中国科学
1985 年 5 月　　A 辑　　第 5 期

两相流的相弛豫理论

高　智
(中国科学院力学研究所,北京)

提　要

本文从三个基本假设出发,提出了两相流的相弛豫理论. 对气体-固体微粒两相系,从两相系 Boltzmann 运动论方程组出发,推导了相弛豫理论的基本方程组;并讨论了基本方程组的性质以及求解方法. 分析计算了激波在气体-固体微粒混合物中传播的例子,阐明了强激波弛豫不符合标准指数弛豫律,而是一种动力学弛豫律. 最后提出了试验确定固粒群弛豫速率的设想及途径.

一、引　言

两相流与许多工业和工程技术(如化学反应器、石油开采和输送、燃烧和气力传输等)以及某些自然现象和边缘学科领域(如沙丘形成、血液循环、环境污染和天体物理等)有着密切的关系,近廿多年来,这方面的研究有了迅速的发展.

两相流动问题很复杂,因此描述它的基本方程一直是人们所关心的,也是至今仍在研究着的课题. 在已有的理论模型中,两流体模型(见文献[1—3])在多种两相流(如泡沫流,液体及其蒸气混合流,气-液两相混合流,流体和固体微粒混合两相流等)中得到了广泛的应用. 如对流体-固粒两相流,两流体模型把固体微粒视为拟流体(pseudo-fluid),并假定拟流体满足流体动力学诸方程(方程组中增加了拟流体与流体两相之间的动量,能量和质量交换项). 拟流体诸方程与气(或液)相流体动力学诸方程(方程组中同样增加了两相之间的动量、能量和质量交换项)一起构成两相流问题的基本方程组. 而对稀相,即固粒容积比 $Z=\frac{V_p}{V}$ 很小于 1 的情况,跟踪固体微粒轨迹的"轨道理论"更为直观和形象,也已有很多的研究(见文献[4]). 两相混合物流动分析的统计模型,需要解算复杂的 Boltzmann 方程[1,5].

本文探讨两相流动研究的另一条途径,称它为两相流的相弛豫理论,该理论既不假设固体微粒为拟流体,也不跟踪单个固粒的轨迹.

二、相弛豫理论的基本假定、推论及说明

我们以气体——固体微粒两相流为例,说明相弛豫理论的基本假定、要点,导出相弛豫理论的基本方程组. 三个基本假定、定义及其说明是:

1. 假定诸固体微粒的运动为集体运动　诸固体微粒组成的固粒群(或固相)与气体之间存

本文 1983 年 11 月 21 收到, 1985 年 1 月 7 月收到修改稿.

在动量、能量和质量的非平衡或平衡交换过程. 我们称非平衡交换过程为相弛豫过程,相弛豫过程中固相速度与气相速度有差异,两相的温度亦可能有差异. 两相速度偏差量和温度偏差量的变化规律,由一组统计平均的方程式即相弛豫方程来确定.

2. 假定气固两相流存在与相弛豫运动相对应的拟平衡流 拟平衡流是两相混合系的虚拟运动,在此虚拟运动中,气固两相间不存在动量、能量和质量的非平衡交换过程. 但应强调,拟平衡流诸参量通常是两相间速度偏差量和温度偏差量的函数. 当速度偏差量和温度偏差量趋向零时,确定拟平衡流诸参量的方程式应化为两相混合系平衡流的运动方程式.

3. 假定气体-固粒两相混合系平衡态的运动能够用宏观,即连续介质理论来描述 气体-固粒平衡(均匀)混合物之热力学关系,粘性应力张量等若与纯气相混合物的诸关系相类似,则气体-固粒两相平衡流的运动方程就是 Navier-Stokes 方程组. 推论及其说明是:

(1)两相系拟平衡流方程组和相弛豫方程组一起,构成两相系混合物流动的基本方程组 联立求解拟平衡流方程组和相弛豫方程组,可求得两相流问题的精确解.文中建议了一个有物理意义且行之有效的叠代求解方法,该法基于如下的事实:拟平衡流方程组的零阶渐近方程组,既不包含两相间的诸交换速率,也不包含两相间的速度偏差量和温度偏差量. 零阶渐近方程组也就是两相系平衡流满足的精确方程组,它们与纯气相流之流体动力学方程组形式完全一致. 求得零阶渐近方程组的解,把它们代入相弛豫方程组,可求得两相间速度以及温度偏差量的变化规律. 再把相弛豫方程组的解代入拟平衡流方程组,可求拟平衡流运动的进一步解. 如此过程反复进行,可得到两相流问题的精确解.

(2)两相间动量和能量交换速率的确定:理论计算模型及试验方法 相弛豫方程组是统计平均的方程式,它们被用来确定诸粒子的统计平均量,故应直接研究固粒群与气体之间诸交换速率,而不着眼于获取单个粒子与气体交换速率的精确资料. 按照本文的分析,从理论计算模型和试验测量两方面来看,直接求得固粒群与气体间的诸交换速率是完全可行的.事实上由于拟平衡流零阶渐近方程组可独立于相弛豫解,而首先用理论办法求出,故若根据试验测得两相间速度和温度偏差量的变化规律,则可由相弛豫方程组算得两相间的动量和能量交换速率. 这与根据标准指数弛豫律确定弛豫时间常数的概念和方法是类同的. 从原理上来说,这种方法对稀相即固粒容积比 $Z = V_p/V$ 很小于 1 的情况和浓相即容积比 Z 不很小于 1 的情况都是同样适用的.

三、相弛豫理论之基本方程组的推导

现从固粒-气体两相系的运动论方程出发推导相弛豫理论的基本方程组. 若气体分子—分子间力的有效范围、分子—固粒以及固粒—固粒间力的有效范围为分子和固粒线度大小,若分子—固粒、固粒—固粒之间的碰撞不产生凝聚物,则当

$$\left.\begin{array}{l} D_g \ll 1/n_g^{1/3} \ll \lambda_{gg} \\ D_p \ll 1/n_p^{1/3} \ll \lambda_{pp} \end{array}\right\} \ll \delta v^{1/3} \ll L \qquad (A)$$

成立时,固粒-气体两相系的运动可以用 Boltzmann 方程来描述.这里已假定气体分子和固粒均为圆球,球直径分别为 D_g 和 D_p, n_g 和 n_p 分别是单位体积内的分子和固粒的数目, λ_{gg} 和 λ_{pp} 分别是分子—分子碰撞和固粒—固粒碰撞的平均自由程, δv 是体积微元, L 是两相流的宏观特征长度. 条件 (A) 成立时,我们只需考虑分子—分子、分子—固粒以及固粒—固粒之间的

两两碰撞．顺便指出，对于纯气相情况，由 Boltzmann 方程导出的 Navier-Stokes 方程组适用于气体，也适用于液体，并不受条件（A）的限制．因而可以预料：由两相系 Boltzmann 方程组导出的两相系相弛豫理论的宏观运动方程组的适用范围，将会超出条件（A）所限制的范围．例如文献［5］对固粒 Knudsen 数 $\lambda_{pp}/L \lesssim 1$ 的情况，联立求解固粒 Boltzmann 方程和气相抛物化 Navier-Stokes 方程组得到了与试验相符合的数值结果．

固粒分布函数 f_p，气体分子分布函数 f_g 满足各自的 Boltzmann 方程，它们分别是[1]：

$$\frac{\partial f_p}{\partial t}+\frac{\partial c_{pi}f_p}{\partial x_i}+\frac{\partial \phi_{pi}f_p}{\partial m_p c_{pi}}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{Q_h f_p}{c_s m_p}\right)+\frac{\partial}{\partial r_p}\left(\frac{M_p f_p}{3m_p}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_p+\left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_g, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial t}+\frac{\partial c_{gi}f_g}{\partial x_i}+\frac{\partial \phi_{gi}f_g}{\partial m_g c_{gi}}=\left(\frac{\partial f_g}{\partial t}\right)_g+\left(\frac{\partial f_g}{\partial t}\right)_p, \tag{2}$$

其中 c_{pi} 和 c_{gi} 分别是固粒和气体分子的瞬时速度分量，ϕ_{pi} 和 ϕ_{gi} 分别是作用在一个固粒和一个分子上的体积力分量．c_s 为固粒的比热，θ 是一个固粒的瞬时温度，Q_h 和 M_p 分别是固粒的热和质量交换率，m_g 是气体分子质量．m_p 为一个固粒的质量，它是固粒半径 r_p 的函数，按照通常的处理[1]可把固粒按半径 r_p 的大小分成几组，每组有各自的固粒分布函数 f_{pr}，因而只考虑一个组的分布函数 f_p 即可．$\left(\frac{\partial f_q}{\partial t}\right)_s$ 表示 q 粒子与 s 粒子两体碰撞的碰撞积分，q（或 s）表示固粒或气体分子．

把 Boltzmann 方程（1）和（2）分别乘以固粒和分子的质量、动量和能量，对速度空间（固粒情况下还对固粒温度和半径）积分，并把结果方程相加，得到固粒-气体两相系拟平衡流基本方程为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0. \tag{3}$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j+\rho\varepsilon W_i W_j)=-\frac{\partial}{\partial x_j}[S_{p,ij}(u_p)+S_{g,ij}(u_g)]$$
$$+\sigma_p[Z_{pi}(u_p)+Z_{gi}(u_g)-u_{pi}+u_{gi}]\qquad(i=1,2,3). \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(c_{pm}T_m+\frac{1}{2}u_i^2+\frac{1}{2}\varepsilon W_s^2+K_m\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\rho u_j\left(c_{pm}T_m+\frac{u_s^2}{2}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon}{2}W_s^2+K_m\right)+\rho\varepsilon W_j\left[(c_{pp}-c_{pg})T_m\right.$$
$$\left.\left.+\frac{c_{pp}c_{pg}}{c_{pm}}(T_p-T_g)+u_s W_s+\frac{\rho_g-\rho_p}{2\rho}W_s^2+(K_p-K_g)\right]\right\}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x_j}(u_{gs}S_{g,sj}+u_{ps}S_{p,sj}+Q_{cp,j}+Q_{cg,j})+\epsilon_p+\epsilon_g. \tag{5}$$

对 Boltzmann 方程（1）和（2）做与上述运算相同的运算，并把结果方程相减，得到固粒-气体两相系的相弛豫方程组为：

$$\frac{\partial}{\partial t}[2\rho\varepsilon W_i+(\rho_p-\rho_g)u_i]+\frac{\partial}{\partial x_j}[(\rho_p-\rho_g)u_i u_j+2\rho\varepsilon(u_i W_j+u_j W_i)$$

$$+\varepsilon(\rho_g-\rho_p)W_iW_j]=-\frac{\partial}{\partial x_j}[S_{p,ij}(u_p)-S_{g,ij}(u_g)]+F_{pi}-F_{gi}$$

$$+\sigma_p[Z_{pi}(u_p)-Z_{gi}(u_g)-u_{pi}-u_{gi}]\qquad(i=1,2,3). \tag{6}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{u_jE+\rho\varepsilon W_j\left[(c_{pp}+c_{vg})T_m+\frac{(\rho_g-\rho_p)c_{pp}c_{vg}}{\rho c_{pm}}(T_p-T_g)+u_s^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\rho_g-\rho_p}{\rho}u_sW_s+\frac{1}{2}(1-2\varepsilon)W_s^2+K_m\right\}\right]=-\frac{\partial}{\partial x_j}(u_{ps}S_{p,sj}$$

$$-u_{gs}S_{g,sj}+Q_{cp,j}-Q_{cg,j})-2K_T(T_p-T_g), \tag{7}$$

其中

$$E=2\rho\varepsilon\frac{c_{pp}c_{vg}}{c_{pm}}(T_p-T_g)+(\rho_pc_{pp}-\rho_gc_{vg})T_m+\frac{\rho_p-\rho_g}{2}u_s^2$$

$$+2\rho\varepsilon u_sW_s+\frac{1}{2}\varepsilon(\rho_g-\rho_p)W_s^2+\rho_pK_p-\rho_gK_g, \tag{7.1}$$

$$|\rho_g-\rho_p|=\rho(1-4\varepsilon)^{1/2},\ \varepsilon=\rho_p\rho_g/\rho^2. \tag{7.2}$$

状态方程和气相连续性方程分别为:

$$p=\frac{R}{1-Z}\rho_gT_g,\ p_g=(1-Z)p,\ Z=\frac{V_p}{V}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial\rho_g}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_gu_j-\rho\varepsilon W_j)=\sigma_p. \tag{9}$$

在基本方程组(3)—(9)中

$$\rho_p=\iiint m_pf_pd^3c_{pj}d\theta dr_p,\ \rho_g=\int m_gf_gd^3c_{gj},\ \rho=\rho_p+\rho_g. \tag{10.1}$$

$$\rho_pu_{pi}=\iiint m_pc_{pi}f_pd^3c_{pj}d\theta dr_p,\ \rho_gu_{gi}=\int m_gc_{gi}f_gd^3c_{gj}. \tag{10.2}$$

$$\rho u_i=\rho_pu_{pi}+\rho_gu_{gi},\ W_i=u_{pi}-u_{gi}. \tag{10.3}$$

$$S_{p,ij}(u_p)=\iiint m_p(c_{pi}-u_{pi})(c_{pj}-u_{pj})f_pd^3c_{ps}d\theta dr_p,$$

$$S_{g,ij}(u_g)=\int m_g(c_{gi}-u_{gi})(c_{gj}-u_{gj})f_gd^3c_{gs}. \tag{10.4}$$

$$\sigma_p=-\iiint m_p\left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_p+\left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_g\right]d^3c_{pj}d\theta dr_p$$

$$=\int m_g\left[\left(\frac{\partial f_g}{\partial t}\right)_p+\left(\frac{\partial f_g}{\partial t}\right)_g\right]d^3c_{gj}. \tag{10.5}$$

$$\sigma_pZ_{pi}(u_p)=\iiint m_p(c_{pi}-u_{pi})\left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_p+\left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_g\right]d^3c_{pj}d\theta dr_p,$$

$$\sigma_pZ_{gi}(u_g)=\int m_g(c_{gi}-u_{gi})\left[\left(\frac{\partial f_g}{\partial t}\right)_g+\left(\frac{\partial f_g}{\partial t}\right)_p\right]d^3c_{gj}. \tag{10.6}$$

$$T_p=\frac{1}{\rho_p}\iiint m_p(r_p)\theta f_pd^3c_{pj}d\theta dr_p. \tag{10.7}$$

$$T_g=\frac{m_g}{3kn_g}\int[(c_{g1}-u_{g1})^2+(c_{g2}-u_{g2})^2+(c_{g3}-u_{g3})^2]f_gd^3c_{gj}. \tag{10.8}$$

$$T_m = \frac{\rho_p c_{pp}}{\rho c_{pm}} T_p + \frac{\rho_g c_{vg}}{\rho c_{pm}} T_g. \tag{10.9}$$

$$\rho c_{pm} = \rho_p c_{pp} + \rho_g c_{vg}, \tag{10.10}$$

$$c_{pp} = c_s + c_{vp}.$$

$$c_{vp} T_p = \frac{1}{\rho_p} \iiint \frac{m_p}{2} [(c_{p1} - u_{p1})^2 + (c_{p2} - u_{p2})^2 + (c_{p3} - u_{p3})^2] f_p d^3 c_{pi} d\theta dr_p, \tag{10.11}$$

$$Q_{cp,i} = -q_{cp,i} - q_{pi},$$

$$q_{pi} = \iiint m_p(r_p) c_s (\theta - T_p)(c_{pi} - u_{pi}) f_p d^3 c_{pi} d\theta dr_p,$$

$$q_{cp,i} = S_{p,i11} + S_{p,i22} + S_{p,i33}. \tag{10.12}$$

$$S_{p,iik} = \iiint \frac{1}{2} m_p (c_{pi} - u_{pi})(c_{pj} - u_{pj})(c_{pk} - u_{pk}) f_p d^3 c_{ps} d\theta dr_p. \tag{10.13}$$

$$Q_{cg,i} = -q_{cg,i} = -(S_{g,i11} + S_{g,i22} + S_{g,i33}). \tag{10.14}$$

$$S_{g,iik} = \int \frac{1}{2} m_g (c_{gi} - u_{gi})(c_{gj} - u_{gj})(c_{gk} - u_{gk}) f_g d^3 c_{gs}. \tag{10.15}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2}, \quad \varepsilon_{p1} = \iiint m_p c_s \theta \left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_g + \left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_p\right] d^3 c_{pi} d\theta dr_p,$$

$$\varepsilon_{p2} = \iiint \frac{1}{2} m_p c_{ps}^2 \left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_g + \left(\frac{\partial f_g}{\partial t}\right)_p\right] d^3 c_{pi} d\theta dr_p. \tag{10.16}$$

$$\varepsilon_g = \iiint \frac{1}{2} m_g c_{gs}^2 \left[\left(\frac{\partial f_g}{\partial t}\right)_g + \left(\frac{\partial f_g}{\partial t}\right)_p\right] d^3 c_{gi}, \tag{10.17}$$

$$F_{pi} = \iiint \phi_i(x_j, c_{pj}, \theta, r_p, t) f_p d^3 c_{ps} d\theta dr_p, \quad F_{gi} = -F_{pi}. \tag{10.18}$$

其中足标 g 和 p 分别表示气相和固相，ρ 为密度，u_i 宏观运动速度分量，W_i 是固粒群相对气相的扩散速度分量．$S_{g,ij}$ 是气相应力张量，$S_{p,ij}$ 是固相由于固粒运动的随机分布引起的动量通量．σ_p 是质量源项，$\sigma_p Z_{pi}$ 和 $\sigma_p Z_{gi}$ 分别是固相和气相的动量源项．T_g 为气相温度(指气体分子运动的平动温度)，T_p 是固相温度．c_{vg} 是气相定容比热，c_{pp} 是固相比热，$c_s T_p$ 是与固粒之内部运动相对应的固相内能，$c_{vp} T_p$ 是与固粒随机平移运动相对应的固相能，c_{vp} 可看作是与固粒随机平移运动相对应的固相定容有效比热．K_g 和 K_p 分别是气相和固相的势能．q_{pi} 是固相由于固粒运动以及固粒温度的随机分布所引起的能量通量．$S_{p,iik}$ 是固相由于固粒运动的随机分布引起的能量通量．$q_{cp,i}$ 和 $q_{cg,i}$ 分别是固相和气相的传导热通量．F_{pi} 是单位体积固粒-气体混合物中气体施加在固粒群上的作用力分量，按照牛顿定律固粒群施加在气体上的力分量 $F_{gi} = -F_{pi}$．此外

$$\varepsilon_p - K_T(T_p - T_g) = Q_p + \Phi_p + u_{pi} F_{pi} + \varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2}, \tag{11}$$

其中 Q_p 是单位体积混合物内固相向气相的总的热传导率，Φ_p 是单位体积混合物内固粒群对气体所作的功，它们分别为

$$Q_p = \iiint Q_h(x_i, c_{pj}, \theta, r_p, t) f_p d^3 c_{ps} d\theta_p dr,$$

$$\Phi_p = \iiint (c_{pk} - u_{pk}) \phi_k(x_i, c_{pj}, \theta, r_p, t) f_p d^3 c_{ps} d\theta dr_p. \tag{12}$$

四、补充关系式

两相系拟平衡流方程组 (3)—(5)，相弛豫方程组 (6)，(7)，以及方程 (8) 和 (9) 共十二方程，它们构成相弛豫理论的基本方程组．给定初始和边界条件，联立求解这十二个方程，即可求得两相流待求的十二个未知参数 ρ, ρ_g, u_i, W_i $(i=1,2,3)$, T_m, (T_p-T_g), p 和 p_g (p_g 为混合物之气相分压)．要使求解成为可能，显然需要首先给出 (10) 式中诸量即 $S_{g,ij}$, $S_{p,ij}$, σ_p, $\sigma_p Z_{pi}$, $\sigma_p Z_{gi}$, ϵ_p, ϵ_g, q_{pi}, $q_{cg,i}$, $q_{cp,i}$ 和 F_{pi} 以及固相与气相间的热摩擦系数 K_T 的表达式．这些表达式把上述诸量表示为两相系物理属性和两相系宏观运动参数的函数．虽然我们根据本文理论给出某些获得固粒群与气相间诸交换速率的理论模型和试验方案，但还需要进一步的试验研究．为了分析以及比较的需要，最好利用已有的关系式和资料．列出这些关系式，并略加讨论．忽略散度 $\frac{\partial u_{gi}}{\partial x_i}$ 项的贡献，气体分子运动论给出的气相应力张量为[6]：

$$S_{g,ij}=p_g\delta_{ij}-\tau_{g,ij},\quad p_g=\frac{1}{3}(S_{g,11}+S_{g,22}+S_{g,33}),$$

$$\tau_{g,ij}=\mu_g\left(\frac{\partial u_{gi}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{gj}}{\partial x_i}\right)=\mu_g\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\nu_g\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varepsilon W_i)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon W_j)\right]+\nu_g\rho\varepsilon\left(W_i\frac{\partial\ln\rho_g}{\partial x_j}+W_j\frac{\partial\ln\rho_g}{\partial x_i}\right), \tag{13}$$

其中 $\nu_g=\mu_g/\rho_g$，压力 p_g 按气体处于热力学平衡时的状态方程计算．能通量的运动论结果为[6]

$$q_{cg,i}=-\lambda_g\frac{\partial T_g}{\partial x_i}. \tag{14}$$

关于固相，对 Boltzmann 方程 (1) 取高阶矩可导出关于 $S_{p,ij}$ 和 $q_{cp,i}$ 的微分方程．但由于不知道两个碰撞积分 $\left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_p$ 和 $\left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_g$ 的具体形式，求解 $S_{p,ij}$ 和 $q_{cp,i}$ 并不可能．两流体模型[1,2]假定固粒拟流体同样满足 (13) 和 (14) 式，即只要把足标 g 换成 p 就得到固粒拟流体的相应关系式，这样的关系式自然没有物理意义．本文理论并不需要固粒拟流体，而仅需要固粒群-气体混合物的应力张量和能量通量(参见下文)。

关于固粒群与气相间的相互作用力 F_{pi} 和热摩擦系数 K_T，两流体模型[1,2]和轨道理论[4]都通过如下的途径来求得它们．F_{pi} 等于单一刚球粒子受到的气体作用力乘以固粒数密度 n_p．单一刚球粒子受到的力用 Stokes 定律来表示时，有

$$F_{pi}=6\pi r_p\mu_g n_p(u_{gi}-u_{pi}). \tag{15}$$

公式 (15) 的应用范围以及对它所作的各种修正已有很多的研究．两相之间的相互作用力采用 Stokes 定律时，固相与气相间的热摩擦系数 K_T 可写为：

$$K_T=4\pi r_p K_p' n_p, \tag{16}$$

其中 K_p' 是固粒的导热系数．关于质量源项 σ_p，动量源项 $\sigma_p Z_{pi}$ 和 $\sigma_p Z_{gi}$，能量源项 ϵ_p 和 ϵ_g，亦可根据所研究的具体情况给出它们的近似表达式．

五、分析与讨论

在相弛豫理论的基本方程 (3)—(9) 中，许多项含有因子 $\varepsilon=\rho_p\rho_g/\rho^2$，它是气体质量比

率与固粒质量比率的乘积．在相弛豫过程中 ε 的值可能有变化，但对两相系的所有可能情况，ε 始终为 10^{-1} 量级(见图 1)，当 $\rho_g=\rho_p$ 时 ε 取最大值 0.25．对许多有实际意义的两相系，ε 的值远小于 1．由于拟平衡流方程 (4) 和 (5) 中含有 ε 的项与其它项相比为一阶小项，故最好把方程 (4) 和 (5) 转化为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j+p\delta_{ij}-\tau_{ij})=&-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varepsilon W_i W_j)\\&+\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\{(\nu_p-\nu_g)\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varepsilon W_i)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon W_j)\right]\\&+\rho\varepsilon\left[W_i\left(\frac{\nu_g}{\rho_g}\frac{\partial\rho_g}{\partial x_j}-\frac{\nu_p}{\rho_p}\frac{\partial\rho_p}{\partial x_j}\right)+W_j\left(\frac{\nu_g}{\rho_g}\frac{\partial\rho_g}{\partial x_i}-\frac{\nu_p}{\rho_p}\frac{\partial\rho_p}{\partial x_i}\right)\right]\Big\},\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$i=1,\ 2,\ 3;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(c_{pm}T_m+\frac{u_s^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\rho u_j\Big(&c_{pm}T_m+\frac{u_s^2}{2}\Big)\\&+u_i p\delta_{ij}-u_i\tau_{ij}-\lambda_m\frac{\partial T_m}{\partial x_j}\Big]=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{2}\rho W_s^2\right)\\&+\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\{\rho\varepsilon p W_i\delta_{ij}\left(\frac{1-Z}{\rho_g}-\frac{Z}{\rho_p}\right)-\frac{\varepsilon}{2}\rho u_j W_s^2-\rho\varepsilon W_j\\&\times\Big[(c_{pp}-c_{vg})T_m+\frac{c_{pp}c_{vg}}{c_{pm}}(T_p-T_g)\\&+u_s W_s+\frac{\rho_g-\rho_p}{2\rho}W_s^2\Big]+O(\varepsilon)\Big\},\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中

$$\tau_{ij}=\mu_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ \mu_m=\mu_g+\mu_p.$$

按照基本假定 2 和 3，连续介质理论适用于气体-固粒两相平衡和拟平衡混合物，因而 τ_{ij} 正是两相混合物的粘性应力张量，μ_m 是两相混合物之粘性系数．类似地，对两相混合物定义

$$-\lambda_m\frac{\partial T_m}{\partial x_j}=Q_{cp,j}+Q_{cg,j}+O(\varepsilon)\tag{17}$$

与方程组 (4.1) 和 (5.1) 相对应，我们把相弛豫方程组 (6) 和 (7) 转换为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(2\rho\varepsilon W_i-2\rho_g u_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}[&-2\rho_g u_i u_j+2\varepsilon\rho(u_i W_j+u_j W_i)\\&-2\varepsilon(\rho-\rho_g)W_i W_j]=2\frac{\partial}{\partial x_i}[S_{g,ij}(u_g)]+2F_{pi},\end{aligned}\tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\{u_j E'+\varepsilon\rho W_j\Big[&2c_{vg}T_m-\frac{2(\rho-\rho_g)c_{pp}c_{vg}}{\rho c_{pm}}\\&\times(T_p-T_g)+u_s^2-\frac{2\rho_p}{\rho}u_s W_s+\frac{\rho_p^2}{\rho^2}W_s^2\Big]\Big\}\\=2\frac{\partial}{\partial x_j}(u_{gi}S_{g,ij}&+Q_{cg,i})-2K_T(T_p-T_g),\end{aligned}\tag{7.3}$$

其中

$$E'=2\varepsilon\rho\frac{c_{pp}c_{vg}}{c_{pm}}(T_p-T_g)-2\rho_g c_{vg}T_m-\rho_g u_s^2+2\varepsilon\rho u_s W_s-\varepsilon\rho_p W_s^2.\tag{7.4}$$

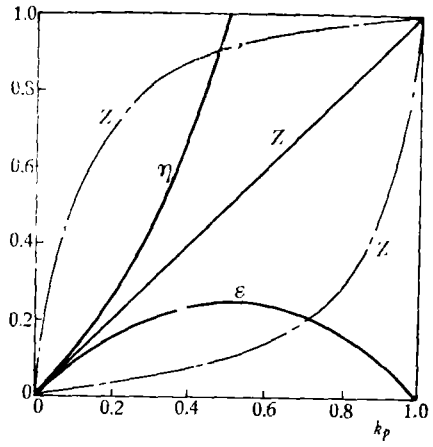

图 1 诸参数关系图

(对容积比 $Z = V_p/V$ 曲线: —·—$\zeta = 0.1$, —$\zeta = 1.0$, ---$\zeta = 10$, $\zeta = \hat{\rho}_p/\hat{\rho}_g$ 物质密度比)

在方程组 (4.1) 和 (5.1) 中,略去 ε 量级项后得到的方程组,我们称作拟平衡流零阶渐近方程组,它们与纯气相的动量和能量方程组的形式完全一致,且方程中不包含速度和温度的偏差量 W_i $(i = 1, 2, 3)$ 和 $(T_p - T_g)$. 此外,在两相拟平衡流的零阶渐近方程组中,同样地在相弛豫方程组 (6.1) 和 (7.3) 中,均不包含固相应力张量,固相热通量以及固相粘性系数 μ_p. 这意味着本理论中不需要假定固相为拟流体,满足流体力学诸关系,只需假定固粒群的运动为集体运动,两相混合物满足流体力学诸关系即可,这就是基本假设 1 和 3.

两相拟平衡流零阶渐近方程组的上述特性既为试验测定固粒群与气相间的交换速率提供了理论基础,也使两相流的分析从本质上得到简化. 一个有物理意义的分析方法是这样: 先求拟平衡流零阶渐近方程组的解(称作拟平衡流零阶渐近解). 把拟平衡流零阶渐近解代入相弛豫方程组 (6.1) 和 (7.3), 可求得相弛豫方程组的零阶渐近解, 因此得到整个两相流问题的零阶渐近解. 如果需要提高解的精确度,可把相弛豫方程组零阶渐近解代入拟平衡流方程组,以求得拟平衡流一阶渐近解. 再把拟平衡流一阶渐近解代入相弛豫方程组, 可求得相弛豫方程组的一阶渐近解. 如此过程反复进行,若叠代收敛即可获得两相流问题的精确解. 显然,拟平衡流一阶和更高阶的渐近解都与相弛豫量 W_i 和 $(T_p - T_g)$ 有关, 因此拟平衡流参量包括混合相的拟平衡流参量均是相弛豫量的函数.

六、算 例

考虑激波在气体-固体微粒混合物中的定常传播[1,2], 它的流场图案比较清楚. 由于激波后 W 可与 u 相比较,或 W 甚至大于 u, 故对相弛豫理论仍是一个考验. 采用通常使用的粘性应力、热传导和粘性热耗散可以忽略的假定,两相拟平衡流方程组可以写成:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0, \tag{18}$$

$$\frac{d}{dx}(\rho u^2 + p) = -\frac{d}{dx}(\rho \varepsilon W^2), \tag{19}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\rho u\left(c_{pm} T_m + \frac{u^2}{2} + Z\frac{p}{\rho}\right)\right] = -\frac{d}{dx}\left\{\varepsilon\rho W\left[(c_{pp} - c_{vg})T_m + \frac{c_{pp}c_{vg}}{c_{pm}}(T_p - T_g) + \frac{3}{2}uW + \frac{\rho_g - \rho_p}{2\rho}W^2 + \frac{Zp}{\rho_p}\right]\right\}, \tag{20}$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R(1-k_p)}{1-Z}T_m - \varepsilon\frac{R}{1-Z}\frac{c_{pp}}{c_{pm}}(T_p - T_g). \tag{21}$$

相弛豫方程组为:

$$\frac{d}{dx}\left[4\varepsilon W+2\varepsilon(1-k_p)\frac{W^2}{u}+2k_pu+\frac{2Zp}{\rho u}\right]$$
$$=\frac{2}{\rho u}F_p=-\frac{2}{\tau_v}\frac{C_D}{C_{DS}}\frac{k_p}{u}W, \tag{22}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{2\varepsilon\frac{c_{pp}c_{vg}}{c_{pm}}(T_p-T_g)+\frac{\rho_pc_{pp}-\rho_gc_{vg}}{\rho}T_m+\frac{\rho_p-\rho_g}{2\rho}u^2+2\varepsilon uW+\frac{Zp}{\rho}\right.$$
$$+\frac{\varepsilon(\rho_g-\rho_p)}{2\rho}W^2+\varepsilon\frac{W}{u}\left[(c_{pp}+c_{vg})T_m+u^2+\frac{Zp}{\rho_p}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\rho_g-\rho_p}{\rho}uW+\frac{1-2\varepsilon}{2}W^2+\frac{(\rho_g-\rho_p)c_{pp}c_{vg}}{\rho c_{pm}}(T_p-T_g)\right]\right\}$$
$$=-\frac{2K_T}{\rho u}(T_p-T_g)=-\frac{2\rho_p}{\tau_T}(T_p-T_g). \tag{23}$$

由质量守恒方程和相速度定义，导出如下关系：

$$\frac{W}{u}=\frac{1}{\varepsilon}(k_{pe}-k_p),\ k_p=\frac{\rho_p}{\rho}, \tag{24}$$

$$k_pu_p=k_{pe}u,\ u_g(1-k_p)=u(1-k_{pe}), \tag{25}$$

其中 k_{pe} 表示远离激波下游之平衡流条件，τ_v 和 τ_T 分别是速度和温度的弛豫特征时间，C_D 和 C_{DS} 分别表示球的阻力系数和 Stokes 阻力系数．拟平衡流方程组 (18)—(21) 和相弛豫方程组 (22) 及 (23) 清楚地表明了激波在固粒-气体混合物中传播的流场结构：激波前混合物满足一维平衡流，激波引起大的扰动，气相扰动量满足通常的气动激波关系．而在气动激波厚度范围内，固粒来不及加速升温，故有

$$T_{p_2}=T_1,\ u_{p_2}=u_1,\ \frac{W_2}{u_1}=\frac{2(M_1^2-1)}{(\gamma+1)M_1^2},$$
$$\frac{T_{p_2}-T_{g_2}}{T_1}=-\frac{2(\gamma-1)(1+\gamma M_1^2)(M_1^2-1)}{(\gamma+1)^2M_1^2}. \tag{26}$$

这里足标 1 表示激波上游条件，足标 2 指气动激波后缘条件．相弛豫方程组 (22) 和 (23) 表明扰动将会衰减，扰动衰减后的平衡流动同样满足拟平衡流方程组 (18)—(21)，两相平衡流参量 ρ_e, u_e, T_e 与激波前动力学参量 ρ_1, u_1 和 T_1 的关系，故可由方程组 (18)—(21) 求出．

关于从气动激波后缘到平衡流之间的弛豫流动结构，由相弛豫方程 (22) 和 (23) 可直接获得如下有益的结论：1) 固粒群相对气相的速度和温度弛豫律，均不同于标准的指数弛豫律 $\exp\left(-\frac{x}{L_R}\right)$．以速度弛豫为例，方程(22)左端第一项"代表"标准指数弛豫律，其它三项(以第二项为最重要)表示动力学效应的影响，故是一种动力学弛豫律．2) 对于弱激波 $M_1\approx 1$, $W_2\ll u_1$，方程 (22) 左端诸项以第一项为主，动力学弛豫过度为标准弛豫律．但是随着激波变强，W_2 能够大于 u_2，方程 (22) 左端第二项变得越重要，速度弛豫不再符合标准指数弛豫方式，这与文献 [7] 的试验观察定性一致．3) 若假定在激波弛豫区中固粒无形状变化和相变，故能够讨论极限马赫数 $M_1\gg 1$ 时的激波弛豫结构，由方程 (22) 得到速度弛豫长度的估计为：

$$\xi_e=\frac{x_e}{\tau_vu_1}\approx\frac{4(\gamma+1)[\gamma+\eta(\gamma-1)]}{[(\gamma+1)+\eta(\gamma-1)]^2},$$
$$\eta=\frac{\rho_p}{\rho_g}.$$

图 2 给出 W/u_1 等诸参量随距离 $\xi=\frac{x}{\tau_v u_1}$ 变化的计算结果.

七、固粒群弛豫速率的试验测定问题

相弛豫方程组是统计平均的方程式，它们提供了计算两相间速度和温度弛豫速率的理论关系和试验测定弛豫速率的方案. 以速度弛豫为例，若两相速度差很小 $W \ll u$，拟平衡流偏离平衡流很小，由(22)式得到:

$$W(x)/W_0=\exp(-x/L_v). \qquad (27)$$

故若由试验测得 $W(x_1)=W_0e^{-1}$，则速度弛豫长度 $L_v=x_1$，这也是标准指数弛豫律情况下试验确定弛豫长度的熟知方法. 若两相速度差大 $W\approx u$，由于拟平衡流解(零阶渐近解) ρ，u和T为已知，故可由方程(22)求得:

$$L_v'=-W(x)\Big/\frac{d}{dx}\left[4\varepsilon W+2\varepsilon(1-k_p)\frac{W^2}{u}+2k_pu+\frac{2Zp}{\rho u}\right]. \qquad (28)$$

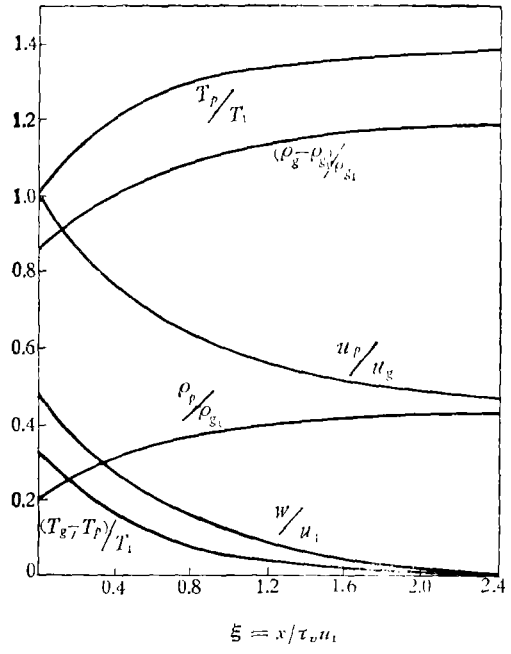

图 2 激波在气体-固体微粒混合物中的传播: 激波弛豫结构

(参数条件: $M_1=1.5$, $\gamma=1.4$, $\eta_1=0.2$, $c_{pp}/c_{vg}=0.5$, $C_D=24/R_e$, $N_u=2$)

若由试验测得 $W(x)$，则可由 (28) 式算出 L_v'. 由方程(23)同样能够写下温度弛豫长度 L_T 的公式，当拟平衡流零阶渐近解已知时，试验测出 (T_p-T_g)，即可由弛豫长度公式算出 L_T. 这样算出的速度和温度的弛豫长度是关于固粒群的统计弛豫长度，它们与先求一个球粒子的阻力因而弛豫长度，再乘以固粒数密度以求得固相的弛豫长度的方法显然不同. 这方法，只需知道固粒群中粒子的统计特性，对稀相 ($Z\ll 1$) 和浓相 (Z 不很小于 1) 情况原则上都适用.

参 考 文 献

[1] Pai, S. I., *Two Phase Flows,* Vieweg Tracts in Pure and Applied Physics Vol. 3, Vieweg, 1977.

[2] Soo, S. L., *Fluid Dynamics of Multiphase Systems,*, Blaidell Publishing Co. Waltham, Mass., 1967.

[3] Wallis, G. B., Review——Theoretical Models of Gas-Liquid Flows, *Journal of Fluids Engieering*, 104 (1982), 279.

[4] Crowe, C. T., Review-Numerical Models for Diluth Gas-particle Folws, *ibid.*, **104**(1982), 297.

[5] Lourenco, L., Riethmuller, M. L., Essers, J. A., The kinetic Model for Gas-Particle Flow and Its Numerical Implementation, in *The Proceedings of The International Conference on the Physical Modelling of Multiphase Flow,* Coventry, England, April, 1983.

[6] Chapman, S., Cowling, T. G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases,* 2nd ed., Cambridge, 1952.

[7] 余鸿儒、林建民、袁生学、李仲发，力学学报，1983，6: 531—537.