本征值问题的有限元方法的加速

林　群　　　谢干权

（中国科学院系统科学研究所）（湖南省计算中心）

算子本征值问题的有限元离散必然导致大型矩阵的广义特征值问题．这种问题很难计算．因此，研究这方面的加速算法很有理论与实际意义．

目前，在矩阵特征值计算方面已有了较多的研究．而本文是从算子本征值问题的离散过程来研究的．在冯康教授的启示下，把文献 [1] 中关于非线性方程加速收敛的思想*推广到算子本征值问题，提出了关于算子本征值问题的一种加速计算方法．

一、方法的叙述

1. 考虑算子本征值问题

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & (\text{在}\ \Omega\ \text{内}) \\ u|\partial\Omega = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中，L 是自共轭正定算子．Ω 是以分段光滑的边界 $\partial\Omega$ 所界定的有界开域．其本征值为 λ_i，$i = 1, 2, \cdots$，对应于 λ_i 的线性无关的本征向量 u_i 并规定 $\|u_i\|_0 = 1$．

2. 一次有限元本征方程

对区域 Ω 进行有限元剖分，构造一次有限元空间 $S_1^h \subset H^1$，在 S_1^h 上建立有限元本征方程：

$$\begin{cases} (Lu_1^h,\ v_1^h) = \lambda_1^h(u_1^h,\ v_1^h),\ \exists u_1^h \in S_1^h,\ \forall v_1^h \in S_1^h, \\ u_1^h|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{2}$$

求解方程 (2) 得到 $u_{1,i}^h$，$\lambda_{1,i}^h (i = 1, 2, \cdots, n)$，前一脚标表示一次元的结果．后一脚标表示第 i 个本征向量与本征值．我们规定

$$(u_{1,i}^h, u_{1,k}^h) = \delta_{ik}. \tag{3}$$

3. 加速逼近

i) 把空间 S_1^h 的各网格线的中点加上，构成一个二次有限元空间 S_2^h，使 $S_1^h \subset S_2^h \subset H^1$．对应于 $\lambda_{1,i}^h$ 和 $u_{1,i}^h$ 建立 $(i = 1, 2, \cdots, n)$．

$$\begin{cases} (Lu_{2,i}^h,\ v_2^h) = \lambda_{1,i}^h(u_{1,i}^h,\ v_2^h), \\ u_{2,i}^h|_\Gamma = 0,\ \exists u_{2,i}^h \in S_2^h,\ \ \forall v_2^h \in S_2^h. \end{cases} \tag{4}$$

求解线代数有限元方程 (4) 便得到 u_i 的加速逼近解．

ii) 对于 $k = 1, 2, \cdots, i-1$，若 $\|u_{2,k}^h\| = 1$，我们用 $u_{2,i}^h - \sum\limits_{k=1}^{i-1} (u_{2,i}^h,\ u_{2,k}^h)\ u_{2,k}^h$ 代替 $u_{2,i}^h$，则 $\|u_{2,i}^h\| = 1$．数值结果说明规格化后有更高的精度．

本文 1980 年 8 月 1 日收到．

* 这一思想还应追朔到 Strang 关于自由项插值的研究[2]．

iii)
$$\lambda_{2,i}^{h}=\frac{(Lu_{2,i}^{h},u_{2,i}^{h})}{(u_{2,i}^{h},\ u_{2,i}^{h})}\tag{5}$$

得到 λ_i 的加速逼近解.

二、方法的推广

i) 用通常的二次或三次非协调元把四阶算子本征值问题离散，并求出通常的有限元解 λ_i^h, u_i^h.

ii) 把 S^h 的网格线分为 2^r 等分 (r 为正整数)，以 $h/2^r$ 为步长构成有限元空间 $S^{h/2^r}$，使 $S^h\subset S^{h/2^r}\subset H^1$. 对应于 λ_i^h, u_i^h 在 $S^{h/2^r}$ 上建立有限元方程:

$$\begin{cases}(Lu_i^{h/2^r},\ v^{h/2^r})=\lambda_i^h(u_i^h,v_i^{h/2^r}),\\ u_i^{h/2^r}|_\Gamma=0,\ \exists u^{h/2^r}\in S^{h/2^r},\ \forall v^{h/2^r}\in S^{h/2^r}.\end{cases}\tag{6}$$

求解线代数有限元方程 (6) 便得方程 (1) 的解 u_i 的加速逼近.

iii)
$$\lambda_i^{h/2^r}=\frac{(Lu_i^{h/2^r},u_i^{h/2^r})}{(u_i^{h/2^r},u_i^{h/2^r})}\tag{7}$$

是 (1) 的解 λ_i 的加速逼近. r 选取使 $h/2^r\approx h^2$. 也可令 $r=1$. 对于处理四阶板壳算子方程的混合法与杂交法，本文的方法可作各种相应的推广.

三、方法的理论基础

首先叙述 Strang-Fix 的基本结果[2].

定理 1 若 L 是二阶自共轭正定椭圆算子，而 $S_1^h\subset H^1$ 是一次有限元空间. 则存在常数 δ，对于充分小的 $h<1$，方程 (1) 的本征值 λ_i 的逼近解 $\lambda_{1,i}^h$ 满足

$$\lambda_i\leqslant\lambda_{1,i}^h\leqslant\lambda_i+2\delta h^2\lambda_i,\tag{8}$$

且方程 (1) 的对应的本征向量的一次元逼近解 $u_{1,i}^h$ 满足

$$\begin{aligned}&\|u_i-u_{1,i}^h\|_1\leqslant C_1h,\\&\|u_i-u_{1,i}^h\|_0\leqslant C_2h^2\lambda_i,\end{aligned}\tag{9}$$

其中 $\lambda_{1,i}^h$, $u_{1,i}^h$ 分别为 (2) 的第 i 个本征值和本征向量.

下面是加速方法的理论结果:

定理 2 若 L 是二阶自共轭正定椭圆算子. λ_i 及 u_i 是方程 (1) 的第 i 个本征值及相应的本征向量. $\lambda_{1,i}^h$, $u_{1,i}^h$ 是 (2) 的第 i 个本征值及相应的本征向量. 则方程

$$\begin{cases}L\hat{u}_i=\lambda_{1,i}^hu_{1,i}^h & (\text{在}\ \Omega\ \text{内})\\ \hat{u}_i|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{10}$$

的解 $\hat{u}_i$ 便是 u_i 的加速逼近且有下列估计:

$$\|u_i-\hat{u}_i\|_1=0(h^2).\tag{11}$$

证
$$L(u_i-\hat{u}_i)=\lambda_iu_i-\lambda_{1,i}^hu_{1,i}^h.$$

于是 $\|u_i-\hat{u}_i\|_1\leqslant C\|\lambda_iu_i-\lambda_{1,i}^hu_{1,i}^h\|_0$

$$\leqslant C(\|u_i\|_0|\lambda_i-\lambda_{1,i}^h|+|\lambda_{1,i}^h|\|u_i-u_{1,i}^h\|_0)\leqslant Ch^2.$$

定理 2 证毕.

定理 3*　在定理 2 的条件下，若作

$$\hat{\lambda}_i = \frac{(L\hat{u}_i, \hat{u}_i)}{(\hat{u}_i, \hat{u}_i)}, \tag{12}$$

则有

$$\lambda_i \leqslant \hat{\lambda}_i \leqslant \lambda_i + Ch^4. \tag{13}$$

证　由 (11) 式可证

$$\left\| u_i - \frac{\hat{u}_i}{\|\hat{u}_i\|_0} \right\|_1 = o(h^2), \tag{14}$$

于是可认为有 $\|\hat{u}_i\|_0 = 1$.

从 (11) 式

$$(L(\hat{u}_i - u_i), \hat{u}_i - u_i) = o(h^4), \tag{15}$$

上式左边为:

$$\begin{aligned} &(L\hat{u}_i, \hat{u}_i) - 2(Lu_i, \hat{u}_i) + (Lu_i, u_i) \\ &\geqslant \hat{\lambda}_i - 2\lambda_i \sqrt{(u_i, u_i)}\sqrt{(\hat{u}_i, \hat{u}_i)} + \lambda_i \\ &= \hat{\lambda}_i - \lambda_i \geqslant 0, \end{aligned}$$

故得 (13) 式，定理 3 证毕.

推论 1　若用二次有限元解方程 (10)，则有

$$\|u_i - u_{2,i}^h\|_1 = o(h^4). \tag{16}$$

将 $u_{2,i}^h$ 标准化后，(16) 式仍成立：在证明中用到 $\hat{u}_i \in H^3$.

推论 2　若令

$$\lambda_{2,i}^h = \frac{(Lu_{2,i}^h, u_{2,i}^h)}{(u_{2,i}^h, u_{2,i}^h)}, \tag{17}$$

则仍有

$$|\lambda_i - \lambda_{2,i}^h| = o(h^4) \tag{18}$$

推论 3　若用推广了的方法 (6) 和 (7) 式，则有

$$\|u_i - u_i^{h/2^r}\|_1 = O(h/2^r), \tag{19}$$

$$|\lambda_i - \lambda_i^{h/2^r}| = O(h^2/2^{2r}). \tag{20}$$

对于 $2m$ 阶 ($m \geqslant 1$) 自共轭椭圆算子本征值问题，估计式在相应模 $\|\cdot\|_m$ 下成立. 以上分析与方法对于先用二次元离散 (1) 式再用高次元加速也相应地成立.

四、数 值 结 果

我们用这一方法计算了薄板振动及弹性振动问题得到满意的结果. 下面列举周边固定的单位方板上的薄膜振动的数值结果.

本征值 λ:

普通一次元的结果　　$\lambda_1^h = 22.865$,

本方法加速逼近结果　　$\lambda_2^h = 19.817$,

---

* Chatelin 也建立了类似的结果[3].

精确解　　$\lambda = 19.739$.

	*	*	*
本征向量及导数	u	u_x	u_y
普通一次元的结果	2.209	1.6695	1.9780
加速逼近的结果	2.019	1.4525	2.9814
精确值	2	1.4083	3.0345

上述计算采用 $h = \frac{1}{4}$的三角形网格．求解方程(2)用机时间为 18 分，加速解(4)和(5)式仅用机时间为 4 分．

大量计算表明，加速方法所需的时间及存储量是原方法的 1/7—1/10．而精度却提高一个数量级(见估计式(11)和(13))，用此方法编制程序简便．易于推广．

本文是林群在“IRIA”国际工程计算方法会议上报告结果之一．我们要感谢刘嘉荃同志的讨论，澄清了若干问题．

参　考　文　献

[1] 林群，数学学报，22(1979)，2：219—230．
[2] strang, G., Fix, G., *An Analysis of Finite Element Method*, Prentice-Hall Inc., Englewood cliffs, N. J., 1973.
[3] Chatelin, F., *Linear Spectral Approximation in Banach Spaces*, to appear, 1981.