



平面常宽凸集的 Firey-Sallee 定理

何刚^①, 徐文学^{②③*}, 张洪^④, 朱保成^②

① 遵义师范学院数学与计算科学学院, 遵义 563002;

② 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715;

③ 西南大学教育学部, 重庆 400715;

④ 凯里学院数学科学学院, 凯里 556011

E-mail: zyhegang@126.com, xwxjk@163.com, hzhang6619@163.com, zhubaocheng814@163.com

收稿日期: 2013-09-03; 接受日期: 2013-11-04; * 通信作者

贵州省科学技术基金 (批准号: 黔科合 J 字 LKZS[2012]11)、高等学校博士学科点专项科研 (博导类) 基金 (批准号: 20120182110020)、博士后科研基金 (批准号: 102060-20730834) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: XDJK2013D022) 资助项目

摘要 常宽凸集是一类广泛应用在机械设计、医学等领域的特殊几何图形. 本文探讨平面中的常宽凸集, 简化证明著名的 Firey-Sallee 定理, 即宽度相等的正 Reuleaux 多边形中 Reuleaux 三角形的面积最小.

关键词 常宽凸集 Firey-Sallee 定理 Blaschke-Lebesgue 定理 Reuleaux 三角形 Reuleaux 多边形

MSC (2010) 主题分类 52A10, 52A22

1 引言

经过相当长的历史时期人们才发现, Reuleaux 三角形的面积是平面上宽度相等的常宽凸集中最小的. Blaschke^[1] 和 Lebesgue^[2,3] 首次独立的给出了证明, 该定理称为 Blaschke-Lebesgue 定理. 其后人们又给出了许多不同的精彩证明^[4-9]. Fujiwara^[10] 利用 Markoff 创立的方法证明了固定周长的常宽凸集中 Reuleaux 三角形的面积最小, 即证明了 Blaschke-Lebesgue 定理; Evans 利用变分的方法给出了 Blaschke-Lebesgue 定理的证明, 这种方法的特点是在其证明过程中直接得到了在刚性形变 (平移和旋转) 下面积极小域的唯一性, 而且还导出了面积积极小域的形状. 以前很多关于 Blaschke-Lebesgue 定理的证明都是在预知极小域的前提下进行的, 如文献 [8]; 文献 [11,12] 推广了 Lebesgue 的方法并依此证明了 Blaschke-Lebesgue 定理; 文献 [13] 结合极小环与平面常宽凸集也证明了该定理.

此外, 文献 [14,15] 分别给出了该定理极简化的证明. 关于 Reuleaux 多边形的面积, Firey^[16] 证明了正 Reuleaux 多边形的等周比 (面积与周长的平方之比) 随着边数的增加而严格增大, 且在边数相同的所有 Reuleaux 多边形中, 正 Reuleaux 多边形的等周比达到最大. 进一步, Firey 还得到了对于任何的整奇数 $n > 3$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 总有一个 n 边的 Reuleaux 多边形, 其等周比与 Reuleaux 三角形的等周比多一个不超过 ε 的量.

Sallee^[17] 通过修改 Reuleaux 多边形构造出新的 Reuleaux 多边形, 首先证明了边数不变时非正 Reuleaux 多边形的等周比达不到最大, 进而由此给出了以上 Firey 定理的新证明. Kupitz 和 Martini^[18] 统一证明了 Blaschke-Lebesgue 定理和 Firey-Sallee 定理^[19,20].

本文极简化地证明了宽度为 b 的正 Reuleaux 多边形中面积最大与最小问题, 即给出了以下关于平面常宽凸集的 Firey-Sallee 定理的一个简化证明.

主要定理 在宽度为 b 的正 Reuleaux 多边形中 Reuleaux 三角形的面积最小.

2 预备知识

设 K 为 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 中点集, 如果任意两点 $x \in K, y \in K$ 时, 连接 x 和 y 的线段 $\overline{xy} \subseteq K$, 则 K 为凸集, 即

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in K, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

凸集 K 的边界记为 ∂K . 设 K 为 Euclid 平面 \mathbb{R}^2 上一凸集, 点 $P \in \partial K$. 若过点 P 的直线 L 使得 K 完全位于由 L 划分 \mathbb{R}^2 所形成的二闭半平面之一当中, 我们就称 L 是凸集 K 过 P 点的支持线, 点 P 称为支持线 L 与凸集 K 的接触点. 过凸集的任一边界点至少有一条支持线^[21].

在平面直角坐标系 xOy 中, 任意一条直线 G 可用原点到它的距离 p 和从 x 正半轴到 G 的法线的夹角 ϕ 来确定. 因此, G 的方程为^[21]

$$G(p, \phi) : x \cos \phi + y \sin \phi - p = 0, \quad 0 \leq p < +\infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (2.1)$$

当直线 G 过原点时 $p = 0$.

设 K 为紧凸集, 自原点 O 引射线 OR (如图 1 所示). 作垂直于 OR 且与 K 相交的任意直线 $G_1(p_1, \phi)$. 紧凸集 K 沿 ϕ 方向的支持函数定义为^[21]

$$p(\phi) = \sup\{p_1 : G_1(p_1, \phi) \cap K \neq \emptyset\}. \quad (2.2)$$

与 (2.2) 中 $p(\phi)$ 相应的直线 $G(p, \phi)$ 称为 K 沿 ϕ 方向的支持线.

设凸集 K 的边界 ∂K 为 C^2 类. 凸集 K 的所有支持线构成单参数直线族, ∂K 可视为此直线族的包络. 据此可导出用支持函数表示的该凸集的周长和面积公式.

设 $p(\phi)$ 为凸集 K 的支持函数, 则 K 的支持线族的方程为

$$x \cos \phi + y \sin \phi - p(\phi) = 0. \quad (2.3)$$

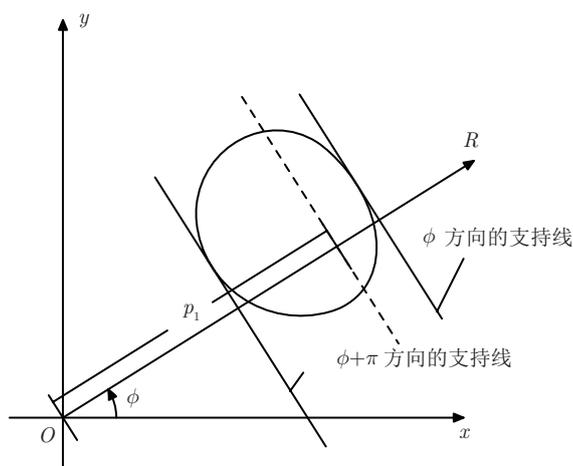


图 1 支持线与支持函数

微分上式得

$$-x \sin \phi + y \cos \phi - p'(\phi) = 0. \quad (2.4)$$

由 (2.3) 和 (2.4) 可得到包络 (即 ∂K) 的参数方程为

$$x = p \cos \phi - p' \sin \phi, \quad y = p \sin \phi + p' \cos \phi. \quad (2.5)$$

上式中 (x, y) 为支持线 $G(p, \phi)$ 与 K 的接触点 P 的坐标. H 的坐标为 $(p \cos \phi, p \sin \phi)$. 并且我们总是约定 Ox 到直线 $G(p, \phi)$ 的角为 $\phi + \frac{\pi}{2}$. 则有向线段 HP 的值为 (如图 2 所示)

$$HP = \sqrt{(x - p \cos \phi)^2 + (y - p \sin \phi)^2} = p'.$$

众所周知, 一条简单闭曲线是凸曲线的充分必要条件是, 在适当的定向下, 曲线的曲率恒为非负. 假定已经选定这样的定向, 那么, 由 (2.5) 有

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = (p + p'')d\phi, \quad \rho = p + p'' > 0, \quad (2.6)$$

其中 $\rho = p + p''$ 为曲率半径; 反之, 若 $p(\phi)$ 为 C^2 类的以 2π 为周期的周期函数, 且 $p + p'' > 0$ ($0 \leq \phi < 2\pi$), 则 $p(\phi)$ 必定为某凸集的支持函数. 综上所述, 我们得到以 2π 为周期的函数 $p(\phi)$ 是一个凸集的支持函数的充要条件是

$$p + p'' > 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

利用 (2.6) 立即可得关于凸集 K 的周长公式

$$L = \int_{\partial K} ds = \int_0^{2\pi} (p + p'') d\phi = \int_0^{2\pi} p d\phi. \quad (2.7)$$

此外, 还可用支持函数表示凸集 K 的面积 A . 为避免出现“负面积”, 我们假设原点 O 选在 K 的内部, 这时 K 的面积元为 $\frac{1}{2}pds$, 故有

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial K} p ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(p + p'') d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\phi.$$

可以证明, 以上凸集 K 的周长、面积和 $p + p'' > 0$ 均与坐标系的平移无关.

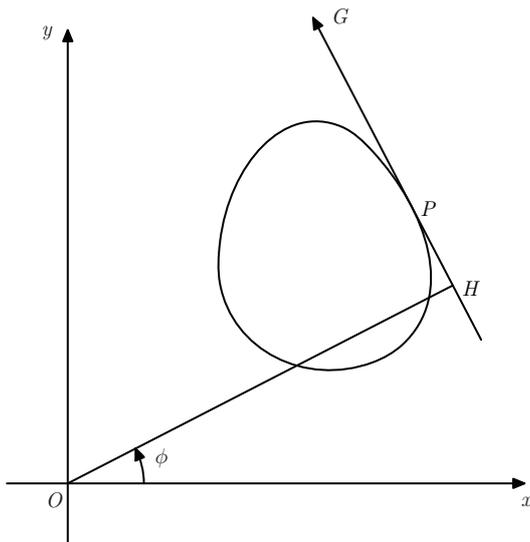


图 2 凸集的包络

3 主要定理的证明

凸集 K 沿 ϕ 方向的宽度函数定义为

$$w(\phi) = p(\phi) + p(\phi + \pi). \quad (3.1)$$

显然, 宽度函数 $w(\phi)$ 刻画了对应于方向 ϕ 和 $\phi + \pi$ 的二平行支持线间的距离. 由 (3.1) 可得

$$w(\phi + \pi) = p(\phi + \pi) + p(\phi + 2\pi) = w(\phi).$$

上式结合 (2.7) 可得用宽度函数表示凸集 K 的周长公式为

$$\int_0^\pi w(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} w(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} p(\phi) d\phi + \int_0^{2\pi} p(\phi + \pi) d\phi \right) = L. \quad (3.2)$$

若 $w(\phi) \equiv b$ (常数), 则称 K 为常宽凸集, 其边界曲线 ∂K 称为常宽曲线. 显然, 圆是常宽凸集, 后来德国工程师 Reuleaux 于 1876 年构造了非圆的常宽凸集, 其构造为分别以等边三角形 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 的顶点 P_1, P_2 和 P_3 为圆心, $P_1 P_2, P_2 P_3$ 和 $P_3 P_1$ 为半径作弧 $\widehat{P_2 P_3}, \widehat{P_3 P_1}$ 和 $\widehat{P_1 P_2}$, 由这三段圆弧围成的凸域是非圆的常宽凸集, 称为 Reuleaux 三角形 (如图 3 所示). 类似地, 可由等边 $2n+1$ ($n \geq 2$) 边形的每个顶点向“对边”作圆弧构造出非圆的常宽凸集, 即 Reuleaux 多边形^[21, 22]. 近来人们利用不同的方法构造出许多新的常宽凸集^[22-25]. 常宽凸集广泛应用在机械工程^[26-31]、医学^[32]、计算机、建筑、化工和地理等方面.

我们考虑正 Reuleaux $(2n+1)$ -边形的面积, 设其为 S_{2n+1} . 如图 4 中, 从正 $(2n+1)$ -边形的 P_i 向“对边” $P_{2i} P_{2i+1}$ 作圆弧 $\widehat{P_{2i} P_{2i+1}}$, 所有顶点所在圆的圆心为 O (如图 5 所示), 则 $\angle P_{2i} O P_{2i+1} = \frac{2\pi}{2n+1}$, $\angle P_{2i} P_i P_{2i+1} = \frac{\pi}{2n+1}$, $\angle P_{2i} P_i O = \angle P_{2i+1} P_i O = \frac{\pi}{2(2n+1)}$, $\overline{P_i P_{2i}} = \overline{P_i P_{2i+1}} = b$. 令扇形 $P_i \widehat{P_{2i} P_{2i+1}}$ 与三角形 $\triangle P_i P_{2i} P_{2i+1}$ 的面积分别为 $S_{P_i \widehat{P_{2i} P_{2i+1}}}$ 和 $S_{\triangle P_i P_{2i} P_{2i+1}}$, 则有

$$S_{P_i \widehat{P_{2i} P_{2i+1}}} = \frac{\pi b^2}{2(2n+1)}, \quad S_{\triangle P_i P_{2i} P_{2i+1}} = \frac{b^2}{2} \sin \frac{\pi}{2n+1}, \quad S_{\triangle O P_{2i} P_{2i+1}} = \frac{b^2}{8 \cos^2 \frac{\pi}{2(2n+1)}} \sin \frac{2\pi}{2n+1}.$$

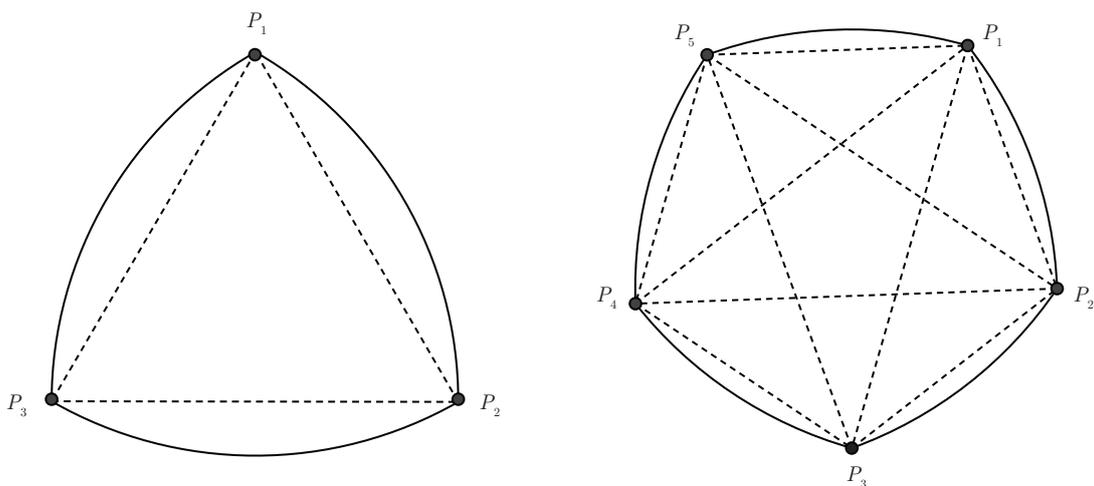


图 3 Reuleaux 三角形和 Reuleaux 五边形

因而有

$$\begin{aligned}
 S_{2n+1} &= (2n+1)(S_{\widehat{P_i P_{2i} P_{2i+1}}} - S_{\triangle P_i P_{2i} P_{2i+1}}) + (2n+1)S_{\triangle O P_{2i} P_{2i+1}} \\
 &= (2n+1)\frac{b^2}{2}\left(\frac{\pi}{2n+1} - \sin\frac{\pi}{2n+1}\right) + (2n+1)\frac{b^2}{8\cos^2\frac{\pi}{2(2n+1)}}\sin\frac{2\pi}{2n+1} \\
 &= \frac{b^2}{2}\pi - \frac{b^2}{2}(2n+1)\frac{\sin\frac{\pi}{2n+1}}{1+\cos\frac{\pi}{2n+1}} \\
 &= \frac{b^2}{2}\pi\left(1 - \frac{\sin\frac{\pi}{2n+1}}{\frac{\pi}{2n+1}(1+\cos\frac{\pi}{2n+1})}\right).
 \end{aligned}$$

我们先证明 S_{2n+1} 为单调递增序列. 设

$$S(x) = \frac{b^2}{2}\pi\left(1 - \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}(1+\cos\frac{\pi}{x})}\right),$$

上式对 x 求导可得

$$\frac{dS}{dx} = \frac{b^2}{2x^2}\pi^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{x}\right)\left(\frac{\pi}{x} - \sin\frac{\pi}{x}\right). \tag{3.3}$$

当 $x \geq 2$ 时, (3.3) 表明

$$S(x) = \frac{b^2}{2}\pi\left(1 - \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}(1+\cos\frac{\pi}{x})}\right)$$

单调递增. 故有

$$S_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \frac{\pi}{4}b^2, \quad S_{\min} = S_3 = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}b^2.$$

即主要定理得证. □

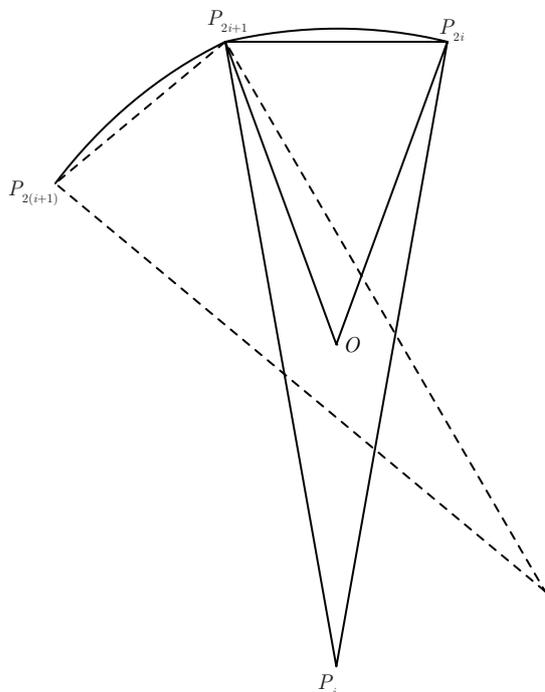


图 4 正 Reuleaux $(2n+1)$ -边形的构造

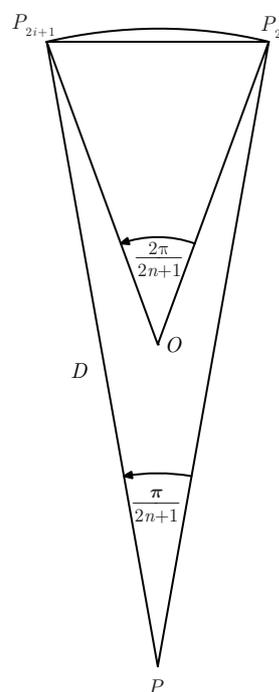


图 5 正 Reuleaux $(2n+1)$ -边形的面积计算

注 1 由 (3.2) 可知, 正 Reuleaux 多边形的周长为 πb , 因此, 随着 n 的增大 $\frac{S_{2n+1}}{(\pi b)^2}$ 严格递增, 即我们证明了 Firey 定理: 正 Reuleaux 多边形的等周比 (面积与周长的平方之比) 随着边数的增加而严格增大.

注 2 平面中的 Blaschke-Lebesgue 定理在高维的推广为 \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) 中宽度相等的常宽凸集中, 哪一个 (或哪一类) 常宽凸集的体积最小? 到目前为止该问题仍未解决. 但在 $n = 3$ 时, Bonnesen 和 Fenchel 猜测 Meissner 体是 \mathbb{R}^3 中宽度相等的常宽凸集中体积最小的^[4,5].

致谢 本文是在周家足教授的关心和指导下完成的, 作者非常感谢他在本文的研究与成文阶段提出的诸多指导意见. 对匿名审稿人提出的宝贵意见和建议深表感谢.

参考文献

- 1 Blaschke W. Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts. *Math Ann*, 1915, 76: 504–513
- 2 Lebesgue H. Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante. *Bull Soc Math*, 1914, 7: 72–76
- 3 Lebesgue H. Sur quelques questions des minimums, relatives aux courbes orbiformes, et sur les rapports avec le calcul de variations. *J Math Pures Appl* (9), 1921, 4: 67–96
- 4 Bonnesen T, Fenchel W. *Theorie der Konvexen Körper*. Berlin: Springer, 1934
- 5 Campi S, Colesanti A, Gronchi P. Minimum problems for volumes of constant bodies. In: Marcellini P, Talenti G, Visintin E, eds. *Partial Differential Equations Applications*. New York: Marcel-Dekker, 1996, 43–55
- 6 Chakerian G, Groemer H. Convex bodies of constant width. In: Gruber P, Wills J, eds. *Convexity and its Applications*, Basel: Birkhäuser, 1983: 49–96
- 7 Ghandehari M. An optimal control formulation of the Blaschke's-Lebesgue theorem. *J Math Anal Appl*, 1996, 200: 322–331
- 8 Harrell E. A direct proof of a theorem of Blaschke and Lebesgue. *J Geom Anal*, 2002, 12: 81–88
- 9 Yaglom I, Boltyansky V. *Convex Figures*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1961
- 10 Fujiwara M. Analytical proof of Blaschke's theorem on the curve of constant breadth with minimum area I and II. *Proc Imp Acad Japan*, 1927, 3: 307–309; 1931, 7: 300–302
- 11 Beretta L, Maxia A. Insiemi convessi e orbiformi. *Univ Roma e Ist Naz Alta Mat Rend Mat*, 1940, 1: 1–64
- 12 Blatter C. Über Kurven konstanter Breite. *Elem Math*, 1981, 36: 105–115
- 13 Mayer A. Der Inhalt der Gleichdicke. *Math Ann*, 1935, 110: 97–127
- 14 Besicovich A. Minimum area of a set of constant width. *Proc Sympos Pure Math*, 1963, 7: 13–14
- 15 Chakerian G. Sets of constant width. *Pacific J Math*, 1966, 19: 13–21
- 16 Firey W. Isoperimetric ratios of Reuleaux polygons. *Pacific J Math*, 1960, 10: 823–829
- 17 Sallee G. Maximal areas of Reuleaux polygons. *Canad Math Bull*, 1970, 13: 175–179
- 18 Kupitz Y, Martini H. On the isoperimetric inequalities for Reuleaux polygons. *J Geom*, 2000, 68: 171–191
- 19 Eggleston H. *Convexity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1958
- 20 Eggleston H. A proof of Blaschke's theorem on the Reuleaux triangle. *Quart J Math*, 1952, 3: 296–297
- 21 任德麟. 积分几何引论. 上海: 上海科学技术出版社, 1988
- 22 徐文学, 周家足, 陈方维. 一类常宽“等腰梯形”. *中国科学: 数学*, 2011, 41: 855–860
- 23 潘生亮. 切线极坐标的一个应用. *华东师范大学学报 (自然科学版)*, 2003, 1: 13–16
- 24 Lachand-Robert T, Qudet E. Bodies of constant width in arbitrary dimensional. *Math Nachr*, 2007, 280: 740–750
- 25 Martini H, Mustafaev Z. A new construction of curves of constant width. *Comput Aided Geom Design*, 2008, 25: 751–755
- 26 Molian S. Storage and retrieval of descriptions of mechanisms and mechanical devices according to kinematic type. *J Mech*, 1969, 4: 311–323
- 27 Moon Y, Kota S. Automated synthesis of mechanisms using dual-vector algebra. *Mech Mach Theory*, 2002, 37: 143–166
- 28 Nollexa H. Linkage coupler curve synthesis: A historical review-II. Developments after 1875. *Mech Mach Theory*, 1974, 9: 325–348
- 29 Nollexa H. Linkage coupler curve synthesis: A historical review-III. Spatial synthesis and optimization. *Mech Mach Theory*, 1975, 10: 41–45
- 30 Peralta B. Drehung von gleichdicken in quadratischen bohrungen Erzeugung von speziellen punktführungen. *Mech Mach Theory*, 1982, 17: 349–354

- 31 Ziada Y, Koshy P. Rotating curvilinear tools for EDM of polygonal shapes with Sharp corners. *CIRP Ann Manuf Technol*, 2007, 56: 221–224
- 32 Siders W, Rue M. Reuleaux triangle somatocharts. *Comput Biol Med*, 1992, 22: 363–368

On the Firey-Sallee theorem of planar set of constant width

HE Gang, XU WenXue, ZHANG Hong & ZHU BaoCheng

Abstract The convex sets of constant width are special geometric figures, which are widely used in machine design, medicine and so on. In this note, we investigate convex sets of constant width in the Euclidean plane, and we give an elementary proof of the known Firey-Sallee Theorem, that is, the area of Reuleaux triangle is minimum among all sets of constant width.

Keywords convex set of constant width, Firey-Sallee theorem, Blaschke-Lebesgue theorem, Reuleaux triangle, Reuleaux polygon

MSC(2010) 52A10, 52A22

doi: 10.1360/N012013-00125