

# 理想塑性材料扩展裂纹的平面应变问题

王 自 强

(中国科学院力学研究所, 北京)

## 摘 要

本文从三维塑性流动理论出发, 导出了理想塑性材料平面应变问题的基本方程。进而对扩展裂纹问题建立了完整的定解方程和速度场求解公式。已有的渐近方程只是预解方程和零级定解方程的组合。本文证实了已有的中心扇形区, 虽然满足了渐近方程, 但不能适应高阶渐近方程。

## 一、引 言

关于理想塑性材料扩展裂纹的平面应变问题, 近年来引起了很多学者的兴趣。Слепян<sup>[1]</sup>首先得到了弹性不可压缩条件下, 定常扩展裂纹顶端弹塑性场的渐近解。文献[2]讨论了可压缩性对定常扩展裂纹弹塑性场的影响, 提出了渐近解应由五个区域组成。Drugan, Rice 和 Sham<sup>[3]</sup>也提出他们自己的渐近解。

本文对这个问题进行了进一步的分析。首先从塑性流动的三维理论出发, 导出了理想塑性材料平面应变问题的基本方程。针对扩展裂纹问题, 建立了各级完整的定解方程和求解速度场的公式。进而讨论了裂纹顶端各类区域, 证实了已有的中心扇形区, 虽然满足渐近方程, 但不能适应高阶定解方程。

## 二、基 本 方 程

以  $x, y, z$  表示固定的直角坐标系,  $x_1, x_2, x_3$  乃是其张量写法。

### 1. 屈服条件

$$\frac{1}{4} (\sigma_y - \sigma_x)^2 + \tau_{xy}^2 + \frac{3}{4} S_z^2 = k^2, \quad (1)$$

式中  $k$  为剪切屈服强度,  $S_x$  是  $z$  方向的应力偏量。Mises 屈服条件有多种通用公式, 公式(1)适合于平面应变问题分析。

### 2. 本构关系

三维的 Prandtl-Reuss 流动法则可表示为:

$$D_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} + \lambda S_{ij}, \quad (2)$$

式中  $D_{ij}$  是应变率张量, 它们可用速度场表示,

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\partial V_i / \partial x_j + \partial V_j / \partial x_i). \quad (3)$$

### 3. 平面应变控制方程

对于平面应变问题, 有关的物理量都只是  $x_1, x_2$  的函数. 另有,

$$D_{33} = \frac{(1+\nu)}{E} \dot{\sigma}_{33} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} + \lambda S_{33} = 0.$$

由上式推得

$$\dot{S}_{33} + \frac{2}{3} E \lambda S_{33} = - \frac{2}{3} \varepsilon \dot{\sigma}_{\alpha\alpha}. \quad (4)$$

这里  $\varepsilon = \frac{1}{2} - \nu$ , 希腊字母  $\alpha, \beta, \gamma, \rho$  只取值 1, 2. 重复下标是求和的缩写, 方程 (4) 是平面应变控制方程.

### 4. 应力函数及应力

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad (5)$$

记  $P_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}(\sigma_{\rho\rho}/2)$ .

利用方程 (4), 本构方程 (2) 可改写为:

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu} (\dot{\sigma}_{\alpha\beta} - \nu \dot{\sigma}_{\rho\rho} \delta_{\alpha\beta}) + \lambda P_{\alpha\beta} - \varepsilon \lambda S_{33} \delta_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

方程 (1), (3)–(6) 即是理想塑性材料平面应变问题的基本方程.

## 三、扩展裂纹问题的定解方程

如图 1 所示, 建立极点随裂纹顶端一起移动的极坐标系  $(r, \theta)$ . 对固定的物质点, 将  $(r, \theta)$  看作是裂纹长度  $a$  的函数, 必有:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial r}{\partial a} \right)_M = -\cos \theta, \\ \left( \frac{\partial \theta}{\partial a} \right)_M = \frac{1}{r} \sin \theta. \end{cases} \quad (7)$$

假设在裂纹顶端附近, 应力函数  $\phi$ , 应力偏差  $S_x$  和  $\lambda$  可展成下列级数:

$$\phi = r^2 \sum_{m=0,1}^{\infty} F_m(\theta, \tau) t^{-m},$$

$$\lambda = \frac{a}{r} \sum_{m=-1,0}^{\infty} \lambda_m(\theta, \tau) t^{-m},$$

$$S_3 = S_{33} = \sum_{m=0,1}^{\infty} S_m(\theta, \tau) t^{-m}, \quad (8)$$

$$t = L n(R/r), \quad a = \frac{da}{d\tau},$$

其中  $R$  是表征塑性区大小的参数,  $\tau$  是广义的时间参量. 由此,

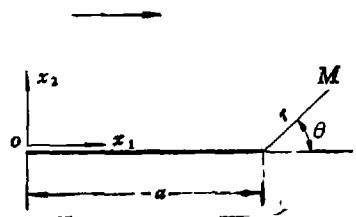


图 1

$$\begin{cases} \sigma_r = \sum_{m=0,1}^{\infty} \sigma_{rm} t^{-m}, & \sigma_{\theta} = \sum_{m=0,1}^{\infty} \sigma_{\theta m} t^{-m}, \\ \tau_{r\theta} = \sum_{m=0,1}^{\infty} \tau_{r\theta m} t^{-m}, & \sigma = \sum_{m=0,1}^{\infty} \sigma_m t^{-m}, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rm} = F_m'' + 2F_m + (m-1)F_{m-1}, \\ \sigma_{\theta m} = 2F_m + 3(m-1)F_{m-1} + (m-1)(m-2)F_{m-2}, \\ \tau_{r\theta m} = -[F_m' + (m-1)F_{m-1}'], \\ \sigma_m = [F_m'' + 4F_m + 4(m-1)F_{m-1} + (m-1)(m-2)F_{m-2}] \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

这里约定

$$F_k(\theta, \tau) = 0, \quad k = -1, -2.$$

对应力率函数  $\phi$  有

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= a \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \sin \theta - \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta \right] + \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \\ &= r a \sum_{m=0,1}^{\infty} f_m t^{-m} + r^2 \sum_{m=0,1}^{\infty} \frac{\partial F_m}{\partial \tau} t^{-m}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$f_m = F_m' \sin \theta - 2F_m \cos \theta - (m-1)F_{m-1} \cos \theta. \quad (12)$$

以  $\dot{\sigma}_r, \dot{\sigma}_{\theta}, \dot{\tau}_{r\theta}$  表示应力率张量在极坐标上的分量, 则有:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial \theta^2} = \frac{a}{r} \sum_{m=0,1}^{\infty} \dot{\sigma}_{rm} t^{-m} + \sum_{m=0,1}^{\infty} \ddot{\sigma}_{rm} t^{-m}, \\ \dot{\sigma}_{\theta} = \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial r^2} = \frac{a}{r} \sum_{m=0,1}^{\infty} \dot{\sigma}_{\theta m} t^{-m} + \sum_{m=0,1}^{\infty} \ddot{\sigma}_{\theta m} t^{-m}, \\ \dot{\tau}_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta} \right) = \frac{a}{r} \sum_{m=0,1}^{\infty} \dot{\tau}_{r\theta m} t^{-m} + \sum_{m=0,1}^{\infty} \ddot{\tau}_{r\theta m} t^{-m}, \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{rm} = f_m'' + f_m + (m-1)f_{m-1}, \\ \dot{\sigma}_{\theta m} = (m-1)f_{m-1} + (m-1)(m-2)f_{m-2}, \\ \dot{\tau}_{r\theta m} = -(m-1)f_{m-1}', \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \ddot{\sigma}_{rm} = \frac{\partial F_m''}{\partial \tau} + 2 \frac{\partial F_m}{\partial \tau} + (m-1) \frac{\partial F_{m-1}}{\partial \tau}, \\ \ddot{\sigma}_{\theta m} = 2 \frac{\partial F_m}{\partial \tau} + 3(m-1) \frac{\partial F_{m-1}}{\partial \tau} + (m-1)(m-2) \frac{\partial F_{m-2}}{\partial \tau}, \\ \ddot{\tau}_{r\theta m} = - \left[ \frac{\partial F_m'}{\partial \tau} + (m-1) \frac{\partial F_{m-1}'}{\partial \tau} \right]. \end{cases} \quad (15)$$

这里约定

$$f_K(\theta, \tau) = 0, \quad K = -1, -2.$$

对应力偏量  $S_s$  及平均应力  $\sigma$  有

$$\begin{cases} \dot{S}_s = \frac{a}{r} \sum_{m=0,1}^{\infty} \dot{S}_m t^{-m} + \sum_{m=0,1}^{\infty} \frac{\partial S_m}{\partial \tau} t^{-m}, \\ \dot{\sigma} = (\dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_{\theta})/2 = \frac{a}{r} \sum_{m=0,1}^{\infty} \dot{\sigma}_m t^{-m} + \sum_{m=0,1}^{\infty} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \tau} t^{-m}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \dot{S}_m = S'_m \sin \theta - (m-1)S_{m-1} \cos \theta, \\ \dot{\sigma}_m = \sigma'_m \sin \theta - (m-1)\sigma_{m-1} \cos \theta, \end{cases} \quad m \geq 0. \quad (17)$$

这里约定

$$S_k(\theta, \tau) = \sigma_k(\theta, \tau) = 0, \quad k = -1.$$

又有

$$\begin{cases} P_r = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) = \sum_{m=0,1}^{\infty} P_{rm} t^{-m}, \\ \dot{P}_r = \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta) = \sum_{m=0,1}^{\infty} \dot{P}_{rm} t^{-m} + \frac{\dot{a}}{r} \sum_{m=0,1}^{\infty} \dot{P}_{rm} t^{-m}, \\ P_{rm} = \{F''_m - 2(m-1)F_{m-1} - (m-2)(m-1)F_{m-2}\}/2, \\ \dot{P}_{rm} = \{f'_m + f_m - (m-2)(m-1)f_{m-2}\}/2, \\ \dot{P}_{rrm} = \left\{ \frac{\partial F''_m}{\partial \tau} - 2(m-1) \frac{\partial F_{m-1}}{\partial \tau} - (m-2)(m-1) \frac{\partial F_{m-2}}{\partial \tau} \right\} / 2. \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \lambda P_r = \frac{\dot{a}}{r} \sum_{m=-1,0}^{\infty} h_m^* t^{-m}, \\ \lambda \tau_{r\theta} = \frac{\dot{a}}{r} \sum_{m=-1,0}^{\infty} k_m^* t^{-m}, \\ h_m^* = \sum_{k=-1,0}^m \lambda_k P_{rm-k}, \quad k_m^* = \sum_{k=-1,0}^m \lambda_k \tau_{r\theta m-k}. \end{cases} \quad (19)$$

本构关系的极坐标形式为:

$$\begin{cases} D_r = \lambda P_r + \left\{ (1+\nu) \dot{P}_r + 3\varepsilon \left[ \dot{\sigma} + \frac{1}{2} \dot{S}_s \right] \right\} / E, \\ D_\theta = \lambda P_\theta + \left\{ (1+\nu) \dot{P}_\theta + 3\varepsilon \left[ \dot{\sigma} + \frac{1}{2} \dot{S}_s \right] \right\} / E, \\ D_{r\theta} = \lambda P_{r\theta} + \frac{(1+\nu)}{E} \dot{\tau}_{r\theta}. \end{cases} \quad (20)$$

将(16), (18), (19)式代入上式,得:

$$\begin{cases} D_r = \frac{\dot{a}}{r} \sum_{m=-1,0}^{\infty} h_m t^{-m} + O(t), \\ D_\theta = \frac{\dot{a}}{r} \sum_{m=-1,0}^{\infty} j_m t^{-m} + O(t), \\ D_{r\theta} = \frac{\dot{a}}{r} \sum_{m=-1,0}^{\infty} k_m t^{-m} + O(t). \end{cases} \quad (21)$$

$$h_{-1} = h_{-1}^*, \quad j_{-1} = -h_{-1}^*,$$

$$\begin{cases} h_m = h_m^* + \left[ (1+\nu) \dot{P}_{rm} + 3\varepsilon \dot{\sigma}_m + \frac{3}{2} \varepsilon \dot{S}_m \right] / E, \\ j_m = -h_m^* + \left[ -(1+\nu) \dot{P}_{rm} + 3\varepsilon \dot{\sigma}_m + \frac{3}{2} \varepsilon \dot{S}_m \right] / E, \\ k_m = k_m^* + \frac{(1+\nu)}{E} \dot{\tau}_{r\theta m}, \quad m \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

在弹性卸载区,速度场的奇性不可能高于  $\ln(R/r)$ 。考虑到速度场的连续性及方程(21),速度场可展成下列级数,

$$\begin{cases} V_r = a \left\{ t \sum_{m=0,1}^{\infty} V_{rm} t^{-m} + V_{r1}^* \ln t \right\} + O(r \cdot t), \\ V_{\theta} = a \left\{ t \sum_{m=0,1}^{\infty} V_{\theta m} t^{-m} + V_{\theta 1}^* \ln t \right\} + O(r \cdot t). \end{cases} \quad (23)$$

速度场与应变率的关系为:

$$D_r = \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad (24)$$

$$D_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r}, \quad (25)$$

$$D_{r\theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_{\theta} \right) + \frac{\partial V_{\theta}}{\partial r} \right\}. \quad (26)$$

利用(21), (24)和(25)式得:

$$\begin{cases} h_{-1}(\theta, \tau) = 0, \\ V_{r0} = -h_0, \quad V_{\theta 0} = H_0 + I_{-1}, \\ V_{r1} = -f', \quad V_{\theta 1} = f + I_0, \\ V_{r1}^* = -h_1, \quad V_{\theta 1}^* = H_1, \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} V_{rm} = h_m/(m-1), \\ V_{\theta m} = I_{m-1} - H_m/(m-1), \end{cases} \quad m \geq 2. \quad (28)$$

将上述公式代入(26)式,得各级协调方程

$$\begin{cases} V'_{r0} - V_{\theta 0} = 2k_{-1}, \\ V'_{r1} - V_{\theta 1} = 2k_0 + V_{\theta 0}, \\ V'_{r2} - V_{\theta 2} = 2k_1 + V_{\theta 1}^*, \\ V_{r1}^{*'} - V_{\theta 1}^* = 0, \end{cases} \quad (29)$$

$$V'_{rm} - V_{\theta m} + (m-2)V_{\theta m-1} = 2k_{m-1}, \quad m > 2 \quad (30)$$

或改写为:

$$\begin{cases} h'_0 + H_0 = -2k_{-1}, \quad h_{-1} = 0, \\ f'' + f = -2k_0 - (I_0 + H_0), \\ h'_1 + H_1 = 0, \\ h'_2 + H_2 = 2k_1 + (I_1 + H_1), \\ h'_m + H_m = 2(m-1)k_{m-1} + (m-1)[I_{m-1} + H_{m-1}] \\ \quad - (m-1)(m-2)I_{m-2}, \quad m > 2. \end{cases} \quad (31)$$

这里

$$H_m = \int h_m d\theta, \quad I_m = \int i_m d\theta,$$

记

$$\lambda S_n = \frac{a}{r} \sum_{m=-1,0}^{\infty} q_m t^{-m}, \quad (32)$$

则有

$$q_m = \sum_{k=-1,0}^m \lambda_k S_{m-k}.$$

将上面的式子代入 (4) 式, 比较不同的  $z$  幂次, 便得到各级平面应变控制方程:

$$\begin{cases} q_{-1} = 0, \\ q_m = - \left\{ 2\epsilon \sigma_m + \frac{3}{2} S_m \right\} / E, \quad m \geq 0. \end{cases} \quad (33)$$

屈服条件 (1) 可写成极坐标形式

$$P_r^2 + \tau_{r\theta}^2 + \frac{3}{4} S_z^2 = k^2.$$

将 (9), (18) 式代入上式, 得各级屈服条件,

$$P_{r0}^2 + \tau_{r\theta 0}^2 + \frac{3}{4} S_0^2 = k^2, \quad (34)$$

$$\sum_{i=0}^m \left\{ P_{ri} P_{r\theta m-i} + \tau_{r\theta i} \tau_{r\theta m-i} + \frac{3}{4} S_i S_{m-i} \right\} = 0, \quad m \geq 1, \quad (35)$$

方程 (31), (33)–(35), 即是扩展裂纹问题的全部定解方程。

由公式 (8) 不难看出, 关于  $\phi$ ,  $S_z$ ,  $\lambda$  的展开式并不是唯一的。对不同的具体问题, 需要不同的级数展开式。对于扩展裂纹问题, 选择以  $z$  为自变量的展开式 (8) 是需要的。一个比展开式 (8) 更为普遍的级数形式为:

$$\begin{cases} \phi = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2+\mu_n} \phi_n(z, \theta, \tau), \\ \lambda = \frac{a}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(z, \theta, \tau) r^{\mu_n}, \\ S_z = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\mu_n} S_n(z, \theta, \tau), \\ \phi_n = \sum_{m=0}^{\infty} F_{nm}(\theta, \tau) z^{-m}, \\ \lambda_n = \sum_{m=-1,0}^{\infty} \lambda_{nm} z^{-m}, \\ S_n = \sum_{m=0,1}^{\infty} S_{nm} z^{-m}, \\ \mu_0 = 0, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 \cdots \end{cases} \quad (36)$$

从上式出发也可建立相应的定解方程。限于篇幅, 这里不再细述。对于讨论局部解而言, 展开式 (8) 是足够了。

#### 四、连接条件

利用应力函数  $\phi$ 、应力偏量  $S_z$  和标量  $\lambda$  作为基本未知量时, 连接条件变得相当简单。

设想  $\Gamma$  是不同区域之间的任意的分界曲线, 应力分量的连续条件归之为:

$$[\sigma_n]_r = [\sigma_t]_r = [\tau_{nr}]_r = 0, \quad (37)$$

这里  $[\phi]_r$  表示函数  $\phi$  通过  $\Gamma$  时的间断量. 利用应力函数  $\phi$ , 公式 (37) 可表示为:

$$[\phi]_r = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_r = \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right]_r = 0. \quad (38)$$

速度场的连续条件可表示为:

$$[V_n]_r = [V_t]_r = 0. \quad (39)$$

如果曲线  $\Gamma$  是特征线, 那么切向速度分量  $V_t$  允许有间断, 而法向速度分量  $V_n$  必须连续. 此时, 对于特征线  $\Gamma$  有一个附加条件<sup>[4]</sup>:

$$(\tau_{nr})_r = k.$$

## 五、裂纹定常扩展

对于定常扩展裂纹, 所有有关的物理量都只是  $r, \theta$  的函数. 因此, 我们有

$$\frac{\partial F_m}{\partial \tau} = 0,$$

预解方程是:

$$\begin{cases} h_{-1} = \lambda_{-1} P_{r0} = 0, \\ q_{-1} = \lambda_{-1} S_0 = 0. \end{cases} \quad (40)$$

零级定解方程是:

$$P_{r0}^2 + \tau_{r\theta 0}^2 + \frac{3}{4} S_0^2 = k^2, \quad (41)$$

$$h'_0 + H_0 = -2k_{-1}, \quad (42)$$

$$q_0 = - \left\{ 2\varepsilon \sigma_0 + \frac{3}{2} \dot{S}_0 \right\} / E. \quad (43)$$

渐近方程就是由预解方程和零级定解方程组成的. 裂纹顶端区域可分成五种类型:

- ①  $\lambda_{-1} \neq 0, S_0 = P_{r0} = 0,$
- ②  $\lambda_{-1} = 0, S_0 = P_{r0} = 0,$
- ③  $\lambda_{-1} = 0, S_0 = 0, P_{r0} \neq 0,$
- ④  $\lambda_{-1} = 0, S_0 \neq 0, P_{r0} = 0,$
- ⑤  $\lambda_{-1} = 0, S_0 \neq 0, P_{r0} \neq 0.$

第①, ②, ④类区域, 属于中心扇形区; 第③类是均匀应力区; 第⑤类可以是均匀应力区, 也可以不是.

讨论第①类区. 文献 [2, 3] 所建议的中心扇形区, 属于这种情况. 此时,

$$F_0 = \frac{k}{2} \left[ b_{00} + 2 \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) \right],$$

$$f_0 = -k \left\{ \sin \theta + \left[ b_{00} + 2 \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) \right] \cos \theta \right\},$$

$$P_{r0} = 0, \quad \tau_{r\theta 0} = k,$$

$$\dot{P}_{r0} = -2k \sin \theta, \quad \dot{\sigma}_0 = -2k \sin \theta, \quad \dot{S}_0 = 0,$$

$$h_0 = \lambda_{-1} P_{r1} - \frac{4k}{E} [\varepsilon^2 + (1 - \nu^2)] \sin \theta,$$

由上述方程看出,  $\lambda_{-1}$  的求解牵涉到  $P_{r1}$ . 现在讨论一级定解方程:

$$\begin{cases} P_{r0}P_{r1} + \tau_{r\theta 0}\tau_{r\theta 1} = 0, \\ h'_1 + H_1 = 0, \\ f'' + f = -2k_0 - (I_0 + H_0), \\ q_1 = -\left\{2\varepsilon\sigma_1 + \frac{3}{2}\dot{s}_1\right\}/E, \end{cases} \quad (44)$$

其中

$$\begin{aligned} P_{r1} &= F'_1/2, & \tau_{r\theta 1} &= -F'_1, \\ \sigma_1 &= \sigma_1 \sin \theta, & \dot{s}_1 &= \dot{s}'_1 \sin \theta. \end{aligned} \quad (45)$$

由方程 (44) 得:

$$F_1 = b_{10}, \quad P_{r1} = \tau_{r\theta 1} = 0,$$

代入到关于  $h_0$  的表达式, 得:

$$\begin{cases} h_0 = -\frac{4k}{E}[\varepsilon^2 + (1 - \nu^2)] \sin \theta = -b_{02} \sin \theta, \\ b_{02} = \frac{4k}{E}[\varepsilon^2 + (1 - \nu^2)]. \end{cases} \quad (46)$$

将方程 (46) 代入 (42) 式, 得:

$$\begin{cases} H_0 = b_{02} \cos \theta - b_{03}, \\ \lambda_{-1} = b_{03}/2k. \end{cases} \quad (47)$$

由 (43) 式, 经过进一步整理, 得:

$$S_1 = b_{15}k \sin \theta, \quad b_{15} = 8\varepsilon k/Eb_{03}. \quad (48)$$

二级屈服条件为:

$$\begin{cases} k\tau_{r\theta 2} + 3S_1^2/8 = 0, \\ \tau_{r\theta 2} = -(F'_2 + F'_1), \end{cases} \quad (49)$$

因此, 有

$$\begin{aligned} F'_2 &= \frac{3}{16} b_{15}^2 k (1 - \cos \theta), \\ P_{r2} &= (F'_2 - 2F_1)/2 = \frac{3}{16} b_{15}^2 k \sin 2\theta - b_{10}, \end{aligned}$$

由 (22) 式, 得:

$$\begin{aligned} h_1 &= \lambda_{-1}P_{r2} + \lambda_0P_{r1} + \lambda_1P_{r0} + \left[ (1 + \nu)\dot{p}_{r1} + 3\varepsilon\sigma_1 + \frac{3}{2}\varepsilon\dot{s}_1 \right]/E \\ &= \frac{3k}{2E} b_{15} \sin 2\theta - b_{10}b_{03}/2k, \end{aligned} \quad (50)$$

将这个方程代入方程 (44), 得:

$$b_{15} = 0, \quad (51)$$

$$b_{10}b_{03} = 0. \quad (52)$$

若  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $\varepsilon = 0$ , 则条件 (51) 式自动满足. 而条件 (52) 式导致  $b_{10} = 0$ .



若  $\nu \approx \frac{1}{2}$ ,  $\varepsilon \approx 0$ , 则由 (51), (52) 式得:

$$b_{10} = 0, b_{05} = \infty, S_1(\theta) = 0, \lambda_{-1} = \infty,$$

这意味着一级定解方程无法满足。因此,渐近方程在中心扇形区得到满足,而一级定解方程遭到破坏。换句话说  $\lambda_{-1} \approx 0$  的中心扇形区只可能存在于不可压缩材料之中。

以上的结论同样适用于第②类中心扇形区。

第③类区域是均匀应力区。我们有:

$$F_0 = \frac{k}{2} \{a_{00} + \cos(2\theta + 2\theta_0)\},$$

$$P_{r0} = -k \cos 2(\theta + \theta_0), \quad \tau_{r\theta 0} = k \sin 2(\theta + \theta_0),$$

其中  $a_{00}$ ,  $\theta_0$  是待定常数。进一步分析得:

$$h_0 = a_{01} \cos \bar{\theta} + a_{02} \sin \bar{\theta},$$

$$H_0 = a_{01} \sin \bar{\theta} - a_{02} \cos \bar{\theta}, \quad \bar{\theta} = \theta + \theta_0.$$

渐近方程完全满足。由一级定解方程得:

$$F'_1 = a_{10} \cos 2\bar{\theta},$$

$$P_{r1} = -a_{10} \sin 2\bar{\theta}, \quad \tau_{r\theta 1} = a_{10} \cos 2\bar{\theta},$$

$$h_1 = a_{11} \cos \bar{\theta} + a_{12} \sin \bar{\theta},$$

$$H_1 = a_{11} \sin \bar{\theta} - a_{12} \cos \bar{\theta},$$

$$\lambda_0 = h_0/P_{r0}.$$

现讨论第④,⑤类区。将方程 (41) 对  $\theta$  微分一次得:

$$F_0'' \left[ \frac{1}{4} F_0''' + F_0' \right] + \frac{3}{4} S_0 S_0' = 0, \quad (53)$$

$$\begin{cases} h_0 = C_{01} \cos \theta + C_{02} \sin \theta, \\ H_0 = C_{01} \sin \theta - C_{02} \cos \theta. \end{cases} \quad (54)$$

利用方程 (43), (53), (54) 得:

$$h_0 = \lambda_0 P_{r0} + \left[ (1 + \nu) P_{r0} + 3\varepsilon \sigma_0 + \frac{3}{2} \varepsilon S_0 \right] / E,$$

$$2\sigma_0'/E = (C_{01} \operatorname{ctg} \theta + C_{02}) / \{(1 - \nu^2) + [\varepsilon - P_{r0}/S_0]^2\}. \quad (55)$$

这就是文献 [3] 所建议的控制方程。

对第④类区,  $P_{r0} = 0$ , 我们有  $S_0' = 0$ 。因此,  $S_0$  是常数。此时有

$$F_0 = k^* \left\{ b_{00} + 2 \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) \right\} / 2, \quad k^* < k,$$

$$f_0 = -k^* \sin \theta - 2F_0 \cos \theta,$$

$$P_{r0} = 0, \quad \tau_{r\theta} = k^*, \quad S_0 = b_{05}, \quad k^* = \sqrt{k^2 - \frac{3}{4} b_{05}^2},$$

$$C_{01} = 0, \quad C_{02} = -\frac{4k^*}{E} [(1 - \nu^2) + \varepsilon^2],$$

$$\lambda_0 = \frac{4k^*}{E} \left( \frac{\varepsilon}{b_{05}} \right) \sin \theta,$$

$$h_0 = -b^* \sin \theta, \quad H_0 = b^* \cos \theta,$$

$$b^* = \frac{4k^*}{E} [(1 - \nu^2) + \varepsilon^2].$$

渐近方程全部得到满足。由一级定解方程得:

$$h_1 = b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta,$$

$$F_1 = b_{10} + \frac{3b_{05}}{4k^*} \int S_1 d\theta, \quad P_{r1} = \frac{3b_{05}}{8k^*} S'_1,$$

$$\left(\frac{5}{4} - \nu\right) (F_1'' + 4F_1') + \frac{4\varepsilon}{b_{05}} k^* F_1' = E(b_{11} \operatorname{ctg} \theta + b_{12}).$$

## 六、卸载弹性区的定解方程

在第五节求得的定解方程中, 去掉各级屈服条件, 并置  $\lambda_m = 0$ , 就得到卸载弹性区的各级定解方程:

零级定解方程为:

$$\begin{cases} h'_0 + H_0 = 0, \\ 2\varepsilon \dot{\sigma}_0 + \frac{3}{2} \dot{S}_0 = 0. \end{cases} \quad (56)$$

一级定解方程为:

$$\begin{cases} h'_1 + H_1 = 0, \\ f'' + f = -2k_0, \\ 2\varepsilon \dot{\sigma}_1 + \frac{3}{2} \dot{S}_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (57)$$

公式 (22) 变为:

$$\begin{cases} h_m = \left[ (1 + \nu) \dot{p}_{rm} + 3\varepsilon \dot{\sigma}_m + \frac{3}{2} \varepsilon \dot{S}_m \right], \\ j_m = \left[ -(1 + \nu) \dot{p}_{rm} + 3\varepsilon \dot{\sigma}_m + \frac{3}{2} \varepsilon \dot{S}_m \right], \\ k_m = \frac{(1 + \nu)}{E} \dot{\tau}_{\theta m}. \end{cases} \quad (58)$$

屈服约束条件是:

$$P_r^2 + \tau_{\theta 0}^2 + \frac{3}{4} S_z^2 \leq k^2, \quad (59)$$

从方程 (56) 和 (58) 推得下述渐近场的控制方程:

$$\begin{cases} 2\sigma'_0/E = (C_{01} \operatorname{ctg} \theta + C_{02})/(1 - \nu^2), \\ S'_0 = -\frac{4}{3} \varepsilon \sigma'_0, \\ 2\sigma'_0 = F_0''' + 4F_0'. \end{cases} \quad (60)$$

## 参 考 文 献

- [1] Слепая, Л. н., *Изв. АН. СССР. ММТ*, 9(1974), 1.
- [2] Gao, Y. C., The Influence of Compressibility on the Elastic-Plastic Field of a Growing Crack, in *ASTM STP* 803 Vol. 1, 1983, Amer. Soc. Test. Material.
- [3] Drugan, W. J. Rice, J. R. and Sham, T. L., *J. Mech. Phys. Solids*, 30(1982), 447—473.
- [4] Drugan, W. J. and Rice, J. R., in *Mechanics of Material Behavior*, 1983.