中国科学: 数学　2017 年　第 47 卷　第 11 期: 1481～1490
SCIENTIA SINICA　Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

综　述

量子坐标代数的表示

献给万哲先教授 90 华诞

张贺春

清华大学数学科学系, 北京 100084
E-mail: hzhang@math.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2017-02-09;　接受日期: 2017-06-06;　网络出版日期: 2017-07-27
国家自然科学基金 (批准号: 11131001 和 11571036) 资助项目

摘要　量子坐标代数的表示理论与 Poisson 几何、组合数学、PI (polynomial identity) 代数和丛代数等密切相关. 本综述文章简要介绍量子坐标代数的表示理论和一些最新进展, 特别是不可约表示与辛叶片之间的对应关系.

关键词　量子坐标代数　辛叶片　Hilbert 序列

MSC (2010) 主题分类　17B10, 17B37

1　引言

量子群 (quantum groups) 是一类特殊的 Hopf 代数, 可以视为量子化的李代数, 其表示理论与 Yang-Baxter 方程有关, 还可以用来表示扭结的不变量. 量子群源于理论物理, 是在 20 世纪 80 年代由俄罗斯数学家 Drinfeld 和日本数学家 Jimbo 各自独立发现的, 之后它很快引起了许多不同背景的数学家的兴趣, 并成为数学家和物理学家研究的热门课题. 一方面, 量子群与量子 Yang-Baxter 方程密切相关, 而该方程在共形场论和量子可积系统等研究领域有着非常重要的应用. 另一方面, 量子群是一个既非交换又非余交换的 Hopf 代数, 它的出现丰富了 Hopf 代数的内容, 极大地推动了 Hopf 代数分类问题的解决. 同时, 量子群可以狭义地看作为李代数的量子化, 作为李理论的自然延伸, 量子群及其表示理论渗透到了表示论的很多分支, 为李理论的发展提供了更广阔的前景. 量子群把许多看似无关的数学或物理分支联系在一起, 从而被广泛应用于代数群、李群、李代数及其表示、低维拓扑、非交换几何、代数组合、Hopf 代数、扭结的量子不变量理论等数学领域, 并在这些领域发挥着重要的作用 (参见文献 [1–5]).

量子群的坐标代数, 亦称为量子坐标代数, 是由量子群的一些可积模的矩阵元素所张成的空间. 量子群的余结构赋予了量子坐标代数的结合代数结构. 由于经典代数群的坐标代数是一个交换代数, 其 (复) 不可约表示都是一维的, 而量子群的坐标代数是既不交换又不余交换的, 其表示理论则要丰富得多. 量子坐标代数的表示理论与 Poisson 几何、组合数学、PI 代数和丛代数等密切相关. 量子坐标代数的表示理论在量子参数 q 是单位根和不是单位根时有很大区别. 当量子参数 q 是单位根时, De Concini

英文引用格式: Zhang H C. Representations of quantum coordinate algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1481–1490, doi: 10.1360/N012017-00027

　

等[6] 及 De Concini 和 Procesi [7] 提出了一个著名的 DKP (De Concini-Kac-Procesi) 猜想, 目前这方面的研究主要都是围绕这个猜想来进行的 (参见文献 [6, 8–12]). 当 q 不是单位根时, 作者提出了一个一般的 (generic) DKP 猜想[1)]. 这些猜想均强调量子坐标代数的表示与 Poisson 几何的关系, 特别是不可约表示与辛叶片之间的对应关系.

本文将简要介绍量子坐标代数的表示理论和一些最新进展. 本文的选材基于个人的喜好与知识所限, 我们只选取了作者熟悉的内容. 即便如此, 文中仍难免有所遗漏和不准确之处, 还望读者见谅.

2 量子群

设 A 是一个可对称化的广义 Cartan 矩阵, $g(A)$ 是 A 的 Kac-Moody 代数. 我们通常所说的量子群 $U_q(g(A))$ 是 Kac-Moody 代数 $g(A)$ 的普遍包络代数的形变或量子化. 量子群 $U_q(g(A))$ 是由 Chevalley 生成元

$$E_1, E_2, \dots, E_n, F_1, F_2, \dots, F_n; K_1^{\pm 1}, K_2^{\pm 1}, \dots, K_n^{\pm 1}$$

生成的一个结合代数, 这些 Chevalley 生成元满足量子 Serre 关系. 量子群 $U_q(g(A))$ 是一个 Hopf 代数, 因此在 $U_q(g(A))$ 的模范畴中可以定义张量积和对偶. 我们分别用 Δ、S 和 ϵ 来表示 $U_q(g(A))$ 的余乘、对径映射 (antipode) 和余单位.

设 $\mathcal{B}$ 为 $g(A)$ 所对应的辫子群, 我们用 t_i 来表示 $\mathcal{B}$ 的典范生成元. 在辫子群 $\mathcal{B}$ 与 Weyl 群 W 之间有一个典范群同态

$$\begin{aligned} p: \mathcal{B} &\to W, \\ t_i &\mapsto s_i, \end{aligned}$$

其中 t_i 通过 Lusztig 自同构作用在量子群上, s_i 是由单根 α_i 所决定的反射.

下面简要地回顾一下有限型量子群的 PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt) 基. 若 A 是有限型广义 Cartan 矩阵, 其 Weyl 群 W 是一个有限群. 设 $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_N}$ 是 W 中的最长元 w_0 的一个简约表示. 这个简约表示诱导了正根集 $\Delta_+ = \{\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_N\}$ 上的一个凸序, 其中 $\beta_k = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$, $k = 1, 2, \dots, N$. 由此我们可以定义根向量 $F_{\beta_k} = t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_{k-1}}(F_{i_k})$, $E_{\beta_k} = t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_{k-1}}(E_{i_k})$.

我们用 $U_q(n^-)$ 和 $U_q(n^+)$ 分别表示 $U_q(g(A))$ 的由 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 和 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 生成的子代数. U^0 表示由 $K_1^{\pm 1}, K_2^{\pm 1}, \dots, K_n^{\pm 1}$ 生成的交换子代数, $U_q(b^-) = U_q(n^-) U^0$ 和 $U_q(b^+) = U_q(n^+) U^0$ 是 $U_q(g)$ 的一对相反的 Borel 子代数, 则有序单项式 $\prod_{k=1}^N F_{\beta_k}^{h_k} K_\alpha$ $(\alpha \in Q,\ h_k \in \mathbb{Z}_+)$ 构成了 $U_q(b^-)$ 的 PBW 基. 类似地, 有序单项式 $\prod_{k=1}^N E_{\beta_k}^{h_k} K_\alpha$ $(\alpha \in Q,\ h_k \in \mathbb{Z}_+)$ 构成了 $U_q(b^+)$ 的 PBW 基.

根向量 E_β 之间满足 Levendorski-Soibelman 关系:

$$E_{\beta_i} E_{\beta_j} = q^{-(\beta_i, \beta_j)} E_{\beta_j} E_{\beta_i} + \text{低次项}, \quad i < j.$$

根向量 F_β 之间也满足类似的 Levendorski-Soibelman 关系.

3 量子坐标代数

我们用 $\mathcal{O}_{\rm int}$ 来表示权集上有界的 $U_q(g(A))$ 的可积模范畴. 这个范畴中的模都是完全可约模. 范

1) Zhang H C. Generic representations of quantum Schubert cells. Preprint, 2016.

畴 $\mathcal{O}_{\text{int}}$ 中的不可约模均为最高权模, 其最高权是一个支配整函数. 我们用 P_+ 表示所有的支配整函数所构成的集合, 用 $L(\lambda)$ 表示以 λ 为最高权的不可约可积最高权模.

设 $V \in \mathcal{O}_{\text{int}}$, $v \in V$, $f \in V^*$. 我们定义线性函数 $c_{f,v}^V \in U_q(g(A))^*$ 在 $u \in U_q(g(A))$ 处的函数值为 $c_{f,v}^V(u) = f(u.v)$. 线性函数 $c_{f,v}^V$ 称为 V 的一个矩阵元素.

由于 $U_q(g(A))$ 是一个余代数, 其对偶 $U_q(g(A))^*$ 自然地成为一个结合代数. Kashiwara 把量子坐标代数定义为 $\mathcal{O}_{\text{int}}$ 中的可积模的矩阵元素所张成的 $U_q(g(A))^*$ 的子空间, 并记之为 $\mathcal{C}_q[G]$. 设 $M, N \in \mathcal{O}_{\text{int}}$ 且 $f \in M^*$, $m \in M$, $g \in N^*$, $n \in N$. 容易验证 $c_{f,m}^M + c_{g,n}^N = c_{(f,g),(m,n)}^{M\oplus N}$, $c_{f,m}^M c_{g,n}^N = c_{f\otimes g, m\otimes n}^{M\otimes N}$. 因此, $\mathcal{C}_q[G]$ 是 $U_q(g(A))^*$ 的子结合代数. 范畴 $\mathcal{O}_{\text{int}}$ 的完全可约性意味着 $\mathcal{C}_q[G]$ 是由不可约模上的矩阵元素 $c_{f,v}^{L(\lambda)}$ 所张成的子空间. 若 A 是有限型广义 Cartan 矩阵, $U_q(g(A))$ 的不可约可积模都是有限维模, 这时, 量子群 $U_q(g(A))$ 的乘法诱导了 $\mathcal{C}_q[G]$ 上的余乘 Δ. 设 $v_1, v_2, \ldots, v_r$ 是 $L(\lambda)$ 的一组基, $f_1, f_2, \ldots, f_r$ 是其对偶基, 则

$$\Delta(C_{f,v}^{L(\lambda)}) = \sum_i C_{f,v_i}^{L(\lambda)} \otimes C_{f_i,v}^{L(\lambda)}, \quad v \in L(\lambda), \quad f \in L(\lambda)^*.$$

因此, 这时量子坐标代数 $\mathcal{C}_q[G]$ 是一个双代数.

量子包络代数 $U_q(g(A))$ 的 R 矩阵 (Yang-Baxter 方程的一个解) 给出了 $\mathcal{O}_{\text{int}}$ 中的可积模的矩阵元素之间的交换关系. 设 $\lambda, \mu \in P_+$, $\eta, \rho, \beta, \gamma \in P$, $u \in L(\lambda)_\eta$, $v \in L(\mu)_\rho$, $f \in L(\lambda)_\beta^*$, $g \in L(\mu)_\gamma^*$. 设 $u_{\nu_i} \in U_\nu^+$ 是一组基, 而 $v_{\nu_i} \in U_{-\nu}^-$ 是其对偶基, 则矩阵元素满足如下二次关系:

$$\begin{aligned} &q^{-(\eta,\rho)} c_{g,v}^{L(\mu)} c_{f,u}^{L(\lambda)} + q^{(-(\eta,\rho)} \sum_{\nu\in Q_+,\nu\neq 0} \sum_i c_{g,v_{\nu_i}u}^{L(\mu)} c_{f,u_{\nu_i}u}^{L(\lambda)} \\ &\quad = q^{-(\beta,\gamma)} c_{f,u}^{L(\lambda)} c_{g,v}^{L(\mu)} + \sum_{\nu\in Q_+,\nu\neq 0} q^{(\nu+\beta,\nu-\gamma)} \sum_i c_{fu_{\nu_i},u}^{L(\lambda)} c_{gv_{\nu_i},v}^{L(\mu)}. \end{aligned}$$

Faddeev 等 [2] 利用所谓的 RTT 关系也构造了一些有限型的量子坐标代数. Takeuchi [13] 构造了双参数的 A 型量子矩阵代数, 其后 Artin 等 [14] 构造了多参数 A 型量子矩阵代数.

$\mathcal{C}_q[G]$ 上有一个自然的 $U_q(g(A))$ 双模结构 $u_1 c_{f,m}^M u_2 = c_{u_1 f, \omega(u_2)m}^M$, 其中 ω 是 $U_q(g(A))$ 的 Cartan 对合.

进一步, 我们有 $\mathcal{C}_q[G]$ 的结构定理, 它在 $\mathcal{C}_q[G]$ 的表示理论中起着重要的作用.

定理 1 (Peter-Weyl 定理)　作为 $U_q(g(A))$ 双模, $\mathcal{C}_q[G] \cong \bigoplus_{\lambda\in P_+} L(\lambda)^* \otimes L(\lambda)$.

将根格扩充为权格, 我们得到扩大的量子包络代数 $U_q^s(g)$、$U_q^s(b^-)$ 和 $U_q^s(b^+)$. 类似于李代数上 Killing 的型, $U_q^s(b^-)$ 与 $U_q(b^+)$ 之间有一个非退化的 Hopf 对:

$$\left(\prod_{k=1}^N F_{\beta_k}^{h_k} K_\alpha, \prod_{k=1}^N E_{\beta_k}^{h'_k} K_\beta \right) = \prod_k \delta_{h_k,h'_k} q^{-(\alpha,\beta)} \prod_i [h_i]_{q_{\beta_i^2}}! (q_{\beta_i}^{-1} - q_{\beta_i})^{h_i},$$

其中 $q_{\beta_i} = q^{\frac{1}{2}(\beta_i,\beta_i)}$, $[h]_q = \frac{q^h - q^{-h}}{q - q^{-1}}$.

令 $A_+ := \{\phi \in \mathcal{C}_q[G] \mid F_i.\phi = 0, \forall i\}$, $A_- := \{\phi \in \mathcal{C}_q[G] \mid \phi.E_i = 0, \forall i\}$. 易见它们均为 $\mathcal{C}_q[G]$ 的子代数. 由 Peter-Weyl 定理, 有 $A_+ \cong \bigoplus_{\lambda\in P_+} L(\lambda)^* \otimes v_\lambda$, $A_- \cong \bigoplus_{\lambda\in P_+} v_\lambda^* \otimes L(\lambda)$. 设 S_λ 是由 $\{c_{f,v_\lambda}^{L(\lambda)} \mid f \in L(\lambda)^*\}$ 张成的子空间, 易见映射 $L(\lambda) \to S_\lambda$ 和 $l \mapsto c_{f,v_\lambda}^{L(\lambda)}$ 是一个模同构, 其中 v_λ 是取定的一个最高权向量. 子代数 A_+ 和 A_- 的乘法为 Cartan 乘法. Hopf 代数的嵌入 $U_q(b^+) \to U_q(g(A))$ 给出了代数同态 $U(g(A))^* \to U_q(b^+)^*$. 我们用 $\mathcal{C}_q[B^+]$ 表示 $\mathcal{C}_q[G]$ 在这个映射之下的像. 类似地, 我们可以定义 $\mathcal{C}_q[B^-]$. 对于每个单根, 嵌入映射 $U_{q_i}(\mathrm{sl}_2) \to U_q(g(A))$ 诱导了一个代数满同态 $\mathrm{Res}_i : \mathcal{C}_q[G] \to \mathcal{C}_{q_i}[\mathrm{sl}_2]$.

利用上面的非退化 Hopf 对, 我们得到 $U_q^s(b^-)\cong C_q[B^+]$. 同样 $U_q^s(b^+)\cong C_q[B^-]$.

注 1 $U_q(g)\otimes U_q(g)$ 在 $C_q[G]$ 上的作用诱导了 $U_q(b^+)\otimes U_q(b^+)$ 在 $C_q[B^+]$ 上的作用.

对于 A 型的量子包络代数 $U_q(\mathrm{sl}_n)$, 其不可约模都是自然模的某个幂次的张量积的直和项. 因此其量子坐标代数是由自然模的矩阵元素生成的. 我们用 Z_{ij} 来表示自然模的矩阵元素. 这些生成元满足如下关系:

$$\begin{aligned}
&Z_{ij}Z_{it}=qZ_{it}Z_{ij},\quad j>t,\\
&Z_{ij}Z_{sj}=qZ_{sj}Z_{ij},\quad i>s,\\
&Z_{ij}Z_{st}=Z_{st}Z_{ij},\quad i>s,\quad j<t,\\
&Z_{ij}Z_{st}=Z_{st}Z_{ij}+(q-q^{-1})Z_{it}Z_{sj},\quad i<s,\quad j<t,
\end{aligned}$$

其量子行列式

$$\det{}_q=\sum_{\sigma\in S_n}(-q)^{l(\sigma)}Z_{1,\sigma(1)}Z_{2,\sigma(2)}\cdots Z_{n,\sigma(n)}=1.$$

对于 $1\leqslant i\leqslant n$, E_i、F_i、K_i 和 K_i^{-1} 生成一个 $U_{q_i}(\mathrm{sl}_2)$, 其中 $q_i=q^{\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_i)}$. Lusztig 自同构 $t_i\in\mathcal{B}$ 诱导了 $U_{q_i}(\mathrm{sl}_2)$ 上的一个自同构. 给定 $w\in W$, 设 $w=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_r}$ 是一个简约表示, 则 $t_w=t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_r}$ 与 w 的简约表示的选取无关.

我们用 v_λ^* 表示 $L(\lambda)^*$ 的一个最低权向量. v_λ 是 $L(\lambda)$ 的一个最高权向量, 使得 $v_\lambda^*(v_\lambda)=1$. 令 $z_w^\lambda=v_\lambda^*\otimes t_w(v_\lambda)$, $\xi_w^\lambda=t_{w^{-1}}(v_\lambda^*)\otimes v_\lambda$. 令 $v_{-w(\lambda)}=t_w(v_{-w(\lambda)})$, $\phi_{w(\lambda)}=t_w(\phi_\lambda)$, 则 Schubert 模 $L_w(\lambda)=U_q(b^+)v_{w(\lambda)}$. 设 $w=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_r}$ 是一个简约表示, 则 $L_w(\lambda)$ 是由 $\{F_{i_1}^{h_1}F_{i_2}^{h_2}\cdots F_{i_r}^{h_r}v_\lambda\mid h_1,h_2,\dots,h_r\in\mathbb{Z}_+\}$ 张成的子空间.

对于有限型 Kac-Moody 代数 $g(A)$, Soibel'man [15] 证明了量子坐标代数具有如下性质. 2002 年, Narayanan [16] 将这些结果推广到了一般情形.

定理 2 $\mathcal{C}_q[G]$ 是唯一分解整环. 因此 $\mathcal{C}_q[G]$ 有分式环.

注 2 在 $q=1$ 时, Kac-Peterson 称前述的矩阵元素为强正则函数. 他们构造了一个群 G, 并称之为 Kac-Moody 群, 其李代数是 Kac-Moody 代数 $g(A)$ 的导代数. 若 A 不是有限型广义 Cartan 矩阵, 则 $\mathrm{Specmax}C[G]\setminus G$ 非空, 这里 $\mathrm{Specmax}C[G]$ 是 $C[G]$ 的极大理想谱.

令 $R=\mathbb{C}[q,q^{-1}]$, 由矩阵元素之间的交换关系可知, 我们也可以将量子坐标代数定义在 $\mathbb{C}[q,q^{-1}]$ 上, 我们称之为 $C_q[g]$ 的 R- 形式 $R_q[G]$. 容易验证 $R_q[G]$ 满足: $R_q[G]$ 是 $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$- 不变的, 且 z_w^λ, $\xi_w^\lambda\in R_q[G]$. 类似地, 我们也可定义 $R_q[B^+]$ 和 $R_q[B^-]$. 我们用 Res_+ 和 Res_- 来表示 $R_q[G]$ 到 $R_q[B^+]$ 和 $R_q[B^-]$ 的限制映射. De Concini 和 Lybashenko [17] 证明了映射

$$\gamma=\Delta\circ(\mathrm{Res}_+\otimes\mathrm{Res}_-):R_q[G]\to R_q[G]\otimes R_q[G]\to R_q[B^+]\otimes R_q[B^-]\cong U_q^s(b^-)\otimes U_q^s(b^+)$$

是单射, 且 $\gamma(z_e^\lambda)=k_\lambda\otimes k_{-\lambda}$. 因此, $\gamma(z_e^\lambda)$ 在 $R_q[B^+]\otimes R_q[B^-]$ 中可逆. 进一步, 令 $d=z_e^\rho$, 则 $\gamma(R_q[G][d^{-1}])\subset R_q[B^+]\otimes R_q[B^-]$ 是由 $K_\lambda\otimes K_{-\lambda},1\times E_1,1\times E_2,\dots,1\times E_n,F_1\otimes 1,F_2\otimes 1,\dots,F_n\otimes 1$ 生成的子代数.

典范基和对偶典范基是由 Lusztig 和 Kashiwara 引入的. 量子矩阵代数 $\mathcal{O}_q(M(m,n))$ 的对偶典范基是由 Zhang [18] 构造的, 在其构造过程中所用的对合映射是一个反自同构. 后来, Brundan [1] 给出了类似的构造. 他们构造的这两组基相应的基元素之间仅相差一个 q 的幂. 文献 [19] 考虑了量子包络代数 $U_q(\mathrm{sl}_n)$ 的一类特殊的子代数 S, 研究了不变量子代数 $\mathcal{C}_q[M(m,n)]^S$, 证明了这个不变量子代数与我

们所构造的对偶典范基是相容的, 并用量子子式给出了所有有限维最高权模的最高权向量. 文献 [20] 构造了量子坐标代数 $\mathcal{C}_q[G]$ 的典范基.

4 Poisson 结构

一个 Poisson 代数 $\mathcal{A}$ 是一个带有两个代数运算 $(\cdot,[\cdot,\cdot])$ 的向量空间, 使得 $(\mathcal{A},\cdot)$ 构成一个交换的结合代数, 而 $(\mathcal{A},[\cdot,\cdot])$ 是一个李代数. 这两种运算满足如下的相容性关系:

$$[u,v\cdot w]=[u,v]\cdot w+v\cdot[u,w],\quad u,v,w\in\mathcal{A}.$$

若一个光滑流型 M 上的光滑函数所构成的交换的结合代数 $C^\infty(M)$ 是一个 Poisson 代数, 则称 M 为 Poisson 流型. 每个光滑函数 $f\in C^\infty(M)$ 决定了 M 上的一个向量, 我们称之为 Hamilton 向量场. Poisson 流型 M 上的两个点 $x,y\in M$ 称为是等价的, 如果 x 和 y 可以由一个分段光滑的曲线相连, 这个曲线的每个光滑的部分均为某个 Hamilton 向量场的积分曲线的一部分. 这个等价关系的等价类称为 M 的辛叶片.

若 $(M,\{\cdot,\cdot\}_M)$ 和 $(M',\{\cdot,\cdot\}_{M'})$ 是两个 Poisson 流型, 光滑映射 $\varphi:M\to M'$ 称为一个 Poisson 映射, 如果它满足对于所有的 $x\in M$ 及光滑函数 $f,g\in C^\infty(M')$, 总有

$$\{f,g\}_{M'}(\varphi(x))=\{f\circ\varphi,g\circ\varphi\}_M(x).$$

以下总假设我们所讨论的量子代数均满足下列诸条件:

(1) 量子代数 $\mathcal{A}_q$ 是由有限多个生成元 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 生成的.

(2) 若 $q=1$, 则 $\mathcal{A}_1$ 是 n 元多项式代数.

(3) 若 $q=\epsilon$ 是一个 m 次本原单位根, 则 $x_1^m,x_2^m,\ldots,x_n^m$ 均为中心元. 因此, $\mathcal{A}_\epsilon$ 是作为由 $x_1^m,x_2^m,\ldots,x_n^m$ 生成的中心子代数 Z_ϵ 上的模有限生成的.

满足上述条件的量子代数 $\mathcal{A}_q$ 可以赋予 $\mathbb{C}^n$ 一个 Poisson 结构. 我们用 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 的坐标函数, 那么下面的公式:

$$\{\xi_i,\xi_j\}=\frac{x_ix_j-x_jx_i}{q-1}\bigg|_{q=1,x=\xi}$$

给出了 $\mathbb{C}^n$ 上的一个 Poisson 结构.

一个有限维的单连通李群称为 Poisson 李群, 如果它是一个 Poisson 流形, 并且它的群的乘法 $G\times G\to G$ 是一个 Poisson 映射. 一个有限维的 Poisson 单连通半单李群 K 上的 Poisson 结构由 Belavin 和 Drinfeld 完全分类. 具体地, K 上的 Poisson 结构由 (a,u) 所决定, 其中 $a\in\mathbb{R}$, $u\in\Lambda^2\mathbb{R}$, 相对应的 Poisson 李群记为 $K[a,u]$, 它的辛叶片与 Schubert 胞腔可以用来参数化紧致的量子坐标代数的不可约表示.

设 G 是一个有限维半单李群, 经典的 R 矩阵给出了 G 上的一个 Poisson 结构使得 G 成为一个 Poisson 李群. Poisson 李群 G 的每个辛叶片 $\mathcal{L}$ 包含于一个双 Bruhat 胞腔 $X_{w_1,w_2}=B^+w_1B^+\cap B^-w_2B^-$ 中, 其中 $w_1,w_2\in W$, B^+ 是 G 的 Borel 子群, B^- 是 G 的相反的 Borel 子群. 设 T 是 G 的一个极大环面子群, 则 $X=T.\mathcal{L}.T$.

5 量子坐标代数在单位根处的表示

当 $q=1$ 时, $\mathcal{C}[G]=\mathcal{C}_1[G]$ 是一个交换代数, 我们可以视之为 Poisson 李群 G 的坐标代数. 设 q 是一个 l 次本原单位根, 通常我们要求 l 是奇数, 有时还要求 l 与 3 互素. 以后我们不再强调对 l 的要求. 在 [17] 中, De Concini 和 Lyubashenko 证明了下面的定理:

定理 3 [17] 存在一个 $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 等变的 Hopf 代数单同态称为 Frobenius 态射: $\mathcal{F}:\mathcal{C}[G]\to\mathcal{C}_q[G]$ 使得

(1) $\mathrm{Im}\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}_q[G]$ 的中心子代数;

(2) $\mathcal{C}_q[G]$ 作为 $\mathcal{C}[G]$ 模是一个秩为 $l^{\dim G}$ 的投射模;

(3) 设 $g\in G$, m_g 是 g 在 $\mathcal{C}[G]$ 中的极大理想, 令 $\mathcal{C}_q[G](g)=\mathcal{C}_q[G]/\mathcal{F}(m_g)$, 如果 $g,h\in X_{w_1,w_2}$, 则 $\mathcal{C}_q[G](g)\cong\mathcal{C}_q[G](h)$.

若 q 是 l 次本原单位根, 则 $\mathcal{C}_q[G]$ 是其中心上的有限生成模. 于是, $\mathcal{O}_q[G]$ 的不可约模都是有限维模. 当量子参数 q 是单位根时, 文献 [6,7] 提出了一个著名的 DKP 猜想, 目前这方面的研究主要都是围绕这个猜想来进行的.

猜想 1 (DKP 猜想) 设 $\mathcal{A}_q$ 是满足前述条件的量子代数, q 是一个 l 次本原单位根. 设 V 是一个不可约 $\mathcal{A}_q$- 模, V 所对应的辛叶片为 $\mathcal{L}$, 则

$$\dim V=l^{\frac{1}{2}\dim\mathcal{L}}.$$

我们用 Z_0 表示 Frobenius 映射的像. 量子坐标代数 $\mathcal{C}_q[G]$ 是 Z_0 上的有限生成模, 因此 $\mathcal{C}_q[G]$ 是一个 PI 代数, 其 PI 次数等于维数最大的不可约模的维数. 计算量子代数的 PI 次数是其表示理论中的一个重要问题. Jakobsen 和 Zhang [11] 计算了量子矩阵代数的 PI 次数. 决定一个量子代数的 PI 次数通常是比较困难的问题. 由 Lusztig 引入的小量子群是一类非常重要的量子代数, 而至今我们尚不能完全确定小量子群的中心.

De Concini 等[6] 证明了对于 $U_\epsilon(b^+)$ 弱化的 DKP 猜想成立. 其后, De Concini 和 Procesi [21] 证明了对于有限维单李群的量子坐标代数 $\mathcal{C}_q[G]$, DKP 猜想成立.

定理 4 设 $g\in G$, V 是一个不可约 $\mathcal{C}_q[G](g)$ 模. g 属于 Bruhat 胞腔 X_{w_1,w_2}, 则作适当的局部化后, 代数 $\mathcal{C}_q[G](g)$ 是其中心上次数为 $l^{\frac{1}{2}(l(w_1)+l(w_2)+\mathrm{rank}(w_1-w_2))}$ 的 Azumaya 代数. 因此, 在同构的意义下, $\mathcal{C}_q[G](g)$ 有唯一的不可约模, 其维数为 $l^{\frac{1}{2}(l(w_1)+l(w_2)+\mathrm{rank}(w_1-w_2))}$.

量子矩阵代数是一类重要和基本的量子代数. 量子矩阵代数 $\mathcal{O}_q(M(n))$ 由量子矩阵元素 Z_{ij} 生成, 这些生成元满足如下的交换关系:

$$\begin{aligned}
&Z_{ij}Z_{it}=qZ_{it}Z_{ij},\quad j>t,\\
&Z_{ij}Z_{sj}=qZ_{sj}Z_{ij},\quad i>s,\\
&Z_{ij}Z_{st}=Z_{st}Z_{ij},\quad i>s,\quad j<t,\\
&Z_{ij}Z_{st}=Z_{st}Z_{ij}+(q-q^{-1})Z_{it}Z_{sj},\quad i<s,\quad j<t.
\end{aligned}$$

量子矩阵代数 $\mathcal{O}_q(M(n))$ 给出了 $\mathbb{C}^{n^2}\cong M_n(\mathbb{C})$ 上的一个 Poisson 结构:

$$\begin{aligned}
&\{\xi_{ij},\xi_{ik}\}=\xi_{ij}\xi_{ik},\quad j<k,\\
&\{\xi_{ij},\xi_{kj}\}=\xi_{ij}\xi_{kj},\quad i<k,
\end{aligned}$$

$$\{\xi_{ij}, \xi_{st}\} = 0, \quad i < s, \quad t < j,$$
$$\{\xi_{ij}, \xi_{st}\} = 2\xi_{it}\xi_{sj}, \quad i < s, \quad j < t,$$

其中 ξ_{ij} 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的坐标函数.

当 q 为单位根时, Z_{ij}^l 均为中心元. 因此, Z_{ij}^l 在一个不可约 $\mathcal{O}_q(M(n))$- 模上的作用是一个纯量. 于是,

$$V \to (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}.$$

不可约 $\mathcal{O}_q(M(n))$- 模 V 称为循环模, 如果所有的 $c_{ij} \neq 0$. Jakobsen 和 Zhang [12] 证明了下面的定理:

定理 5　设 V 是一个不可约 $\mathcal{O}_q(M(n))$- 循环模, 则存在一个正整数 s 使得 $\dim V = sm^{n-1}$.

我们称维数等于 m^{n-1} 的循环模为极小循环模.

Jakobsen 和 Zhang [12] 具体构造了所有的极小循环模. 每个极小循环模对应着一个下面的矩阵:

$$\sum_{i,j} E_{ij} + \sum_{i \geqslant i_0, j \geqslant j_0} a^m E_{ij}, \quad \sum_{i,j} E_{ij} + \sum_{i \leqslant i_0, j \leqslant j_0} a^m E_{ij}.$$

根据 $\mathbb{C}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{C})$ 上的 Poisson 结构我们很容易得出包含这个矩阵的辛叶片是 $2n-2$ 维的, 因此 DKP 猜想成立.

Jakobsen 和 Zhang [11] 还计算了维数最大的 $\mathcal{O}_q(M(n))$ 不可约模的维数. $\mathcal{O}_q(M(n))$ 的 PI 次数等于维数最大的 $\mathcal{O}_q(M(n))$ 不可约模的维数等于 $l^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$. 进一步, Zhang [18] 验证了对于 $\mathcal{O}_q(M(n))$, DKP 猜想总是成立的.

定理 6　设 q 是一个 l 次本原单位根, l 是奇数. 设 V 是一个不可约 $\mathcal{O}_q(M(n))$- 模, V 所对应的矩阵所在的辛叶片为 $\mathcal{L}$, 则

$$\dim V = l^{\frac{1}{2}\dim \mathcal{L}}.$$

Panov [22] 证明了对于一类量子可解代数, DKP 猜想成立. 关于量子可解代数, 我们将在下一节作较为详细的介绍.

6　量子坐标代数在非单位根处的表示

为了简单起见, 本节假设 A 是一个 Cartan 矩阵, 因此, $g(A)$ 是一个有限维单李代数. 这时, $\mathcal{C}_q[G]$ 是一个双代数. 量子坐标代数的表示理论在量子参数 q 是单位根和不是单位根时有很大区别. 通常, 量子坐标代数的在非单位根处的不可约模是一维的或者是无限维的. 量子群上的 Cartan 对合 w 诱导了量子坐标代数上的 * 结构

$$* : \mathcal{C}_q[G] \to \mathcal{C}_q[G],$$
$$f^*(u) = f(w(u)), \quad u \in U_q(g(A)), \quad f \in C_q[G].$$

人们通常关心量子坐标代数 $\mathcal{C}_q[G]$ 的 *- 表示 (参见文献 [23–25]). Vaksman 和 Soibelman [25] 具体地构造了量子坐标代数 $\mathcal{C}_q[\mathrm{SL}(2)]$ 的 *- 子代数 $\mathcal{C}_q[\mathrm{SU}(2)]$ 的不可约表示, 证明了在同构的意义下, $\mathcal{C}_q[\mathrm{SU}(2)]$ 只有一个不可约表示. 这个不可约表示的表示空间为一元多项式代数 $F[x]$, $\mathcal{C}_q[\mathrm{SU}(2)]$ 在 $F[x]$ 上的作用如下:

$$x_{11}(1) = 0, \quad x_{11}(x^k) = (q^{4k-6} - 1)^{\frac{1}{2}} x^{k-1}; \quad x_{12}(x^k) = q^{2(k-1)} x^k;$$

$$x_{21}(x^k) = q^{2(k-1)}x^k; \quad x_{22}(x^k) = (q^{4k-2}-1)^{\frac{1}{2}}x^{k+1}.$$

对于每个单根 α_i, 上述的 $\mathcal{C}_{q_i}[\mathrm{SL}(2)]$ 的 *- 不可约表示可以通过限制映射 Res_i 做成 $\mathcal{C}_q[G]$ 的 *- 不可约表示 π_i. 设 $w \in W$, $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_r}$ 是 w 的一个简约表示, 利用 $\mathcal{C}_q[G]$ 的余结构, 我们自然地得到一个张量表示 $\pi_{i_1} \otimes \pi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \pi_{i_r}$. Soibelman 证明了这个表示是不可约表示, 且它与 w 的简约表示的选取无关. 我们称这一类表示为 Soibelman 表示. 易见 Soibelman 表示是自然的 $\mathbb{Z}_+$ 分次的, 其 Hilbert 级数为 $\frac{1}{(1-t)^{(l(w)}}$. Saito [26] 和 Tanisaki [24] 分别用不同的方法构造了 Soibelman 表示.

由 Peter-Weyl 定理, 我们考虑子代数 $A_+ = \bigoplus_{\lambda \in P_+} L(\lambda)^* \otimes v_\lambda$, 设 $\xi : A_+ \to \mathbb{C}$ 是一个代数同态, 由此给出了 $\mathcal{C}_q[B^+]$ 的一个一维表示 1_ξ. 我们考虑诱导表示 $\mathrm{Ind}_{A_+}^{\mathcal{C}_q[G]}1_\xi$, 此表示有唯一的一个不可约商模 $L(\xi)$. 不可约模 $L(\xi)$ 的零化子是 $\mathcal{C}_q[G]$ 的一个本原理想. 我们用 $P(\lambda)$ 来表示 $L(\lambda)$ 的权集 $\lambda \in P_+$. 对于上述的代数同态 ξ, 令

$$C_\xi^+(\lambda) = \{\mu \in P(\lambda) \mid \xi(c_{\mu,\lambda}^{L(\lambda)}) \neq 0\}.$$

我们用 $D_\xi^+(\lambda)$ 来表示 $C_\xi^+(\lambda)$ 中关于支配序的极大元所构成的集合.

类似地, 我们定义 $C_\xi^-(\lambda) = \{\mu \in P(\lambda) \mid \xi(*(c_{\mu,\lambda}^{L(\lambda)})) \neq 0\}$, $D_\xi^-(\lambda)$ 是 $C_\xi^+(\lambda)$ 中关于支配序的极大元所构成的集合.

定理 7 设 P 是 $\mathcal{C}_q[G]$ 的一个本原理想, 对应的不可约模为 L_P, 则存在 $w_1, w_2 \in W$ 使得

$$D_\xi^+(\lambda) = \{w_1(\lambda)\}, D_\xi^-(\lambda) = \{w_2(\lambda)\}, \quad \forall\, \lambda \in P_+.$$

Joseph [27] 完全分类了 $\mathcal{C}_q[G]$ 的素理想和本原理想. 其后, Hodges 等[28] 定义了多参数的量子群 $C_{q,p}[G]$, 其中 q 不是单位根, 刻画了素理想谱和本原理想谱, 从而将 Joseph 的结果推广到了多参数的情形. 在单参数的情形, 本原理想谱与辛叶片一一对应. 但在多参数的情形, 情况要复杂得多.

于是, 由 Joseph 定理知, $L(\xi)$ 对应于一对 Weyl 群 W 中的元素 w_1 和 w_2.

猜想 2 (Generic DKP 猜想) 不可约模 $L(\xi)$ 具有一个自然的 $\mathbb{Z}_+$ 分次, 其 Hilbert 级数为

$$H_t(L(\xi)) = \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}(l(w_1)+l(w_2)+\mathrm{rank}(w_1-w_2))}}.$$

注意, $l(w_1) + l(w_2) + \mathrm{rank}(w_1 - w_2)$ 是 Bruhat 胞腔中关于标准 Poisson 结构的辛叶片的维数.

设 A 是一个有限生成的结合代数, $H = (h_{ij})$ 是一个 n 阶反对称的整数矩阵. A 有一组生成元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 满足如下关系:

$$x_i x_j = q^{h_{ij}} x_j x_i + r_{ij}, \quad i > j,$$

其中 r_{ij} 属于由 $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ 生成的子代数. 我们称 A 为量子可解代数.

Weyl 代数 A_1 是一个由 x 和 y 生成满足关系 $xy - yx = 1$ 的结合代数. 利用反对称的整数矩阵 $H = (h_{ij})_{n\times n}$, 我们可以定义一个拟多项式代数 $\mathcal{A}_q(H)$, 它由 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 生成, 满足定义关系

$$y_i y_j = q^{h_{ij}} y_j y_i, \quad \forall\, i, j.$$

若进一步假设 A 没有零因子, 那么我们可以定义 A 的分式环 $\mathrm{Fract}(A)$. 若 Weyl 代数 A_1 不能嵌入到 $\mathrm{Fract}(A)$ 中, 则称 A 为纯量子可解代数. 注意, Weyl 代数和拟多项式代数 $\mathcal{A}_q(H)$ 均为量子可解代数且没有零因子.

定理 8 [22] 若 A 为纯量子可解代数, 则 $\mathrm{Fract}A \cong \mathrm{Fract}(\mathcal{A}_q(H))$.

对于每个单根 α_i, 令 U_i 为 E_i 和 $K_i^{\pm 1}$ 生成的子代数, U_{-i} 为 F_i 和 $K_i^{\pm 1}$ 生成的子代数. 设 $w_1, w_2 \in W$, $w_1 = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_r}$ 和 $w_2 = s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_t}$ 是简约表示. 易见子空间

$$U_{w_1,w_2} = U_{-i_1}U_{-i_2}\cdots U_{-i_r}U_{j_1}U_{j_2}\cdots U_{j_t}$$

是一个余子代数, 因此, $I_{w_1,w_2} = \{f \in \mathcal{C}_q[G] \mid f(u) = 0, \forall\, u \in U_{w_1,w_2}\}$ 是 $\mathcal{C}_q[G]$ 的一个理想. 令 $\mathcal{C}_q[\overline{G_{w_1,w_2}}] = \mathcal{C}_q[G]/I_{w_1,w_2}$, $\Phi_{w_1} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\}$, $\beta_l = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_{l-1}}(\alpha_{i_l})$ 及 $\Phi_{w_2} = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t\}$, $\gamma_m = s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_{m-1}}(\alpha_{j_m})$. 令 $\mathcal{L}_q(w_1, w_2)$ 是由 $x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_t; z_1, z_2, \ldots, z_n$ 生成的 Laurant 拟多项式代数, 其定义关系为

$$\begin{aligned}
&y_iy_j = q^{-(\beta_i,\beta_j)}y_jy_i, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant t,\\
&x_ix_j = q^{(\beta_i,\beta_j)}x_jx_i, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant r,\\
&x_iyj = y_jx_i, \quad \forall\, i, j,\\
&z_iz_j = z_jz_i, \quad \forall\, i, j,\\
&z_ix_j = q^{-(\Lambda_i,\beta_j)}x_jz_i, \quad \forall\, i, j,\\
&z_iy_j = q^{(\Lambda_i,\gamma_j)}y_jz_i, \quad \forall\, i, j,
\end{aligned}$$

其中 $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ 是李代数 $g(A)$ 的基本权.

定理 91) $\mathcal{C}_q[\overline{G_{w_1,w_2}}]$ 是一个无零因子的纯量子可解代数, 且

$$\mathrm{Fract}(\mathcal{C}_q[\overline{G_{w_1,w_2}}]) \cong \mathrm{Fract}(\mathcal{L}_q(w_1, w_2)).$$

定理 101) $\mathcal{C}_q[\overline{G_{w_1,w_2}}]$ 有一个 $\mathbb{Z}_+$- 分次的不可约模 V, 其 Hilbert 序列为

$$H_t(V) = \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}(l(w_1)+l(w_2)+\mathrm{rank}(w_1-w_2))}}.$$

量子超群可以看作为量子群的一种自然推广, 关于它的研究最早也源于理论物理. 量子超群在很多方面与量子群有着平行的性质, 例如, 量子超群是一类 Hopf 超代数且量子超群也与量子 Yang-Baxter 方程有着密切的联系. 与量子群类似, 量子超群及其表示理论被深入地应用在数学和物理的很多分支, 如代数超群、扭结理论、低维拓扑、超几何理论、量子场理论和超弦理论等. 类似于量子群可以看作为李代数的量子化, 量子超群与李超代数之间存在着平行的关系, 即量子超群可以看作为李超代数的量子化. 文献 [29] 构造了一个对偶典范基. 这组基在量子 Berezinian 的作用下不变, 从而可以给出特殊线性群的对偶典范基, 并利用 Borel-Weil 给出了一类 Kac- 模的对偶典范基. 在以后的工作中, 我们也会研究量子超群的坐标代数的表示.

致谢 作者感谢审稿人的宝贵意见.

参考文献

1 Brundan J. Dual canonical bases and Kazhdan-Lusztig polynomials. J Algebra, 2006, 306: 17–46
2 Faddeev L D, Reshetikhin N Yu, Takhtadzhyan L A. Quantization of Lie groups and Lie algebras. Leningrad Math J, 1990, 1: 193–225
3 Lustig G. Hecke algebras and involutions in Weyl groups. Bull Inst Math Acad Sin (NS), 2012, 7: 323–354
4 Lusztig G. Some powerseries involving involutions in Coxeter groups. ArXiv:1411.3233, 2014

5 Parshall B, Wang J P. Quantum Linear Groups. Memoirs of the American Mathmatical Society. Providence: Amer Math Soc, 1991
6 De Concini C, Kac V G, Procesi C. Some quantum analogues of solvable Lie groups. In: Geometry and Analysis (Bombay, 1992). Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1995, 41–65
7 De Concini C, Procesi C. Quantum groups. In: D-modules, Representation Theory and Quantum Groups (Venice, 1992). Lecture Notes in Mathematics, vol. 1565. Berlin: Springer 1993, 31–140
8 De Concini C, Kac V G. Representations of quantum groups at roots of 1. In: Modern Quantum Field Theory (Bombay, 1990). River Edge: World Scientific Publishing, 1991, 333–335
9 De Concini C, Kac V G, Procesi C. Quantum coadjoint action. J Amer Math Soc, 1992, 5: 151–189
10 Jakobsen H P, Zhang H. The exponential nature and positivity. Algebr Represent Theor, 2006, 9: 267–284
11 Jakobsen H P, Zhang H. The center of quantized matrix algebra. J Algebra, 1997, 196: 458–476
12 Jakobsen H P, Zhang H. Cyclic representations of the quantum matrix algebras. Comm Algebra, 1999, 27: 493–510
13 Takeuchi M. A two parameter quantization of GL_n. Proc Japan Acad Ser A Math Sci, 1990, 66: 112–114
14 Artin M, Schelter W, Tate J. Quantum deformations of GL_n. Comm Pure Appl Math, 1991, 44: 879–895
15 Soibel'man Ya S. Algebra of functions on a compact quantum group and its representations. Algebra i Analiz, 1990, 2: 190–212; Leningrad Math J, 1991, 2: 161–178
16 Narayanan B R. Representations of quantized function algebras of Kac-Moody algebras. PhD Thesis. Manhattan: Kansas State University, 2002
17 De Concini C, Lyubashenko V. Quantum coordinate rings at root of unity. Adv Math, 1994, 108: 205–262
18 Zhang H C. On dual canonical bases. J Phys A, 2004, 37: 7879–7893
19 Zhang H C, Zhang R B. Dual canonical bases for the quantum special linear group and invariant subalgebras. Lett Math Phys, 2005, 73: 165–181
20 Li B, Zhang H C. Canonical bases and quantum coordinate ring. J Algebra, 2014, 414: 241–263
21 De Concini C, Procesi C. Quantum Schubert cells and representations at roots of 1. In: Algebraic Groups and Lie Groups. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1997, 127–160
22 Panov A. Fields of fractions of quantum solvable algebras. J Algebra, 2001, 236: 110–121
23 Levendorskii S, Soibelman Y. Algebras of functions on compact quantum groups: Schubert cells and quantum tori. Comm Math Phys, 1991, 139: 141–170
24 Tanisali T. Modules over quantized coordinate algebras and PBW-bases. ArXiv:1409.7973, 2014
25 Vaksman L L, Soibel'man Ya S. An algebra of functions on the quantum group SU(2). Funktsional Anal i Prilozhen, 1988, 22: 170–181
26 Saito Y. Quantized coordinate rings, PBW-type bases and q-boson algebras. J Algebra, 2016, 453: 456–491
27 Joseph A. Quantum Groups and Their Primitive Ideals. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 29. Berlin: Springer-Verlag, 1995
28 Hodges T J, Levasseur T, Toro M. Algebraic structure of multiparameter quantum groups. Adv Math, 1997, 126: 52–92
29 Zhang H C, Zhang R B. Dual canonical bases for the quantum general linear supergroup. J Algebra, 2006, 304: 1026–1058

Representations of quantum coordinate algebras

ZHANG HeChun

Abstract The representations of quantum coordinate algebras are related to Poisson geometry, combinatorics, PI (polynomial identity) algebras and cluster algebras. In the present survey paper, we introduce some new development of the representations of quantum coordinate algebras which emphasizes the correspondence between the irreducible representation and symplectic leaves of the underling Poisson groups.

Keywords **quantum coordinate algebra, symplectic leaf, Hilbert series**

MSC(2010) **17B10, 17B37**

doi: 10.1360/N012017-00027