

基于成对曲线组合的柔顺机构设计

王念峰*, 张宪民*

华南理工大学精密装备与制造技术广东省重点实验室, 广州 510640

* E-mail: menfwang@scut.edu.cn; zhangxm@scut.edu.cn

收稿日期: 2011-11-30; 接受日期: 2012-01-31

国家杰出青年基金(批准号: 50825504)、机器人技术与系统国家重点实验室开放基金(批准号: SKLRS-2010-MS-09)、华南理工大学中央高校基本科研业务费(批准号: 2009220040, 2012ZP0004)和广东省高等学校珠江学者岗位计划(2010)资助项目

摘要 采用拓扑优化技术进行柔顺机构设计成功与否在很大程度上取决于所采用的机构几何表述方式. 本文提出了一种全新的基于成对曲线组合(对线组)的表述方式. 这种几何表述方式, 首先确定机构的输入输出区域. 虽然在初始阶段不知道机构在设计域的分布, 但是载荷加载需要借助机构输入输出点, 因此必须有至少一个加载区域, 一个支撑区域和一个输出区域. 将这些输入输出区域利用成对 Bezier 曲线直接或间接连接起来形成一种可以承载负荷的柔顺机构. 这种几何表述方式生成的机构边界为曲线函数之组合, 解决了拓扑优化设计中的锯齿和模糊边界问题, 并且可以同时形状和拓扑优化并且保持结构边界的光滑, 没有棋盘格现象和中间密度单元等. 基于对线组进行柔顺机构表征, 会产生一些复杂的结构, 基于 FG-FEM 有限元法进行仿真分析求得响应. 研究柔顺机构拓扑优化设计理论与方法, 采用图的形式对机构对象进行编码, 利用遗传算法的全局寻优能力寻找全局最优解, 数据算例的结果表明, 提出的方法正确有效.

关键词
柔顺机构
对线组
拓扑优化
遗传算法

柔顺机构虽然具有很多优点,但其面临最大的挑战在于在满足约束条件下,如何分析和设计相应的机构. 众多学者在柔顺机构的设计方面已作了许多工作,特别是 Howell^[1]提出著名的伪刚体模型法后,这方面的研究取得了长足进展. 采用这一方法,可以将柔顺机构近似等价为一个刚性机构,从而可以有效地采用传统刚性机构的分析与综合方法对柔顺机构进行分析与综合^[2]. 尽管伪刚体模型法取得了良好的应用效果,但由于采用该法处理柔顺机构的设计问题时需要一个已知的机构出发,因而,有时会给设计带来很大困难. 并且这种方法只能用来设计具有集中柔度的柔顺机构,柔性集中在运动副上,而非

相对均衡地分布在某个或所有元件中.

Ananthasuresh^[3]从结构优化的观点出发利用拓扑优化技术进行柔顺机构分析与设计. 和采用伪刚体模型,沿用传统的分析与综合方法不同,采用拓扑优化技术,只需给定设计域和指定输入输出位置,无需从一个已知的刚性机构出发,所得的结果具有优化的力—位移输入输出关系,因而引起了人们的重视. 在实际应用中,人们总是希望柔顺机构一方面具有足够的柔性,以便顺利完成预定的工作,同时又具有足够的刚性以保证其工作的稳定性. 柔顺机构的拓扑优化就是在这样一对相互矛盾的目标下进行的^[4]. 柔顺机构拓扑优化方法主要有基础结构法^[5-7]、均匀

化方法^[8-11]、水平集法^[12-14]、遗传算法^[15-18]等. 基础结构法和均匀化方法, 都是将离散变量的拓扑优化问题转化为连续变量的尺寸优化问题. 连续变量优化问题可以利用传统的优化技术来处理, 将连续变量和材料的性质联系起来, 利用有限元方法进行结构分析. 然而这两种优化方法得到的优化设计一般会出现一些中间密度单元. 为了得到最后的拓扑结构, 必须利用内在的惩罚机制和自定义阈值获得, 这影响了最后结果的准确性.

水平集法最初是 Osher 和 Sethian^[19]在研究曲线(或曲面)以曲率相关的速度演化时描述曲线(或曲面)的演化过程的. 其基本思想就是将曲线或曲面隐式地表达成为一个高维水平集函数的零水平集. 水平集是一种描述边界的隐式表达法, 它能够同时灵活地描述结构边界形状和拓扑变化. Sethian 和 Wiegmann^[20]最早将水平集法应用于结构优化设计, 形状和拓扑的变化根据设计边界上的等效应力来演化. 之后, Wang 等人^[21]和 Allaire 等人^[12]扩展了水平集拓扑优化的方法, 将水平集方法和形状导数结合起来, 通过结构边界的法向速度建立了 Hamilton-Jacobi 方程同形状导数之间的关系, 采用逆风策略来求解水平集方程, 实现结构边界的演化直至获得最优解. 同均匀化方法和基础结构法相比水平集法具有多个优点, 例如: 形状和拓扑优化可以同时进行并且保持结构边界的光滑, 没有棋盘格现象和中间密度单元等. 但同时也存在收敛速度慢, 优化结果受初始值影响大等缺点.

遗传算法在柔顺机构优化设计中已显示出良好的应用前景. Chapman 等人^[22]采用的策略是把离散空间形成的有限元网格编成一维的二进制位串基因. 在二进制编码里边, 当有限元格为空穴的时候为 0, 为实体的时候为 1. 这些单元格的状态定义了材料的分布, 从而定义了拓扑结构. 然而这种几何表述方式会产生棋盘格现象和浮动单元(单元浮动在空间里, 不和结构主体相连). 在拓扑优化中, 棋盘格式的出现与所采用的材质设计变量无关, 即不论是采用均匀化设计方法还是采用遗传算法, 均会出现棋盘格式. 棋盘格的存在使优化结果变得不太实用, 优化结果变得难以理解, 后处理时提取适合于加工的几何模型变得困难, 从而造成了计算资源浪费. 当棋盘格单元在经过交叉和变异出现以后, Aguilar Madeira^[23]利用一种修补算法, Akin 和 Arjona-Baez^[24]把单点连

接转化成桁架单元, Jang 等人^[25]利用不协调元, Li 等人^[26]利用基于单元的周边元参考系数的一种平滑算法来尝试着解决棋盘格现象, 但是, 这样会造成基因特性在迭代过程中遭到破坏并且增加了计算量. Tai 和 Chee^[27]采用一种仿生学的机构几何表述方式表征结构并且进行了相应的基因编码. 这种几何表述方式应用了仿生学的设计, 拓扑结构与脊椎动物的脊椎十分相似, 成功应用于柔顺机构的拓扑优化问题上. 然而这种表述方式所得到的结构由于有限元网格的存在边缘会产生锯齿, 后处理时提取适合于加工的几何模型比较困难, 造成了计算资源浪费, 并且直接影响了设计精度^[16].

在比较柔顺机构几何表述方式的基础上, 本文提出了一种全新的基于对线组的几何表述方式. 基于对线组的几何表述方式, 首先确定结构的输入输出区域, 将这些输入输出点利用成对 Bezier 曲线直接或间接连接起来形成一种可以承载负荷的柔顺机构. 这种显式几何表述方式可以同时进行形状和拓扑优化并且保持结构边界的光滑, 没有棋盘格现象和中间密度单元等, 同时解决了柔顺机构拓扑优化设计中的锯齿和模糊边界问题.

1 基于对线组的柔顺机构几何表述

1.1 表述方式

基于对线组的几何表述方式首先确定结构的输入输出区域(输入输出区域可以作为优化对象进行优化). 虽然在初始阶段不知道结构在设计域的分布, 但是载荷加载需要借助结构输入输出域, 因此必须有至少一个加载域, 一个支撑域和一个输出域. 将这些输入输出区域直接或间接连接起来形成一种可以承载负荷的机构. 图 1(a)所示的是设计空间以及输入输出域. 如图 1(b)所示选取输入输出域里的一些点作为输入输出点, 选取设计空间里的一些点作为控制点. 本文选用的对线组数为 C_k^2 , 其中 k 为输入输出域的个数, 使每两个输入输出域直接相连, 在本示意图中 k 为 3, 也就是初始对线组数为 3, 需要 6 组控制点. 把这些输入输出点用 Bezier 曲线连接起来. 选择 Bezier 曲线的主要原因有二; 一是 Bezier 曲线可以用比较少的设计参数来表述柔顺元件的复杂形状. 移动内控制节点, 可调节设计域内 Bezier 曲线的形状, 形状变化比较平缓. 二是 Bezier 曲线完全落在控制多

边形的凸包内, 是要把曲线控制在设计域内的关键点. Bezier 曲线上任意点的位置向量 r 由下式决定:

$$r = r(u) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} u^k (1-u)^{n-k} r_k, \quad (1)$$

式中, u 为在 $[0,1]$ 区间内变动的内参数, $n-1$ 为内部控制点的个数(起点和终点之间). r_0 为起点位置向量, r_n 为终点位置向量, $r_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ 为内部控制点位置向量. 曲线假定按等长分成 n 段. 例如, 在示意图中有 3 个内部控制点, 则曲线按等长分为 4 段, 4 段中的第 1 段对应 $0 \leq u \leq 1/4$, 第二段对应 $1/4 \leq u \leq 1/2$, 第 3 段对应 $1/2 \leq u \leq 3/4$, 第四段对应 $3/4 \leq u \leq 1$.

一对曲线为两条起点和终点都在同一输入输出区域的曲线对, 可以定义两输入输出区域间柔顺机构的材料分布情况. Bezier 曲线 1 和 2, 3 和 4, 5 和 6 组成 3 个对线组, 形成最后如图 1(c)所示的结构.

1.2 基于 FG-FEM 有限元法的模型

基于对线组进行柔顺机构几何表征, 会产生一些复杂的结构, 需独立开发有限元分析程序进行仿真分析, 本文采用采用如图 2 所示的 FG-FEM^[28]模型. 应用线性有限元分析技术解决拓扑问题只能限制在小变形范围内, 当柔顺机构产生较大弹性变形时, 采用线性有限元分析技术不能给出良好的设计结果, 因此本文利用几何非线性有限元技术对柔顺机构进行拓扑优化设计. 针对非线性有限元方程的求解问题, 建立增量形式的平衡方程, 采用 Total Lagrange 增量方法和 Newton-Raphson 载荷增量求解技术获得机构响应. 采用正方形单元对如图 1(a)所示设计空间进行结构分析前的有限元网格划分, 将该空间模型划分 50×50 个单元, 从而得到图 2 所示的网格划分图. 图 1(c)所示的机构被有限元分割后, 会产生 3 种类型的单元, 空单元, 实体单元, 和边界单元如图 2 中局部放大图所示. 单元刚度阵可表示为

$$K_e = \left[\frac{A_1}{A_{cle}} E_1 + \left(1 - \frac{A_1}{A_{cle}} \right) E_0 \right] K_e^*, \quad (2)$$

式中, A_1 为实体材料在单元中所占面积, A_{cle} 为单元面积, 将有限单元细分成更小的单元, 每一成对曲线包含区域也由足够多的点来表示, 如果有点落在细分网格里, 则为实体细分单元, 利用细分网格计算材料所占每一有限单元的面积 A_1/A_{cle} , E_1 为材料的弹性模量, E_0 为无材料处的弹性模量. E_0 相对于 E_1 取较小的

数值.

2 基于遗传算法的多目标柔顺机构设计

一般含有约束多目标优化问题定义为

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_m(x)], \\ \text{st. } g_j(x) &\leq 0, \ j=1, 2, \dots, q, \\ h_k(x) &= 0, \ k=1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (3)$$

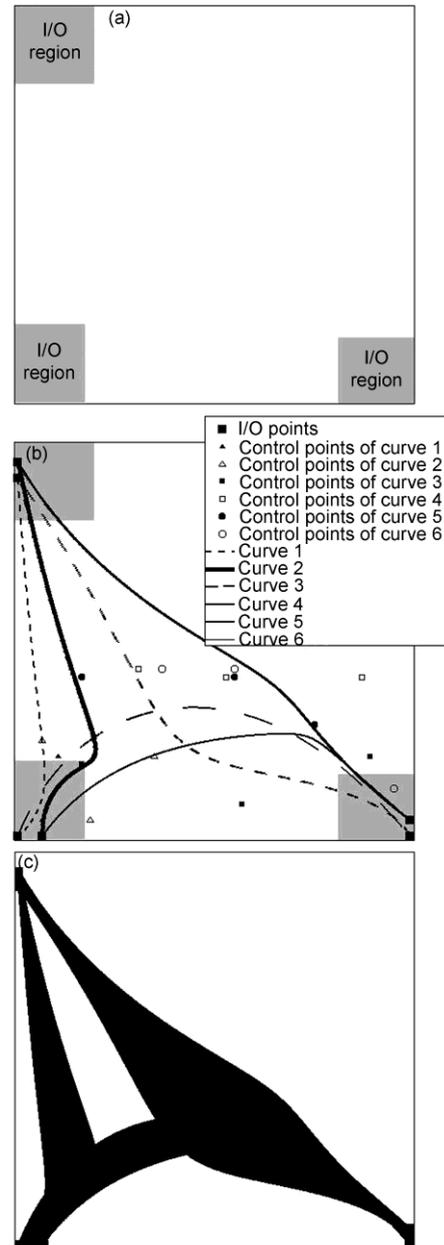


图 1 利用对线组进行柔顺机构表征示意图

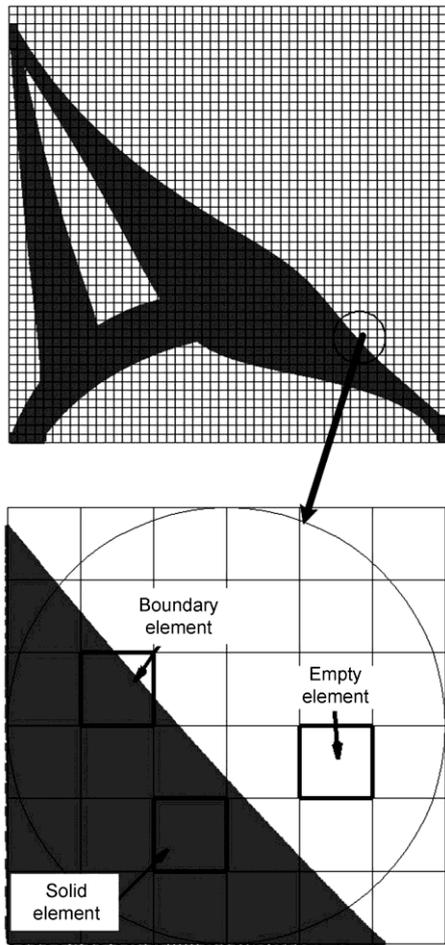


图2 基于FG-FEM有限元法

式中, f 是的目标向量, $x=[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_t]$ 是 t 维设计变量, 在本文中为控制点和输入/输出点的坐标, g_j 表示不等式约束, h_k 为等式约束.

某种意义上说, 拓扑是“定性”的, 几何结构中的拓扑变化是不连续的变化; 因此, 本质上是离散优化算法的遗传算法能够有效地解决拓扑优化问题. 与传统的优化方法对单个的结果进行搜索/迭代不同的是, 遗传算法是对群体进行搜索迭代. 这预示着在程序的一次运行中有更高的机会获得全局最优解^[29], 同时, 这也使得它更适合多目标优化问题.

本文中所使用的多目标遗传算法是建立在文献^[30]中的方法的基础之上, 该文献中所提到的方法采用无支配性排序策略解决约束问题. 使用遗传算法, 设计变量需要编码成某种数据结构形式的染色体, 对应图 1(c)所示的结构, 染色体编码如图 3 所示. 这个编码是图的一种形式, 在这个图的节点处包含

了这些设计变量, 即输入/输出点和控制点的单元号码. 这些节点的连接描绘了 Bezier 曲线的联系性. 可以看出, 每一条曲线是由曲线控制点和首尾的输入/输出点来定义的.

遗传操作主要由交叉算子和变异算子组成. 遗传算法在实现交叉操作过程中, 是通过从一个染色体父本随机的分割任何连接因子与另一染色体父本上相应的因子进行交换, 图 4 给出了一个例子. 对于变异, 突变算子是随机选择染色体图中的任意节点并将它的值随机的改变为允许范围内的其他值.

3 柔顺机构拓扑优化算例及讨论

本文以柔顺反相器为例检验基于对线组几何表述方式的实用性. 设计域如图 5 所示. 设计空间为 100 mm×100 mm. 用几何增益和机械增益作为优化的目标. 选用聚丙烯(PolyPropylene)材料, 弹性模量为 900 MPa, 泊松比为 0.40, 屈服强度为 33 MPa.

柔顺反相器优化问题定义为

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= [GA \ MA], \\ \text{st. } g_v &= V - 0.4 \leq 0, \\ g_{\text{stress}} &\leq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

柔顺机构要有足够的柔性和刚性, 本文采用几何增益表征柔性, 机械增益表征刚性. 式中 GA 为几何增益, 定义为输出输入位移比 $u_{\text{out}}/u_{\text{in}}$; MA 为机械增益, 定义为输出力和输入点反作用力之比 $F_{\text{out}}/F_{\text{in}}$; 体

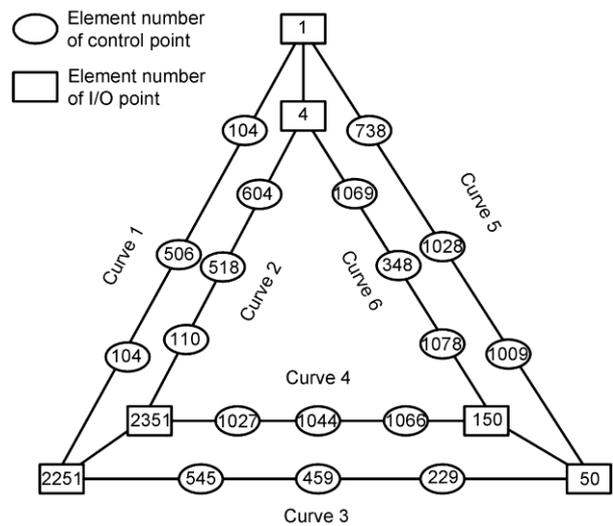


图3 染色体

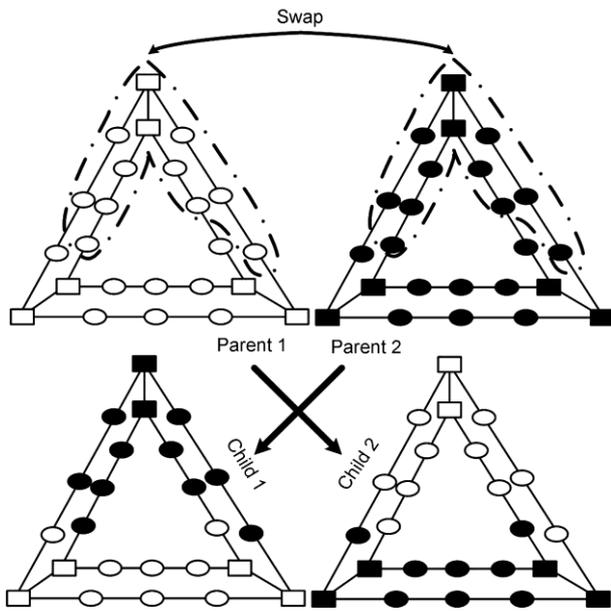


图4 交叉算子

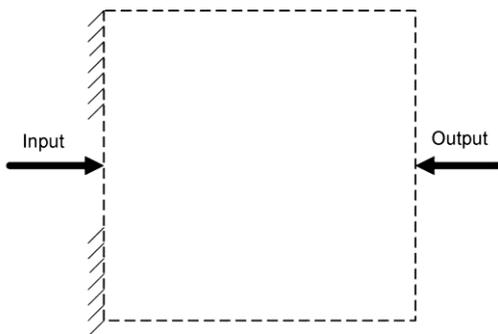


图5 柔顺反相器设计域

积约束比为 0.4; 在一个柔顺机构中的约束应力峰值 (机构疲劳或破裂的临界值) 十分重要, 本文在应力不等式约束函数中运用了无量纲的表达方法:

$$g_{\text{stress}} = \frac{\sigma_{\text{peak-von-Mises}} - \sigma_y}{\sigma_y} \leq 0, \quad (5)$$

其中, $\sigma_{\text{peak-von-Mises}}$ 为压应力峰值, σ_y 为材料的拉伸屈服强度.

为便于结果之间的比较, 固定值为 2 mm 的输入位移加载于输入点, 输出点作用一单位力. 遗传进化迭代次数为 500, 种群规模为 100, 最终目标函数(有限元分析)被评估的总次数为 45354. 反相器的结构对称, 仅用上半部分表征即可. 500 次迭代后的三个非劣解及其目标函数数值如图 6 所示. 图 6(a)为最优几

何增益解, 图 6(b)所示的是最优机械增益解, 图 6(c)给出一中间解, 其机械增益比图 6(a)好, 几何增益比图 6(b)好.

图 6(a)所示的最优几何增益解在第 472 次迭代中得到, 当输入位移为 2 mm 时, 输出反向位移为 2.76 mm, 几何增益为 -1.38; 需要的输入力为 35.78 N, 机械效益为 -0.03; 峰值应力为 32.6 MPa, 应力约束值为 -0.012; 材料体积比为 0.158, 体积所约束值为 -0.242. 图 6(b)所示的最佳机械效益解在第 447 次迭代中得到, 输出反向位移为 0.3 mm, 几何增益为 -0.15; 需要的输入力为 5.88 N, 机械增益为 -0.17; 峰值应力为 23.6 MPa, 应力约束值为 -0.40; 材料体积比为 0.10, 体积所约束值为 -0.30.

现将本法所得结果与另一些方法如均匀化方法^[9], 水平集法^[13]以及特征刚度法^[31]的优化结果进行比较. 现目前为止, 由于建模方法, 材料选取, 参数调节以及设计本身的复杂性, 还没有一个广被认可的结果, 但利用拓扑优化理论对柔顺机构进行设计时, 产生的拓扑结构近似. 有关柔顺机构拓扑优化的研究表明, 在建模时, 通常假定输出点力位移关系固定, 为了计算上的方便, 做线性假设, 也就是经典的弹簧模型. 经验证明, 没有弹簧模型, 通常输入输出之间会断开, 很难设计一个有效的柔顺机构. 不同参数的弹簧模型也将很大程度上影响最后的结

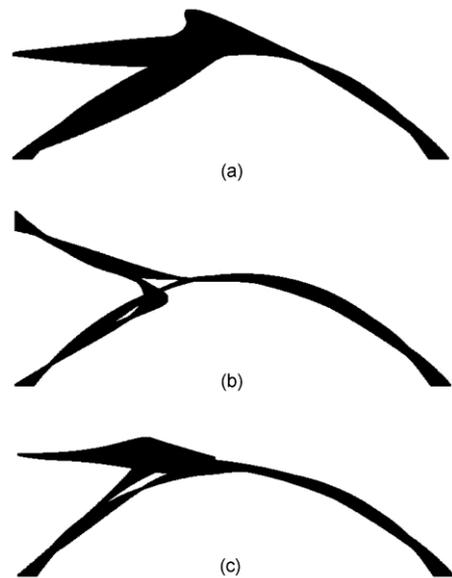


图6 柔顺反相器

(a) 最优几何增益; (b) 最优机械增益; (c) 中间解

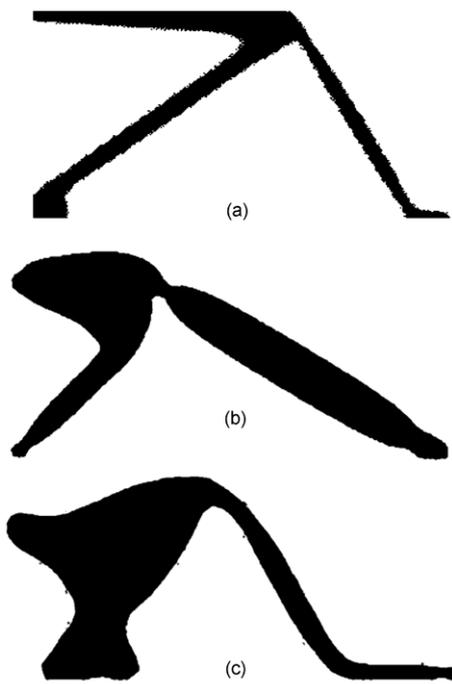


图 7 优化结果对比

(a) 均匀化方法^[9]; (b) 水平集法^[13]; (c) 特征刚度法^[31]

果,但是目前为止,弹簧模型在柔顺机构拓扑优化中依然是应用最广的模型,因为所得的设计结果有意义,并且方便控制输入输出关系.基于本文提出的几何表述方式进行柔顺机构拓扑优化设计将不依赖于弹簧模型,通过图 7 中的结果对比可知,拓扑结果类似,并且本文得到最优的几何效益值.

为了对本文提出的表述方式更好的阐述,图 8 给出了生成图 6 所示的 3 种柔顺反相器的所对应的 Bezier 曲线组合.

图 9 给出了目标空间中一些选 4EE3 的非劣解前端(第 20, 第 100 和第 500 代).进一步分析第 500 次迭代的非劣解前端,可以分为三组,其中一组(非劣解前端左部)的拓扑对应图 6(a)拓扑,一组(非劣解前端右部)对应图 6(b)拓扑,一组(非劣解前端中部)对应图 6(c)拓扑.每组拓扑中有多个解,他们之间的区别主要在于形状.从侧面证明了基于本文提出的几何表述方式,形状和拓扑优化可以同时进行并且保持结构边界的光滑,没有棋盘格现象和中间密度单元等.

图 10 和 11 显示了优化迭代过程中目标函数几何增益 GA 和机械增益 MA 的迭代收敛过程.图 10 给

出了各次迭代中最优几何增益解随迭代次数的变化趋势,图 10 中同时给出了对应最优几何增益解的机

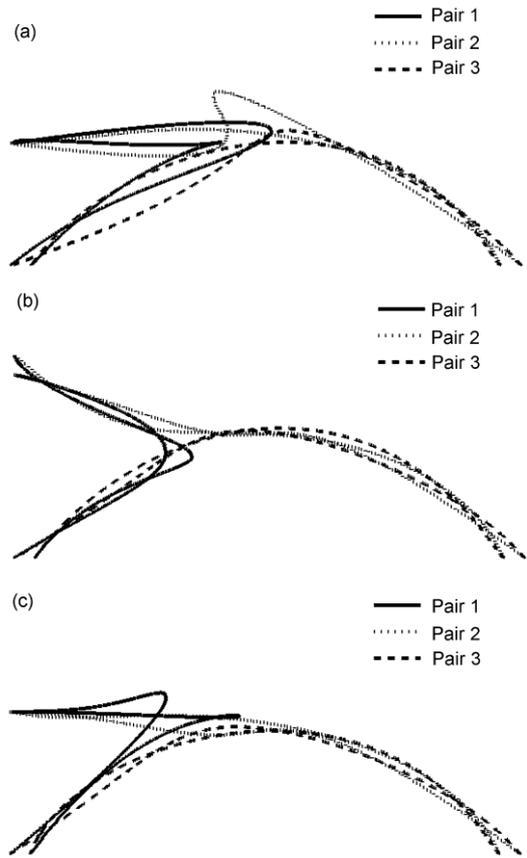


图 8 柔顺反相器的 Bezier 曲线组合

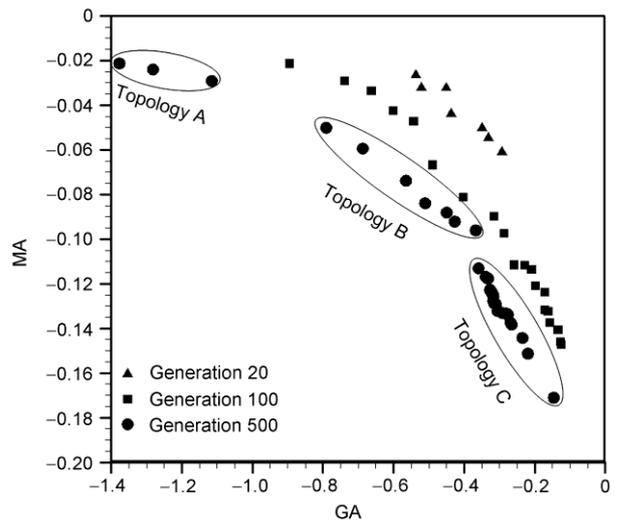


图 9 目标空间内的非劣解前端

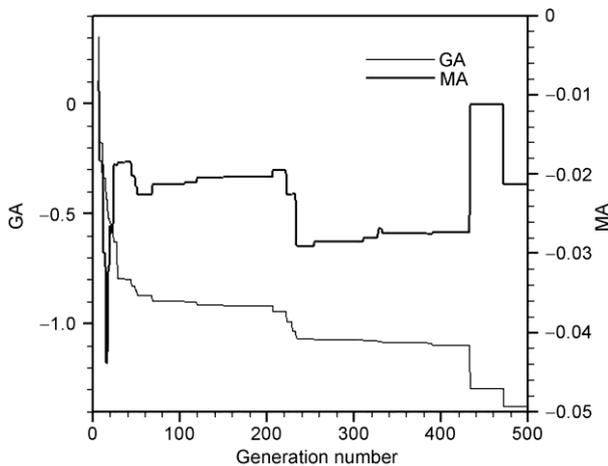


图 10 最优几何增益解的迭代收敛过程

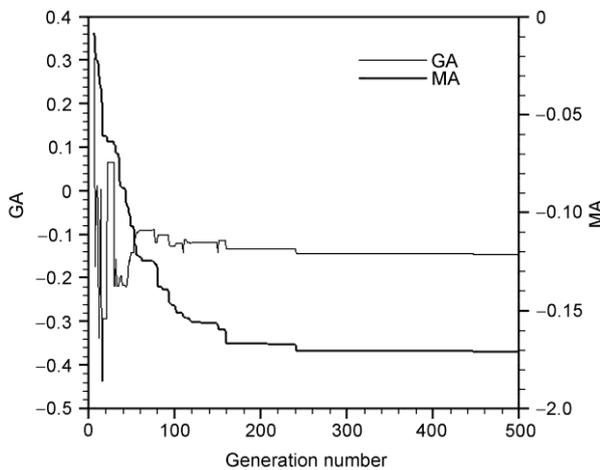


图 11 最优机械增益解的迭代收敛过程

械增益值. 图 11 给出了各次迭代中最优机械增益解随迭代次数的变化趋势, 图 11 中同时给出了对应最优机械增益解的几何增益值. 图中可以看出从第 7 次迭代才出现满足约束条件的可行解, 目标值随迭代次数的增加而逐步减少.

4 结论

1) 提出了一种全新的基于成对曲线组合的柔顺机构几何表述方式. 这种几何表述方式表征的机构边界为曲线函数之组合, 是一种描述边界的显式表达法, 解决了柔顺机构拓扑优化设计中的锯齿和模糊边界问题, 可以同时进行形状和拓扑优化并且保持结构边界的光滑, 没有棋盘格现象和中间密度单元等.

2) 针对本文提出的基于对线组的几何表述方式, 采用本质上是离散优化算法的遗传算法有效地解决了基于对线组的柔顺机构拓扑优化问题, 设计变量编码成图的一种形式, 在图的节点处包含了设计变量, 即输入/输出点和控制点的单元号码.

3) 基于对线组的柔顺机构表述方式, 消除了柔顺机构设计建模中对弹簧模型的依赖.

4) 通过柔顺反相器算例验证了基于对线组的柔顺机构表征方式的适用性. 从结果可以看出, 得到的拓扑结构和用经典均匀化方法, 水平集法以及特征刚度法得到的拓扑结构近似, 并且具有更好的几何增益值.

参考文献

- 1 Howell L L. Compliant Mechanisms. New York: McGraw-Hill, 2001
- 2 陈贵敏, 李端玲. 平面柔顺机构的自由度. 机械工程学报, 2010, (013): 48-53
- 3 Ananthasuresh G K. A new design paradigm for micro-electro-mechanical systems and investigations on the compliant mechanisms synthesis. PhD Thesis. Michigan: University of Michigan, USA, 1994
- 4 张宪民. 柔顺机构拓扑优化设计. 机械工程学报, 2003, 39(11): 47-51
- 5 Dorn W S, Gomory R E, Greenberg H J. Automatic design of optimal structures. J de Mecanique, 1964, 3(1): 25-52
- 6 Frecker M, Kikuchi N, Kota S. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple outputs. Struct Multidiscip Optim, 1999, 17(4): 269-278
- 7 占金青, 张宪民. 基于基础结构法的柔顺机构可靠性拓扑优化. 机械工程学报, 2010, (013): 42-47
- 8 Bendsoe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Computer Methods Appl Mech Eng, 1988, 71(2): 197-224
- 9 罗震, 蒙永立, 郭文德, 等. 分布式柔性机构拓扑优化设计的理论和算法. 机械工程学报, 2006, 42(10): 27-36
- 10 谢先海, 廖道训. 基于均匀化方法的柔顺机构的设计. 中国机械工程, 2003, 14(11): 953-955
- 11 蔡坤, 陈飘松, 张洪武. 具有体积约束的连续体结构拓扑优化仿生方法. 固体力学学报, 2008, 29(002): 170-174

- 12 Allaire G, de Gournay F, Jouve F, et al. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control Cybernetics*, 2005, 34(1): 59–80
- 13 Wang M Y, Chen S, Wang X, et al. Design of multimaterial compliant mechanisms using level-set methods. *J Mech Design*, 2005, 127(5): 941–956
- 14 罗俊召, 陈立平, 罗震. 基于半隐式格式的水平集法连续体结构形状和拓扑优化方法. *固体力学学报*, 2008, 29(002): 175–180
- 15 Tai K, Cui G Y, Ray T. Design synthesis of path generating compliant mechanisms by evolutionary optimization of topology and shape. *J Mech Design Trans ASME*, 2002, 124(3): 492–500
- 16 Wang N F, Tai K. Design of grip-and-move manipulators using symmetric path generating compliant mechanisms. *J Mech Design Trans ASME*, 2008, 130(11): 112305
- 17 Wang N F, Tai K. Design of 2-DOF compliant mechanisms to form grip-and-move manipulators for 2D workspace. *J Mech Design Trans ASME*, 2010, 132(3): 031007
- 18 郭中泽, 陈裕泽, 张卫红, 等. 基于单元材料属性更改的结构渐进拓扑优化方法. *机械科学与技术*, 2006, 25(008): 928–931
- 19 Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J Comput Phys*, 1988, 79(1): 12–49
- 20 Sethian J A, Wiegmann A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *J Comput Phys*, 2000, 163(2): 489–528
- 21 Wang M Y, Wang X, Guo D. A level set method for structural topology optimization. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2003, 192(1-2): 227–246
- 22 Chapman C D, Saitou K, Jakiela M J. Genetic algorithms as an approach to configuration and topology design. *J Mech Design Trans ASME*, 1994, 116(4): 1005–1012
- 23 Aguilar M J F, Rodrigues H, Pina H. Multi-objective optimization of structures topology by genetic algorithms. *Adv Eng Software*, 2005, 36(1): 21–28
- 24 Akin J E, Arjona-Baez J. Enhancing structural topology optimization. *Eng Comput-Int J Computer-Aided Eng*, 2001, 18: 663–675
- 25 Jang G-W, Jeong J H, Kim Y Y, et al. Checkerboard-free topology optimization using non-conforming finite elements. *Int J Numer Methods Eng*, 2003, 57(12): 1717–1735
- 26 Li Q, Steven G P, Xie Y M. A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 2001, 22(3): 230–239
- 27 Tai K, Chee T H. Design of structures and compliant mechanisms by evolutionary optimization of morphological representations of topology. *J Mech Design*, 2000, 122(4): 560–566
- 28 García-Ruiz M, Steven G P. Fixed grid finite elements in elasticity problems. *Eng Comput*, 1999, 16(2): 145–164
- 29 Deb K. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. New York: Wiley, 2001
- 30 Wang N F, Tai K. Target matching problems and an adaptive constraint strategy for multiobjective design optimization using genetic algorithms. *Comput Struct*, 2010, 88(Compendex): 1064–1073
- 31 Wang M Y, Chen S. Compliant mechanism optimization: Analysis and design with intrinsic characteristic stiffness. *Mech Based Des Struct Mach*, 2009, 37(2): 183–200