

# 热波现象的热质理论研究

胡锐锋, 曹炳阳\*

清华大学工程力学系, 热科学与动力工程教育部重点实验室, 北京 100084

\* E-mail: caoby@tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2007-12-07; 接受日期: 2008-07-25

国家自然科学基金资助项目(批准号: 50606018)

**摘要** 基于热质的概念建立了热量输运的守恒方程, 并得到了考虑热质运动的空间和时间惯性的普适导热方程, 该方程反映了一般条件下热的波动传递现象. 当热流和温度的空间惯性以及温度的时间惯性可以忽略时, 所得到的导热定律退化为 CV 模型, 表明 CV 模型实质上仅考虑了热流对时间的惯性效应. 对热波传递和叠加现象的数值分析表明: 当热扰动较小时, 热流对空间加速的惯性可以忽略, 基于热质理论的热波方程和 CV 模型符合得较好; 但是, 在描述较大的热扰动时, 由于热流对空间的加速惯性不能忽略, CV 模型的求解结果会出现负温度的非物理现象, 而基于热质理论的热波方程则克服了这一缺陷.

**关键词**

热波  
热质理论  
非傅立叶导热  
CV 模型

在经典传热学中, 描述导热现象的物理规律是法国数学家和物理学家傅立叶<sup>[1]</sup>于 1822 年提出的导热定律

$$q = -k\nabla T, \quad (1)$$

其中,  $q$  为热流密度,  $T$  为温度,  $k$  为热导率. 此时温度场的控制方程是抛物型的扩散方程, 隐含了热扰动的速度是无穷大. 对于通常条件下的导热现象, 实验结果能很好地符合傅立叶导热定律. 但是随着现代实验技术的发展, 人们发现在极低温、超快速加热等物理现象中傅立叶定律不再成立, 热扰动以有限速度传播, 这就是热波现象<sup>[2,3]</sup>.

Tisza<sup>[4]</sup>和 Landau<sup>[5]</sup>分别预言在液氦 II 中可能存在以有限速度传播的波状热流, 类似与压强扰动引起密度变化产生的声波, 称这种热扰动引起的效应为“第二声”. Peshkov<sup>[6]</sup>著名的实验验证了这个预言, 他的实验得出在 1.4 K 时, 液氦 II 中热波的传播速度为 19 m/s(比 He 中的声速小一个量级). 此外, Brorson 等人<sup>[7]</sup>测量了热脉冲穿过金属薄膜所需的时间, 从侧面证明了热波的存在. 总的来说, 关于热波现象的实

验研究由于难度太大而不多见.

为了解释热波现象, Cattaneo<sup>[8]</sup>和 Vernotte<sup>[9]</sup>先后分别提出了一个修正的导热定律

$$q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} = -k\nabla T, \quad (2)$$

式中,  $t$  为时间,  $\tau$  为驰豫时间. 对于一般的介质,  $\tau$  小于  $10^{-10} \sim 10^{-14}$  s. 此方程通常被称为 CV 模型. CV 模型联合能量方程得到的导热微分方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a\nabla^2 T, \quad (3)$$

其中,  $a = k / \rho c_v$  是热扩散率. 该方程为双曲型, 从而使得温度场中热扰动的传播速度为有限值. CV 模型的一个重要特点是认为导热过程中能量是以波的形式传播的, 即热波传递现象, 而不是傅立叶定律所指出的扩散形式. 因为  $\tau$  比较小, 通常条件下(2)式可简化为傅立叶导热定律(1)式, 但是, 当热流随时间的变化很大时(例如激光热脉冲)则会体现出热的波动传递性质.

此后, 很多学者基于 CV 模型对快速瞬态导热的

非傅立叶效应进行了理论分析和数值模拟, 见 Xu 和 Guo<sup>[10]</sup>, Antaki<sup>[11]</sup>, Cho 和 Juhng<sup>[12]</sup>, Fan 和 Lu<sup>[13]</sup>以及 Zhang 等人<sup>[14]</sup>的工作. Tang 和 Araki<sup>[15]</sup>则提出了测量弛豫时间的方法. 然而, Bai 和 Lavine<sup>[16]</sup>以及 Körner 和 Bergmann<sup>[17]</sup>指出基于 CV 模型的导热波动方程在一定条件下会产生负温度的非真实物理现象.

在最具代表性的 CV 模型中, 热流对时间的导数项意味着热流的建立要比温度场的建立滞后一定的时间, 代表着某种“热惯性”. 实际上, Nernst<sup>[18]</sup>于 1917 年就曾预言处于低温下的热良导体内可能有足够大的“热惯性”而产生“热振荡”. Onsager<sup>[19]</sup>于 1931 年指出傅立叶导热定律在描述导热过程时忽略了热流加速所需要的时间, 这一观点也隐含了热的传播具有“惯性”. 通常表征物质惯性大小的物理量为质量, 而传统上热在物理内涵上仅具有能量的含义. 过增元等人<sup>[20-22]</sup>将爱因斯坦质能关系引入声子气模型并提出了“热质”的概念, 认为热量运动具有质量属性, 并通过牛顿力学原理建立了热质的运动与传递的守恒方程. 在以前的热波现象研究中主要是从修正傅立叶导热定律的唯象模型出发, 现在由于考虑了热的质量属性则可以基于牛顿力学研究热量运输的波动效应. 本文基于热质概念建立热质运输控制方程, 该方程在一般条件下为具有阻尼的波动方程, 基于热质波动方程研究热波传递现象并同 CV 模型进行对比, 对热波传递和叠加现象的数值计算结果表明, CV 模型在一定条件下会得出负温度的非物理结果, 相同条件下基于热质理论的热波方程则满足物理真实性要求.

### 1 基于热质理论的热波方程

在狭义相对论的动力学理论中, 物体具有的质量和能量属性是统一的, 其关系由爱因斯坦质能关系式描述. 在基于热质概念的理论中, 热能的当量质量也可以通过引入爱因斯坦质能关系式来定义, 即<sup>[20-22]</sup>

$$\rho_h = \frac{\rho c_v T}{c^2}, \quad (4)$$

其中,  $\rho_h$  为热质的密度,  $\rho$  为物体的密度,  $c_v$  为物体的定容比热,  $c$  为真空中的光速. 当固体介质中存在温度梯度时, 热就会从高温流向低温, 热质就具有宏观运动速度, 即漂移速度. 热质的运动速度可以从传热

学中常用的热流密度导出, 即

$$q_h = \rho_h u_h \text{ 或 } q = \rho c_v T u_h, \quad (5)$$

其中,  $q_h$  为热质流量,  $q_h = q/c^2$ ;  $u_h$  为热质流动速度;  $q$  为热流密度. 可见, 在引入热质的概念后就可以类似流体力学那样基于牛顿力学原理建立热质流动的控制方程来研究热量传递问题.

考虑均匀导体中的一维导热过程如图 1 所示. 热质在流动过程中满足连续性方程

$$\frac{\partial \rho_h}{\partial t} + \frac{\partial q_h}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

将(4)和(5)式代入(6)式可以得到

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

(7)式是能量守恒方程, 即热质理论的连续性方程与能量守恒方程等价.

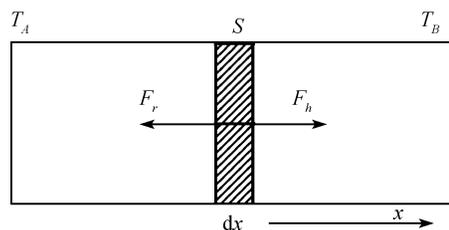


图 1 热质在导体中的输运过程示意图

对于体积微元  $dV = S dx$  内的热质运动, 根据力学平衡分析, 热质受到来自热质压力差引起的驱动力  $dF_h$  和来自介质内部的阻力  $dF_r$ , 由于热质在加速运动, 因而还受到惯性力作用  $dF_i$ , 三者分别表示如下

$$dF_h = \frac{dp_h}{dx} dV = -2\gamma \rho_h c_v \frac{dT}{dx} dV, \quad (8a)$$

$$dF_r = -\xi_h u_h \rho_h dV, \quad (8b)$$

$$dF_i = \frac{D(\rho_h u_h)}{Dt} dV = \left( \frac{\partial(\rho_h u_h)}{\partial t} + u_h \frac{\partial(\rho_h u_h)}{\partial x} \right) dV, \quad (8c)$$

其中,  $\gamma$  为固体的格留乃森常数. 热质所受阻力采用粘滞阻力公式, 即阻力与物体运动的速度成正比, 比例系数为  $\xi_h$ . 热质运动的惯性力体现在两个方面: 一是热质运动速度随时间发生变化, 即时间惯性; 二是热质运动速度在空间发生变化, 即空间惯性. 根据牛顿第二运动定律  $dF_i = dF_h + dF_r$ , 可以得到

$$\frac{\partial(\rho_h u_h)}{\partial t} + u_h \frac{\partial(\rho_h u_h)}{\partial x} = -2\gamma \rho_h c_v \frac{\partial T}{\partial x} - \xi_h \rho_h u_h, \quad (9)$$

上式即为热质运动的动量守恒方程.

当所有惯性力可以忽略时, (9)式退化为经典的傅立叶导热定律<sup>[22]</sup>. 当惯性力不能忽略时, 导热过程不再符合傅立叶导热定律从而体现出非傅立叶效应, 从这个角度来看, 傅立叶导热定律描述的实际上是热流阻力和驱动力的平衡关系式.

若忽略所有的惯性力, 则热质的动量方程可简化为

$$2\gamma c_v \frac{\partial T}{\partial x} + \xi_h u_h = 0, \quad (10)$$

由傅立叶导热定律, 可以得到

$$\xi_h = \frac{2\gamma c^2 \rho_h^2 c_v}{k}, \quad (11)$$

联立(4), (5), (9)和(11)式, 得到

$$q + \tau \left( \frac{\partial q}{\partial t} + u_h \frac{\partial q}{\partial x} \right) - \tau u_h \left[ \frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} + u_h \frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial x} \right] = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (12)$$

其中, 特征时间  $\tau = a/2\gamma c_v T$ . 对常规的导热条件, 特征时间的量级在  $10^{-10} \sim 10^{-14}$  s, 和 CV 模型中的驰豫时间在同一量级, 热流的变化率在该时间量级时才表现出热波现象.  $\tau$  表征介质对热质运动的阻力性质, 它决定于介质的物性和温度, 和 CV 模型中的驰豫时间不同. (12)式为基于热质理论得到的普适的导热方程, 由于方程左侧相对于傅立叶导热定律增加了热流和温度分别对时间和空间的导数, 基于热质理论得到的导热方程是双曲型的波动方程. 公式左侧第一项对应的是热质流动的阻力, 公式右侧一项对应的是热质驱动力, 另外 4 项对应的是热质运动的惯性力.

基于热质理论的导热方程(12)式中的 4 个惯性力项从物理机制上来看可以分成两部分: 一部分是与热流和温度对时间的惯性相对应, 即  $\tau \partial q / \partial t$  和  $\tau [u_h \partial(\rho c_v T) / \partial t]$ ; 另一部分是与热流和温度对空间的惯性相对应, 即  $\tau u_h \partial q / \partial x$  和  $\tau u_h [u_h \partial(\rho c_v T) / \partial x]$ . 将(12)式与 CV 模型(2)式对比发现, 当热流和温度的空间惯性效应以及温度的时间惯性效应可以忽略时, (12)式即退化为 CV 模型, 这说明 CV 模型实际上仅考虑了热流的时间惯性效应. 当热流的作用时间非常短而温度梯度不算太大时, 以上简化是可以接受的. 但当温度梯度很大从而热流密度非常高时, 热质运动的

速度也会变得非常大, 使得热流和温度的空间惯性效应以及温度的时间惯性效应变得非常大. 在这种情况下, 热流和温度的空间惯性效应将会变得比较明显, 从而 CV 模型不再能用来描述这样的导热过程.

## 2 热波传递问题的数值求解

考虑一个一维的热波传递问题, 如图 2 所示,  $y$  和  $z$  方向为无限大;  $x$  方向的长度为  $L$ , 不妨令  $L=1$ ; 物体在初始时刻的温度  $T_0$  是均匀分布, 初始时刻后两边界的温度同时降到  $T_w$  并保持不变. 这样, 左右两个边界的热扰动会激发两个热波向导体中间传递并发生叠加.

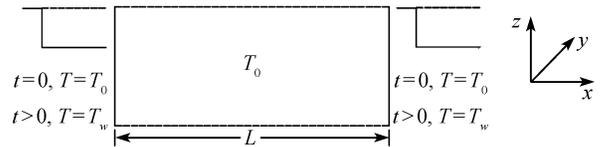


图 2 热扰动传播问题示意图

### 2.1 CV 模型的求解

首先对方程做无量纲化, 令

$$t^* = v^2 t / a, \quad x^* = vx / a, \quad T^* = T / T_0,$$

其中,  $v = \sqrt{a/\tau}$ .  $t^*$ ,  $x^*$  和  $T^*$  是无量纲化后的时间、位置和温度, 将其代入 CV 模型(2)式中并联立能量方程(7), 得到无量纲导热方程

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial t^{*2}} + \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}. \quad (13a)$$

问题的初始条件为

$$T^*(x^*, 0) = 1, \quad \frac{\partial T^*}{\partial t^*}(x^*, 0) = 0, \quad (13b)$$

边界条件为

$$T^*(0, t^*) = T^*(1, t^*) = 1 + A, \quad (13c)$$

其中,  $A = (T_w - T_0) / T_0$ .

对方程(13a)离散化, 空间域采用中心差分, 时间域采用向后差分, 则得到数值求解无量纲 CV 模型的一组封闭代数方程.

### 2.2 热质方程的求解

基于热质理论的导热方程(12)包含有温度  $T$  和热流密度  $q$  两个未知数, 为了封闭问题还需要联立热质

的连续方程(6)或(7). 由于(12)式等价于(6)式联立(9)式, 为了简化问题我们数值求解(6)和(9)式来获得温度分布.

由于初始时刻整个温度场是均匀的, 所以初始热流为零, 即  $q|_{t=0}=0$ ; 边界上应用(7)式, 并且由

$$\frac{\partial T}{\partial t}|_w=0 \text{ 得到 } \frac{\partial q}{\partial x}|_w=0.$$

因此对于热波传递问题, 热质方程组及其定解条件可写为

$$\begin{aligned} \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{q}{\rho c_v T} \frac{\partial q}{\partial x} + \rho c_v^2 T \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\rho c_v^2 T q}{k} &= 0, \\ x=0: T &= T_w, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ x=L: T &= T_w, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ t=0: T &= T_0 (T_0 > T_w), \quad q = 0, \end{aligned} \tag{14a}$$

令  $t^* = t/(L^2/a)$ ,  $x^* = x/L$ ,  $T^* = T/T_0$ ,  $q^* = q/(\rho a c_v T_0/L)$ , 代入到(14a)式中得到无量纲化的热质方程组及其定解条件

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial q^*}{\partial x^*} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^*}{\partial t^*} + \frac{q^*}{T^*} \frac{\partial q^*}{\partial x^*} + T^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + q^* T^* &= 0, \\ x^* = 0: T^* &= \frac{T_w}{T_0} = 1 + A, \quad \frac{\partial q^*}{\partial x^*} = 0, \\ x^* = 1: T^* &= \frac{T_w}{T_0} = 1 + A, \quad \frac{\partial q^*}{\partial x^*} = 0, \\ t^* = 0: T^* &= 1, \quad q^* = 0. \end{aligned} \tag{14b}$$

对方程(14b)离散化, 空间域采用中心差分, 时间域采用向前差分, 可得到数值求解无量纲热质方程的一组封闭代数方程.

### 3 数值结果与分析

对于图 2 所示的热波传递和叠加问题, 我们在边界扰动温度分别为  $T_w^*=0.9$ ,  $T_w^*=0.5$  和  $T_w^*=0.3$  的情况下分别求解 CV 模型和热质方程, 通过不同时刻的温度分布讨论热波传递和叠加现象.

当热扰动比较小时,  $T_w^*=0.9(A=-0.1)$ , 图 3 给出了 0.1, 0.4, 0.8, 1.2 时刻 CV 模型和热质方程求解出的温度分布. 两侧边界温度的突然降低会产生两个温度波峰并各自向前传递, 在 0.8 时刻两个波峰已经相遇并产生叠加. 对于温度场波峰的前进以及整个温度场的分布随时间的变化, 热质方程的结果与 CV 模

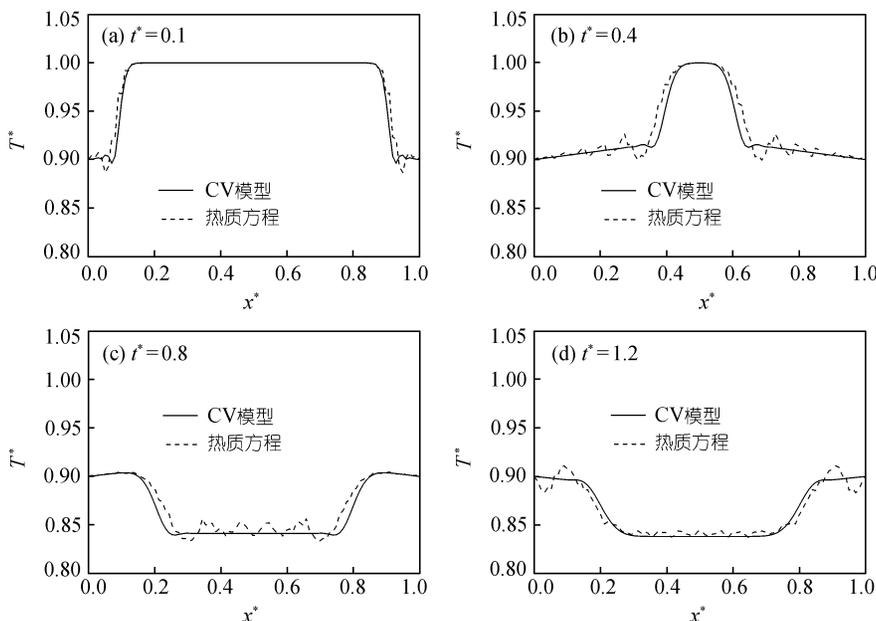


图 3  $T_w^*=0.9$  时不同时刻的温度分布

型的结果十分接近, 其中基于热质方程的数值解结果表现出的微小波动原因在于使用显式格式离散方程. 当热扰动和热流都比较小时, 热流在空间加速的惯性可以忽略, 所以基于热质理论的热波方程和 CV 模型能够比较好地符合.

当  $T_w^* = 0.5 (A = -0.5)$ , 图 4 给出了 0.1, 0.4, 0.8, 1.2 时刻 CV 模型和热质方程求解出的温度分布, 由热质理论和 CV 模型解得的温度扰动无量纲传播速度基本

相同, 并且都没有出现负温度的物理不真实解, 但是求解 CV 模型得到的温度分布比求解热质理论得到的温度分布要陡一些. 也就是说, 热质理论的热波方程获得物体在扰动初期的温度下降要慢一些, 这是由于热质理论方程中热流在空间传播时由于加速需克服惯性力所导致的.

当热扰动很大时,  $T_w^* = 0.3 (A = -0.7)$ . 图 5 给出了 0.1, 0.4, 0.8, 1.2 时刻 CV 模型和热质方程求解出的温

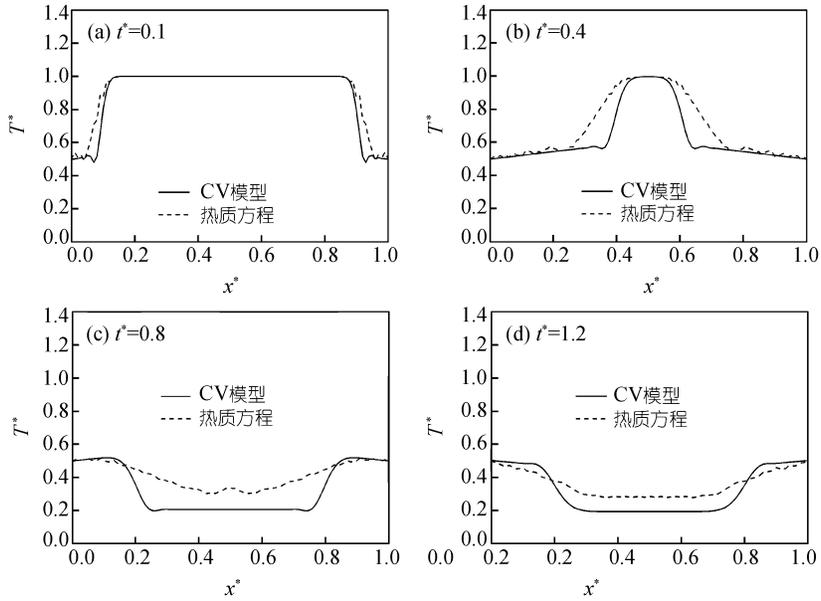


图 4  $T_w^* = 0.5$  时不同时刻的温度分布

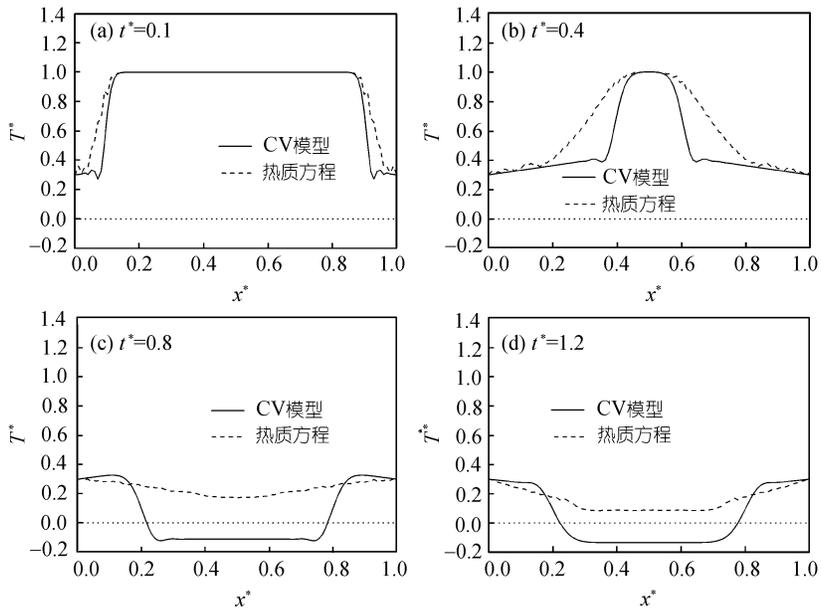


图 5  $T_w^* = 0.3$  时不同时刻的温度分布

度分布, 由热质理论和 CV 模型解得的温度扰动无量纲传播速度基本相同. 同样, CV 模型得到的波峰后沿温度分布较之热质理论得到的要陡, 并且从图 5(c) 和(d) 可以看到, CV 模型的结果在两个温度波峰叠加时温度会出现负值, 这是非真实物理现象, 也反映了 CV 模型在描述较大的热扰动时的缺陷, 这和文献[16] 的结果相同. 而求解热质理论得到的结果则不会出现负温度, 因为热质理论方程中较大的热流加速和温度急剧变化都具有惯性, 导致在热扰动较大时这种惯性会使得温度分布变化较之 CV 模型平缓. 根据热质的定义和状态方程<sup>[22]</sup>, 在基于热质理论的波动方程中温度以热质密度表征, 当热质中产生热波时, 热质密度表现出稠密和稀疏的分布, 由于热质密度不会降为零, 更不会降为负值, 从而温度也不会变为负值. 可见, 在描述较大的热扰动时, 由于热流的空间加速惯性力不能够被忽略, 基于热质理论的普适导热定律克服了 CV 模型出现负温度非物理现象的缺陷, 基于热质理论的普适导热定律优于 CV 模型.

## 4 结论

1) 基于热质的概念建立了热量运输的守恒方程并得到普适的导热方程. 在惯性力可以忽略时该定律退化为傅立叶导热定律. 傅立叶导热定律的物理本质是热质流动阻力和驱动力的平衡关系式, 而非傅立叶效应的本质是由热质的惯性效应引起的.

2) 基于热质理论的导热方程包含了热流和温度分别对时间和空间的惯性项, 当热流和温度对空间的惯性效应以及温度对时间的惯性效应可以忽略时, 普适导热方程即退化为 CV 模型, 反映出 CV 模型物理实质上仅考虑了热流的时间惯性效应.

3) 对热波传递现象的数值计算表明: 当热扰动和热流都比较小时, 热流在空间加速的惯性是可以忽略的, 基于热质理论的热波方程和 CV 模型符合得很好; 在描述较大的热扰动时, CV 模型的结果在两个温度波峰叠加时会出现负温度的非物理现象, 而基于热质理论的热波方程则克服了 CV 模型的这一缺陷, 此时由于热流的空间加速惯性力不能够被忽略, 基于热质理论的热波方程较之 CV 模型更符合物理真实性.

## 参考文献

- 1 Fourier J. Analytical Theory of Heat. New York: Dover Publications, 1955
- 2 Joseph D D, Preziosi L. Heat waves. Rev Mod Phys, 1989, 61(1): 41—73 [\[DOI\]](#)
- 3 张浙, 刘登瀛. 非傅立叶热传导研究进展. 力学进展, 2000, 30(3): 446—456
- 4 Tisza L. Sur la supraconductibilité thermique de l'hélium II liquide et la statistique de Bose-Einstein. C R Acad Sci, 1938, 207(22): 1035—1037
- 5 Landau L. The theory of superfluidity of helium II. Phys Rev, 1941, 60(4): 356—358
- 6 Peshkov V. Second sound in helium II. J Phys, 1944, 8: 381—382
- 7 Brorson S D, Fujimoto J G, Ippen E P. Femtosecond electronic heat-transport dynamics in thin gold films. Phys Rev Lett, 1987, 59(17): 1962—1965 [\[DOI\]](#)
- 8 Cattaneo C. Sulla conduzione de calore. Atti Sem Mat Fis Univ Modena, 1948, 3: 83—101
- 9 Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur. C R Acad Sci, 1958, 246: 3154—3155
- 10 Xu Y S, Guo Z Y. Heat wave phenomena in IC chips. Int J Heat Mass Transfer, 1995, 38(15): 2919—2922 [\[DOI\]](#)
- 11 Antaki P J. Solution for non-Fourier dual phase lag heat conduction in a semi-infinite slab with surface heat flux. Int J Heat Mass Transfer, 1998, 41(14): 2253—2258 [\[DOI\]](#)
- 12 Cho C J, Juhng W N. Slab subjected to periodic surface heating. J Korean Phys Soc, 2000, 36(4): 209—214
- 13 Fan Q M, Lu W Q. A new numerical method to simulate the non-Fourier heat conduction in a single-phase medium. Int J Heat Mass Transfer, 2002, 45(13): 2815—2821 [\[DOI\]](#)
- 14 Zhang H W, Zhang S, Guo X, et al. Multiple spatial and temporal scales method for numerical simulation of non-classical heat conduction problems: One dimensional case. Int J Solids Struct, 2005, 42(3-4): 877—899 [\[DOI\]](#)
- 15 Tang D W, Araki N. Analytical solution of non-Fourier temperature response in a finite medium under laser-pulse heating. Heat Mass Transfer, 1996, 31(5): 359—363 [\[DOI\]](#)
- 16 Bai C, Lavine A S. On hyperbolic heat conduction and the second law of thermodynamics. J Heat Transfer, 1995, 117(2): 257—263
- 17 Körner C, Bergmann H W. The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation. Appl Phys A, 1998, 67(4): 397—401 [\[DOI\]](#)
- 18 Nernst W. Die Theoretischen Grundlagen des n Warmestatzes. Halle: Knapp, 1917
- 19 Onsager L. Reciprocal relations in irreversible processes. Phys Rev, 1931, 37(4): 405—426
- 20 过增元. 热质的运动和传递—热质和热子气. 工程热物理论, 2006, 27(4): 631—634
- 21 过增元, 曹炳阳, 朱宏晔, 等. 声子气的状态方程和声子气运动的守恒方程. 物理学报, 2007, 56(6): 3306—3312
- 22 Cao B Y, Guo Z Y. Equation of motion of a phonon gas and non-Fourier heat conduction. J Appl Phys, 2007, 102(5): 053503 [\[DOI\]](#)