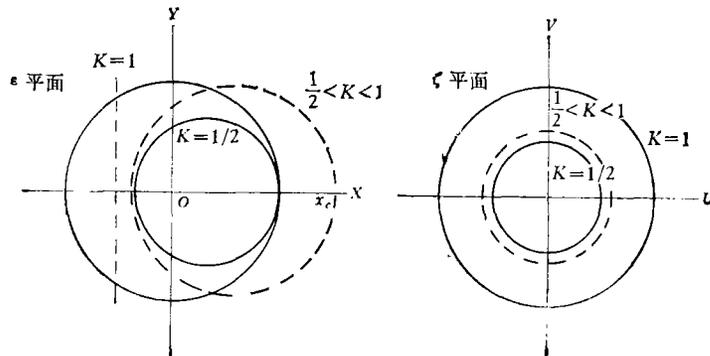


图 2 Euler 变换的对应关系

$$x_c = \frac{K}{1 - K}. \quad (4.4)$$

在 ζ 平面上,级数 (4.2) 的收敛半径由原级数 (2.1) 的奇点在 ζ 平面上的映象所决定. 若原级

数 (2.1) 的奇点为 z_1, z_2, \dots , 它们分别处在 ζ 平面的半径为 K_1, K_2, \dots 的同心圆族上, 则 $E(\zeta)$ 的收敛半径为:

$$K_0 = \min K_n = \min \sqrt{\frac{x_n^2 + y_n^2}{(x_n + 1)^2 + y_n^2}}, \quad (4.5)$$

由此可见, 在 z 平面上的奇点, 必在以收敛半径 K_0 为参数的偏心圆 (4.3) 上或该偏心圆外.

如果欲求收敛圆上的奇点, 则它刚好是收敛圆与偏心圆的交点 $z_0 = e^{\pm i\theta_0}$,

$$\theta_0 = 2 \cos^{-1} \frac{1}{2K_0} \quad (4.6)$$

对于一些特殊的 K_0 值, 计算结果如下:

表 1 收敛圆上奇点位置同 K_0 的关系

K_0	1/2	$\sqrt{2}/2$	1
x_c	1	$1 + \sqrt{2}$	∞
θ_0	0°	90°	120°

致谢: 对于谈镐生教授的鼓励和指导, 以及 J. B. Keller 教授来华讲学时所提出的有益建议, 作者谨致以衷心的感谢.

附 录

作为 Domb-Syke 图示法的基本出发点, 我们给予 (1.2) 式以简洁的证明.

i) 负幂次奇点 $(e_0 - e)^\alpha$, $\alpha < 0$. 由二项式展开

$$f_n = \left(\frac{1}{e_0}\right)^{n-\alpha} (-1)^n \binom{\alpha}{n}, \quad (A.1)$$

其中

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

由此导出

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1}{e_0} \left(1 - \frac{\alpha+1}{n}\right). \quad (A.2)$$

ii) 对数奇点 $\log(e_0 - e)$, 除第一项外

$$f_n = -\frac{1}{e_0^n} \frac{1}{n}, \quad (A.3)$$

所以

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1}{e_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad (A.4)$$

相当于 $\alpha = 0$ 的情况.

iii) 对数幂次奇点 $(e_0 - e)^\alpha \log(e_0 - e)$, α 为正整数, 将展开式相乘导出 n 充分大时系数 f_n 的表达式为:

$$f_n = -\left(\frac{1}{e_0}\right)^{n-\alpha} \left[\frac{1}{n} \binom{\alpha}{0} - \frac{1}{n-1} \binom{\alpha}{1} + \frac{1}{n-2} \binom{\alpha}{2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n-\alpha} \binom{\alpha}{\alpha} \right], \quad (A.5)$$

当 n 充分大时, 展开成 $1/n$ 的幂级数,

$$f_n = (-1)^\alpha \left(\frac{1}{\epsilon_0}\right)^{n-\alpha} \frac{\alpha!}{n^{\alpha+1}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

于是

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} \sim \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{n-1}{n}\right]^{\alpha+1} \sim \frac{1}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\alpha+1}{n}\right). \quad (\text{A.6})$$

参 考 文 献

- [1] Van Dyke, M., *Quart. Jour. Mech. App. Math.*, **27** (1974), 423—440.
- [2] 李家春, 奇异摄动理论及其在力学中的应用 (钱伟长主编), 科学出版社, 1981.
- [3] Keller, J. B., *SIAM Review*, **21** (1979).
- [4] Domb, C. & Syke, M. F., *Proc. Roy. Soc. Lon. Ser. A.*, **240** (1957), 214—218.
- [5] Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*, Oxford Univ Press, Corrected edition, 1952.