论文

赤道平面 J_2 束缚轨道研究王伟^{①②*}, 袁建平^{①②}, 罗建军^{①②}, 曹静^{①②}

① 西北工业大学航天学院, 西安 710072;

② 航天飞行动力学技术重点实验室, 西安 710072

*联系人, E-mail: 418362467@qq.com

收稿日期: 2012-09-09; 接受日期: 2012-10-25; 网络出版日期: 2013-02-20

国家自然科学基金(批准号: 11072194)和航天飞行动力学技术重点实验室开放基金(编号: 2012afdl021)资助项目

摘要 对近地航天器有显著影响的 J_2 项摄动势函数是轴对称的. 而当航天器的轨道倾角为零时, J_2 项势函数由轴对称退化为球对称. 本文从能量的角度来研究近地航天器 J_2 束缚轨道特性. 通过引入“势能井”的概念, 证明了 J_2 项势函数作用下, 赤道平面内存在两类束缚轨道: 环形束缚轨道与圆形封闭轨道. 根据总能量与有效势的关系, 分析了形成这两类 J_2 束缚轨道的条件. 利用球对称势的周期性理论, 借助椭圆积分推导了环形 J_2 轨道径向周期、周向周期和向径的表达式, 以及圆形 J_2 轨道的周期和角速度. 分析了圆形封闭轨道的稳定性, 以及受到小扰动后向径的演化规律. 最后探讨了这两类 J_2 束缚轨道潜在的应用.

关键词 球对称势, 赤道平面, J_2 项摄动, 束缚轨道, 周期轨道, 椭圆积分

PACS: 07.87.+v, 95.40.+s, 95.55.Pe

doi: 10.1360/132012-779

随着空间操作逐渐多样化和复杂化, 空间监测与长期绕飞等技术逐渐成为近年来研究的热点, 而难点之一便是在复杂的空间环境中进行轨道保持. 近地空间中的航天器受到复杂的摄动力影响, 如 J_2 项摄动、三体引力摄动和大气阻力摄动等, 而对航天器影响最显著, 占主导作用的则是 J_2 项摄动. 对于长时间在轨运行的卫星, 传统的思路是利用航天器自身携带的燃料进行主动控制以抵消 J_2 项摄动, 这样需要消耗大量推进剂, 对于许多航天任务来说是不可接受的. 因此, 要考虑充分利用 J_2 项摄动来进行轨道设计.

在天体力学中, J_2 项摄动问题和三体问题被认为是最具有研究价值的两大难题^[1]. 对于轨道保持任务来说, 束缚轨道(包括周期封闭轨道和准周期束缚轨道)更具有实用价值. 所以, 几十年来许多天体力学者对 J_2 项摄动影响下的束缚轨道(J_2 束缚轨道)问题开展了大量的研究工作. Stellmacher^[2]证明了 J_2 项摄动影响下存在周期轨道, 但并没有给出简单的设计方法. Broucke^[1]借助 Poincaré 截面来寻找 J_2 周期(准周期)轨道. Koon 等人^[3]基于简约 J_2 动力学的 Routhian 形式寻找周期轨道初始条件, 并尝试进行编队卫星轨道设计. Jezewski^[4]借助椭圆函数给出了赤道平

引用格式: 王伟, 袁建平, 罗建军, 等. 赤道平面 J_2 束缚轨道研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 309–317

Wang W, Yuan J P, Luo J J, et al. Anatomy of J_2 bounded orbits in equatorial plane (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2013, 43: 309–317, doi: 10.1360/132012-779

面内运动的解析解, 但形式复杂, 不利于周期轨道设计. Wilkins 等人^[5]利用牛顿搜索算法得到了关于赤道平面和子午面对称的 J_2 束缚轨道. Humi 等人^[6]研究了赤道平面、近赤道面轨道和极轨道的 J_2 绝对、相对动力学, 并证明了赤道面内存在 J_2 圆轨道. Martinusi 等人^[7]探讨了赤道平面内环形 J_2 轨道的一些性质, 并利用环形轨道径向周期与周向周期分别匹配的原理, 给出了一种准周期相对轨道的设计思路, 但需要将椭圆积分展开成级数形式来求解, 所以是一种半解析方法.

不难看出, 因为 J_2 绝对轨道与 J_2 相对轨道之间存在着必然的联系, 所以学者们对 J_2 绝对轨道与 J_2 相对轨道的研究经常是同时进行的. 对单个航天器的 J_2 轨道的深入剖析, 往往会为 J_2 相对轨道的研究提供启发式的帮助. Sabatini 等人^[8]的研究成果就很好地说明了这一点. 在他采用遗传算法搜索 J_2 投影圆相对轨道最小漂移条件时, 得到了 4 个特殊倾角, 其中两个与单个航天器 J_2 冻结轨道下的特殊倾角完全一致. 随后, Vadali 等人^[9]利用单位球坐标系, 根据轨道平面内外振动频率匹配原理, 解析地给出了这些特殊倾角的表达式.

本文针对赤道平面内存在的两类 J_2 束缚轨道展开深入研究. 首先由天体力学中球对称势下的周期性理论^[10], 给出一般束缚轨道周期的确定方法, 然后借鉴 Prussing 等人^[11]提出的“势能井”概念, 证明了赤道平面内存在两类 J_2 束缚轨道, 探讨了他们的形成条件. 随后, 推导出环形 J_2 轨道径向周期、周向周期以及向径的表达式和圆形 J_2 轨道的周期、角速度表达式, 并通过小扰动线性化方法分析了圆形 J_2 轨道的稳定性.

1 一般球对称势下的束缚轨道

所谓球对称势, 是指球状系统产生的势场, 可以表示为关于向径 r 的一维函数. 为了研究赤道平面内球对称 J_2 项势函数作用下的束缚轨道, 有必要先给出一般球对称势中束缚轨道的性质. 由牛顿定律, 有

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(r), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{F}(r) = -\frac{d\Phi(r)}{dr}$ 为航天器所受到的径向力, $\Phi(r)$ 为引力势. 用 $\mathbf{r}$ 叉乘上式, 有

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(r) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

所以 $\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 为一常向量, 设为 $\mathbf{h}$, 即

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (3)$$

$\mathbf{h}$ 为单位质量的动量矩. 应用平面极坐标 (r, θ) , 则

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = F(r), \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

第二个式子乘以 r , 然后积分得到 $r^2\dot{\theta} = h$.

对于非束缚轨道, 有 $r \rightarrow +\infty$, 而在束缚轨道上, r 会在有限值之间振荡, 如“环形束缚轨道”; 或者为一定值, 如圆形封闭轨道. 因此, 每条束缚轨道对应于一个周期解.

航天器的总能量为

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}(r\dot{\theta})^2 + \Phi(r), \quad (5)$$

如果航天器在保守力场中运动, 则总能量守恒, 为一常量.

定义径向能量为

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}\dot{r}^2, \quad (6)$$

则有效势为总能量 ε 和径向能量 ε_r 之间的差值, 即

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(r\dot{\theta})^2 + \Phi(r) = \frac{h^2}{2r^2} + \Phi(r), \quad (7)$$

对束缚轨道来说, 令 $\varepsilon_r = 0$ 一般可以得到两个正根 $r_{\min}$ 和 $r_{\max}$, 使得航天器随 θ 变化绕中心转动, 同时沿径向在 $r_{\min}$ 和 $r_{\max}$ 之间作振荡. 称 $r_{\min}$ 为近心距, $r_{\max}$ 为远心距, 如图 1 所示.

定义径向周期 T_r 为航天器从远心点运动到近心点再回到远心点所需要的时间. 为了确定 T_r , 利用总能量方程(5)来消去 $\dot{\theta}$, 这样便得到

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2(\varepsilon - V_{\text{eff}})}. \quad (8)$$

因为航天器可以交替地向内或向外运动, 所以可以出现两个符号. 也就是说在 $r_{\min}$ 和 $r_{\max}$ 处, 有 $\dot{r} = 0$. 所以, 径向周期为

$$T_r = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\dot{r}} = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{\sqrt{2(\varepsilon - V_{\text{eff}})}} dr. \quad (9)$$

当航天器从近心点运动到远心点再回到近心点时, 周向角 θ 的增量为

图 1 束缚轨道
Figure 1 Bounded orbits.

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{d\theta}{dr} dr = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{h}{r^2} \frac{1}{\dot{r}} dr, \quad (10)$$

将式(8)中 $\dot{r}$ 代入式(10), 有

$$\Delta\theta = 2h \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r^2 \sqrt{2(\varepsilon - V_{\text{eff}})}} dr. \quad (11)$$

定义周向周期为

$$T_{\theta} = \frac{2\pi}{\Delta\theta} T_r, \quad (12)$$

则航天器的角速度为 $2\pi/T_{\theta}$. 当 $2\pi/\Delta\theta$ 为无理数时, 轨道不闭合, 一条典型的轨道类似于一环带, 最后会通过半径为 $r_{\min}$ 和 $r_{\max}$ 两个圆之间环带中的每一点, 称为环形轨道. 当 $2\pi/\Delta\theta$ 为有理数时, 轨道具有严格周期性.

特别地, 当 $r_{\min}=r_{\max}$ 时, 上述所求得的径向周期与周向周期相同, 轨道形状为一严格闭合的圆.

2 赤道平面内两类 J_2 束缚轨道

当航天器的轨道倾角为零时, J_2 项势函数由轴对称退化为球对称. 故可借鉴球对称势的相关理论来研究赤道平面内的 J_2 束缚轨道. 当考虑 J_2 项摄动影响时, 赤道平面内航天器所受到的引力势为

$$\Phi(r) = -\frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \right], \quad (13)$$

其中 R_e 为地球赤道半径, μ 为引力常数. 由式(8), 令 $\dot{r}=0$, 可以得到一个关于 r 的一元三次方程

$$r^3 + \frac{\mu}{\varepsilon} r^2 - \frac{h^2}{2\varepsilon} r + \frac{\mu J_2 R_e^2}{2\varepsilon} = 0, \quad (14)$$

则轨道演化规律取决于此一元三次方程根的判别式

$$\Delta = \left(\frac{-\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1^3 + \sigma_3}{6} + \frac{\sigma_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{3} - \frac{\sigma_2^2}{9} \right)^3, \quad (15)$$

其中

$$\sigma_1 = -\frac{\mu}{\varepsilon} > 0, \quad \sigma_2 = -\frac{h^2}{2\varepsilon} > 0, \quad \sigma_3 = -\frac{\mu J_2 R_e^2}{2\varepsilon} > 0.$$

3 个根的具体表达式为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sigma_1}{3} + \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, \\ x_2 = \frac{\sigma_1}{3} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{A} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{B}, \\ x_3 = \frac{\sigma_1}{3} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{A} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{B}. \end{cases} \quad (16)$$

式中,

$$A = \frac{-\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1^3 + \sigma_3}{6} + \sqrt{\Delta}, \quad B = \frac{-\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1^3 + \sigma_3}{6} - \sqrt{\Delta}.$$

下面结合庞加莱截面和“势能井”的概念, 探讨两类 J_2 束缚轨道的形成条件以及各自的性质.

由轨道动量矩矢量和能量的守恒特性可知, 轨道被限制在一固定平面内, 所以可以选择平面直角坐标来描述. 选择以下初始条件:

$$x_0, y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0,$$

并且每当航天器穿过 $y=0$ 并沿 $\dot{y}>0$ 的方向时记录 $(x, \dot{x})$, 则可以得到一维庞加莱截面. 每个点 $(x, \dot{x})$ 对应于 $y=0$ 和 $\dot{y}>0$.

图 2 描绘了角动量 $h'=1.1205235$ 时的庞加莱截面, 积分时间上限为 $t'=20000$. 为方便计算, 各个变量均做归一化处理: $r'=r/R_e$, $t'=t/\sqrt{R_e^3/\mu}$, $h'=h/\sqrt{R_e \mu}$, $\varepsilon'=\varepsilon/\sqrt{R_e/\mu}$. $(\cdot)'$ 代表归一化后变量. 其中, 固定点代表相空间 $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ 中的周期轨道, 在极坐标系中为圆形 J_2 轨道; 称固定点周围的鹅卵型闭合曲线为其中心流形, 表示环形 J_2 轨道.

图 3 给出了“势能井”图. 实线和虚线分别代表有效势、总能量随向径的变化. r'_0 对应于图 2 中的固定点, $r'_{\min}$ 和 $r'_{\max}$ 分别对应于中心流形上 $\dot{x}=0$ 的点. 在第 2.1 节和第 2.2 节中具体分析两类 J_2 束缚轨道的形成条件和各自的性质.

图2 庞加莱截面
Figure 2 Poincaré section.

图3 势能井
Figure 3 Potential energy well.

2.1 环形 J_2 轨道的形成条件及性质

当 $\varepsilon' = \varepsilon'_1 > \varepsilon'_2$ 时, 有效势 V'_{eff} 与总能量 ε'_1 在 $r > R_e$ 时有两个交点, 对应于 $r'_{\min}$ 和 $r'_{\max}$ (第三个交点在 $r < R_e$ 处, 图中未标出). 在 $r'_{\min}$ 处, $\partial V'_{\text{eff}} / \partial r' < 0$, 表示航天器所受径向引力使得向径增大, 同理, 在 $r'_{\max}$ 处, $\partial V'_{\text{eff}} / \partial r' > 0$, 表示航天器所受径向引力使得向径减小. 航天器会被限制在“势能井”之中, 做周期性振动. 接下来会给出径向周期、周向周期以及向径的表达式. 当根的判别式满足 $\Delta < 0$ 时, 则会得到 3 个正的不等实根, 记为 r_* , $r_{\min}$, $r_{\max}$. 假设这三个根满足 $r_* < r_{\min} < r_{\max}$, 则

$$\begin{cases} \sigma_1 = r_* + r_{\min} + r_{\max}, \\ \sigma_2 = r_* r_{\min} + r_* r_{\max} + r_{\min} r_{\max}, \\ \sigma_3 = r_* r_{\min} r_{\max}. \end{cases} \quad (17)$$

由式(9)不难得到, 径向周期

$$T_r = \frac{2}{\sqrt{-2\varepsilon}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_*}{r}\right) \left(1 - \frac{r_{\min}}{r}\right) \left(\frac{r_{\max}}{r} - 1\right)}} dr. \quad (18)$$

为了将上式转换为标准椭圆积分, 做变换

$$s = \frac{1}{r}, \quad \ell_1 = \frac{1}{r_*}, \quad \ell_2 = \frac{1}{r_{\min}}, \quad \ell_3 = \frac{1}{r_{\max}},$$

所以 $\ell_3 < \ell_2 < \ell_1$, 则

$$T_r = \sqrt{\frac{2\ell_1\ell_2\ell_3}{-\varepsilon}} \int_{\ell_3}^{\ell_2} \frac{1}{s^2 \sqrt{(\ell_1 - s)(\ell_2 - s)(s - \ell_3)}} ds. \quad (19)$$

令 $P(s) = (\ell_1 - s)(\ell_2 - s)(s - \ell_3)$, 通过变换可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\ell_3}^{\ell_2} \frac{1}{s^2 \sqrt{P(s)}} ds &= \frac{-1}{2\ell_1\ell_2\ell_3} \\ &\times \left[\int_{\ell_3}^{\ell_2} \frac{s}{\sqrt{P(s)}} ds - (\ell_1\ell_2 + \ell_1\ell_3 + \ell_2\ell_3) \int_{\ell_3}^{\ell_2} \frac{1}{s \sqrt{P(s)}} ds \right], \quad (20) \end{aligned}$$

等式右边括号内的第一个椭圆积分

$$\begin{aligned} \int_{\ell_3}^{\ell_2} \frac{s}{\sqrt{P(s)}} ds &= \frac{2\ell_3}{\sqrt{\ell_1 - \ell_3}} \frac{1}{k^2} \left[(k^2 - \alpha^2) F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \alpha^2 E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right], \quad (21) \end{aligned}$$

等式右边括号内的第二个椭圆积分

$$\int_{\ell_3}^{\ell_2} \frac{1}{s \sqrt{P(s)}} ds = \frac{2}{\ell_3 \sqrt{\ell_1 - \ell_3}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \alpha^2, k\right), \quad (22)$$

以上两式中, $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \alpha^2, k\right)$ 分别代表第一类、第二类和第三类椭圆积分

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta, \quad k = \sqrt{\frac{\ell_2 - \ell_3}{\ell_1 - \ell_3}},$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\ell_3 - \ell_2}{\ell_3}},$$

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \alpha^2, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta.$$

联立式(18)–(22)并化简, 可以得到径向周期的表达式

$$T_r = \sqrt{\frac{2}{-\varepsilon}} \left[\lambda_1 F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \lambda_2 E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \lambda_3 \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \alpha^2, k\right) \right]. \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \lambda_1 &= -\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2 \ell_3 (\ell_1 - \ell_3)}} = -r_{\max} \sqrt{\frac{r_{\min}}{r_{\max} - r_*}}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{\ell_1 - \ell_3}{\ell_1 \ell_2 \ell_3}} = \sqrt{r_{\min} (r_{\max} - r_*)}, \\ \lambda_3 &= \frac{\ell_1 \ell_2 + \ell_1 \ell_3 + \ell_2 \ell_3}{\ell_3 \sqrt{\ell_1 \ell_2 \ell_3 (\ell_1 - \ell_3)}} = \frac{r_{\max} (r_{\max} + r_{\min} + r_*)}{\sqrt{r_{\min} (r_{\max} - r_*)}}. \end{aligned}$$

航天器完成一次径向振动后, 周向角 θ 的增量

$$\Delta\theta = \frac{2h}{\sqrt{-2\varepsilon}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{\sqrt{r(r-r_*)(r-r_{\min})(r_{\max}-r)}} dr. \quad (24)$$

做同样的变换, 经化简得到

$$\Delta\theta = \frac{2}{\lambda_2} \sqrt{\frac{2}{-\varepsilon}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right). \quad (25)$$

所以, 由式(12)和(23)可以解得周向周期

$$T_\theta = \frac{\pi \lambda_2 \left[\lambda_1 F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \lambda_2 E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \lambda_3 \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \alpha^2, k\right) \right]}{h F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)}. \quad (26)$$

求得航天器环形轨道的径向周期与周向周期以后, 不难得到向径 r 与极角 θ 的关系. 假设航天器从近心距运动到向径为 r 时所对应的极角为 θ , 则

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{r_{\min}}^r \frac{h}{r^2 \sqrt{2[\varepsilon - \Phi(r)] - h^2/r^2}} dr \\ &= \frac{h}{\sqrt{-2\varepsilon}} \sqrt{\ell_1 \ell_2 \ell_3} \int_s^{\ell_2} \frac{1}{\sqrt{(\ell_1 - s)(\ell_2 - s)(s - \ell_3)}} ds \\ &= \frac{2h}{\lambda_2 \sqrt{-2\varepsilon}} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - sn^{-1}\left(\frac{s - \ell_3}{\ell_2 - \ell_3}, k\right) \right], \quad (27) \end{aligned}$$

其中 $sn(\cdot)$ 为椭圆函数.

由式(27)可得

$$s = \left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\max}} \right) sn^2 \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \frac{\lambda_2 \sqrt{-2\varepsilon}}{2h} \theta, k \right] + \frac{1}{r_{\max}}. \quad (28)$$

通过化简, 向径 r 的表达式

$$r = \frac{r_{\min} r_{\max}}{r_{\min} + (r_{\max} - r_{\min}) sn^2 \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \frac{\lambda_2 \sqrt{-2\varepsilon}}{2h} \theta, k \right]}. \quad (29)$$

算例: 假设航天器初始时刻的极角 $\theta_0 = 0$, 归一化的角动量 $h' = 1.1205235$, 总能量 $\varepsilon'_1 = -0.3903722$. 由式(16)可以求得近心距 $r'_{\min} = 1.0975$, 远心距 $r'_{\max} = 1.4633$, $r'_* = 8.63447 \times 10^{-4}$. 根据式(18)和(26), 径向周期 $T'_r = 8.7640879$, 周向周期 $T'_\theta = 17.51009$.

图 4 和图 5 分别给出了极坐标系和惯性系下, 利用数值积分得到的航天器轨道演化, 时间上限为 $t' = 200$. 图 6 表示向径随时间的变化.

可以看到, 在 J_2 项摄动的影响下, 航天器被限制在环形区域内, 向径随时间呈周期性变化. 在求解 T'_r 和 T'_θ 时采用了级数展开法, 但是实际上因径向周期与周向周期之比 T'_r/T'_θ 是无理数, 所以惯性坐标系下的轨道不封闭. 理论上讲, 如果没有时间限制, 在极坐标系下航天器的运动区域将填满 $r'_{\min}$ 和 $r'_{\max}$ 之间的整个环带.

2.2 圆形 J_2 轨道的形成条件及性质

当 $\varepsilon' = \varepsilon'_2$ 时, 有效势 V'_{eff} 与总能量 ε'_2 有一个交点 r'_0 , 表示航天器在 $r = r'_0$ 处做圆周运动. 此时方程

图 4 极坐标系下的环形 J_2 轨道
Figure 4 Annular J_2 orbits in polar coordinate system.

 图 5 地球惯性坐标系下的环形 J_2 轨道

 Figure 5 Annular J_2 orbits in Earth-centered inertial coordinate system.

 图 6 归一化的环形 J_2 轨道向径随时间的变化

 Figure 6 Evolution of normalized radius of annular J_2 orbits.

(14)中 3 个实根有两个相等, $\Delta = 0$. 令 $\partial V'_{\text{eff}}/\partial r' = 0$ 可以求得

$$r_0 = \frac{h^2 + \sqrt{h^4 - 6J_2\mu^2 R_e^2}}{2\mu}, \quad (30)$$

与 Humi 等人^[6]得到的结论一致, 但推导过程更加简洁. 航天器的轨道角速度为 $\omega = h/r_0^2$, 周期为 $T = 2\pi r_0^2/h$.

对于给定任意的角动量 h , 出现封闭轨道的条件是有效势 V_{eff} 在某一距离 r_0 处有极小或者极大值, 而且总能量 ε 正好等于 V_{eff} . 然而, 在极小或者极大值

处, 圆形封闭轨道的性质却截然不同. 当航天器受到一些类似于其他天体的微小扰动时, 如果能量比给定角动量 h 的航天器能量稍大一点, 则在 V_{eff} 取极小值的情况下, 轨道仍然是有界的, 尽管此时轨道不再是圆形. 但当 V_{eff} 取极大值时, $\dot{r}$ 始终不为零. 所以, 圆形封闭轨道的稳定性质取决于 $\partial^2 V_{\text{eff}}/\partial r^2$. 当 $\partial^2 V_{\text{eff}}/\partial r^2 > 0$ 时稳定, $\partial^2 V_{\text{eff}}/\partial r^2 < 0$ 时发散.

将式(30)所求得到的 r_0 代入 $\partial^2 V_{\text{eff}}/\partial r^2$, 有

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial r^2} \right|_{r=r_0} = -\frac{2\mu}{r_0^3} - \frac{6J_2\mu R_e^2}{r_0^5} + \frac{3h^2}{r_0^4} > 0,$$

说明此圆形 J_2 封闭轨道是稳定的.

当受到小扰动后, 航天器的轨道将发生什么改变呢? 做变换 $u=1/r$, 则轨道动力学方程为

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = J(u). \quad (31)$$

考虑 J_2 项的影响, 则

$$J(u) = -\frac{1}{h^2} \frac{d}{du} \Phi\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{3}{2} J_2 \mu R_e^2 u^2 - h^2 u + \mu \right). \quad (32)$$

因为运动是稳定的, 所以 u 将保持有界且与 u_0 差别很小, 记 $\Delta u = u - u_0$, 则利用 $J(u_0)$ 附近泰勒级数展开的首项来表示 $J(u)$, 有

$$J(u) = u_0 + (u - u_0) \frac{dJ}{du_0} + O[(u - u_0)^2], \quad (33)$$

则在圆形轨道附近的轨道方程为

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\theta^2} + \Delta u = \Delta u \frac{dJ}{du_0}. \quad (34)$$

令

$$\chi^2 = 1 - \frac{dJ}{du_0} = 2 - \frac{3J_2\mu R_e^2 u_0}{h^2},$$

由式(34)不难得到

$$\Delta u = u - u_0 = A \cos(\chi\theta). \quad (35)$$

进一步化简, 有

$$r = \frac{r_0}{1 + A r_0 \cos(\chi\theta)}, \quad (36)$$

式中 A 是振幅, 与给定偏离轨道所需的能量有关. χ 为无理数, 所以航天器将在一个很小的区间内做简谐振动.

算例: 假设航天器初始时刻的极角 $\theta_0 = 0$, 归一化的角动量 $h' = 1.1205235$, 总能量 $\varepsilon'_2 = -0.3984985$.

图 7 极坐标系下的圆形 J_2 轨道
Figure 7 Circular J_2 orbits in polar coordinate system.

表 1 图 8 对应的初始条件

Table 1 Initial conditions correspond to Figure 8					
	$r_{c0}(\text{m})$	$r_{d0}(\text{m})$	$h_{c0}(\text{m}^2/\text{s})$	$h_{d0}(\text{m}^2/\text{s})$	$t(\text{s})$
(a)	7999968	8200968	h_{cc}	h_{dc}	$500T_{cc}$
(b)	7999968	8000968	h_{cc}	$0.5h_{dc}$	$50T_{cc}$
(c)	7999968	8000968	h_{cc}	$0.8h_{dc}$	$100T_{cc}$
(d)	7999968	8000968	$0.9h_{cc}$	$0.6h_{dc}$	$10T_{cc}$
(e)	7999968	8000968	h_{cc}	$0.95h_{dc}$	$100T_{cc}$
(f)	7999968	8000968	$0.6h_{cc}$	$0.5h_{dc}$	$10T_{cc}$

由 (30) 式, 圆轨道半径 $r'_0 = 1.254278$, 周期 $T' = 8.821585$.

图 7 给出了极坐标系下, 利用数值积分得到的航天器轨道演化情况, 时间上限为 $t' = 200$. 结果表明, 航天器在 J_2 项的作用下作匀速圆周运动, 向径不随时间变化, 始终为一常值, 与理论推导 (30) 式完全吻合.

3 应用举例

这两类 J_2 束缚轨道在空间侦查, 长期绕飞, 集群蜂拥编队等任务中具有广阔的应用前景. 例如, 将小卫星发射到束缚轨道上借助自然力长期运行, 得到的相对轨道不仅稳定, 而且往往是开普勒轨道所不具有的独特构形.

以 h_{cc} , h_{dc} 分别表示在圆形 J_2 轨道上运行的主航天器和从航天器的角动量, 并令 $T_{cc} \triangleq 2\pi h_c / r_c^2$, 代表主航天器的周期. 通过选取主从航天器圆形-圆形、圆形-环形、环形-环形轨道的不同组合, 可以构造出束缚的相对轨道. 将相对坐标系建立在主航天器上, x 轴由地心指向主航天器, y 轴沿其运动方向与 x 轴垂直, 并假设主从航天器在初始时刻均在近心距处. 图 8 中几种相对轨道所对应的始条件如表 1 所示.

图 8 典型的 J_2 相对轨道构形
Figure 8 Typical geometries of J_2 relative orbits.

4 结论

本文借鉴势论中周期性轨道的相关理论, 得到了赤道平面内两类 J_2 束缚轨道. 借鉴“势能井”的概念, 探讨了这两类束缚轨道的形成条件: 若有效势 V_{eff} 与总能量 ε 在 $r > R_e$ 有两个交点, 即对应的一元三次方程 $\Delta < 0$ 时, 航天器会被限制在一个环形区域内做周期性运动, 即环形 J_2 轨道. 借助椭圆积分推导出此轨道径向周期、周向周期以及向径的表达式; 当有效

势 V_{eff} 与总能量 ε 在 $r > R_e$ 只有一个交点时, 航天器会做匀速圆周运动, 即圆形封闭轨道, 给出了其周期和角速度, 通过小扰动线性化法证明了其稳定性, 并分析了受扰后向径的演化规律. 最后, 探讨了如何利用两类 J_2 束缚轨道来构造束缚的相对轨道.

本文的研究思路可为航天器的周期轨道设计提供有益的参考. 作者将进一步考虑结合工程实际进行轨道设计, 特别是赤道平面内的航天器交会对接、编队飞行以及组网星座设计等任务.

参考文献

- 1 Broucke R A. Numerical integration of periodic orbits in the main problem of artificial satellite theory. *J Celest Mech Dyn Astron*, 1994, 58: 99–123
- 2 Stellmacher I. Periodic orbits about an oblate spheroid. *J Celest Mech*, 1981, 23: 145–158
- 3 Koon W S, Marsden J E, Murray R M, et al. J_2 dynamics and formation flight. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Montreal: AIAA, 2001
- 4 Jezewski D J. An analytic solution for the J_2 perturbed equatorial orbit. *J Celest Mech*, 1983, 30: 363–371
- 5 Wilkins C C, Wong H. Symmetric orbits in the presence of J_2 perturbation. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. South Carolina: AIAA, 2007
- 6 Humi M, Carter T. Orbits and relative motion in the gravitational field of an oblate body. *J Guid Contr Dyn*, 2008, 31(3): 522–532
- 7 Martinusi V, Gurfil P. Solutions and periodicity of satellite relative motion under even zonal harmonics perturbations. *J Celest Mech*, 2011, 111: 387–414
- 8 Sabatini M, Izzo D, Bevilacqua R. Special inclinations allowing minimal drift orbits for formation flying satellites. *J Guid Contr Dyn*, 2008, 31(1): 94–100
- 9 Vadali S R, Sengupta P, Yan H, et al. Fundamental frequencies of satellite relative motion and control of formations. *J Guid Contr Dyn*, 2008, 31(5): 1239–1248
- 10 Binney J, Tremaine S. *Galactic Dynamics*. Princeton: Princeton University Press, 2005
- 11 Prussing J E, Carroll V C. Constant radial thrust acceleration redux. *J Guid Contr Dyn*, 1998, 21(3): 516–518

Anatomy of J_2 bounded orbits in equatorial plane

WANG Wei^{1,2*}, YUAN JianPing^{1,2}, LUO JianJun^{1,2} & CAO Jing^{1,2}

¹ College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

² Science and Technology on Aerospace Flight Dynamics Laboratory, Xi'an 710072, China

The function of J_2 perturbative potential working significantly on spacecraft is axially symmetric. While the orbital inclination equals to zero, the J_2 potential reduces to spherically symmetric potential. The characteristic of J_2 bounded orbits of low altitude is anatomized from the energy point of view. The existence of two types of bounded orbits with J_2 effect named annular orbits and circular orbits in equatorial plane is demonstrated by means of the concept of a “Potential Energy Well”. Under what condition will the J_2 bounded orbits be generated is studied by discussing the relationship between the total energy and effective potential. Then the condition is transformed to a discriminant Δ of a cubic function. For orbits with fixed angular momentum, if $\Delta < 0$, viz, the curve of effective energy varying with time has three intersections with the total energy, two of which are great than the radius of the Earth, the spacecraft will be trapped in the well and orbits are quasi-periodic, namely annular orbits. If $\Delta = 0$, only one intersection exists

and the motion is uniform circular. For annular orbits, the radial period, azimuthal period and radius are expressed in terms of elliptic integrals applying periodic theory of spherically symmetric potential. For circular orbits, the expression of its period and angular velocity is derived. Then the stability is analyzed via the small disturbance linearization method, and evolution of radius with perturbation is derived thereafter. In the end, a method for generating natural bounded relative orbits over infinite time is illustrated, by means of locating two spacecrafts, the chief and the deputy, on J_2 bounded orbits respectively. According to the stability analysis in sect. 2.2, the geometry of relative orbits is stable.

spherically symmetric potential, equatorial plane, J_2 perturbation, bounded orbits, periodic orbits, elliptic integrals

PACS: 07.87.+v, 95.40.+s, 95.55.Pe

doi: 10.1360/132012-779