



# V带传动最大承载能力的全局优化设计

张少军<sup>①</sup>, 万中<sup>①\*</sup>, 刘光连<sup>②</sup><sup>①</sup> 中南大学数学科学与计算技术学院, 长沙 410083;<sup>②</sup> 中南大学机电工程学院, 长沙 410083

\* E-mail: wanmath@163.com

收稿日期: 2010-03-22; 接受日期: 2010-11-04

国家自然科学基金(批准号: 71071162, 70921001)和教育部新世纪优秀人才计划(批准号: NCET-07-0864)资助项目

**摘要** 建立了V带传动承载能力最大化问题的最优设计模型. 研究了该模型中目标函数凹性、单调性和全局最优性条件, 证明了V带传动最优设计问题的可行域是有界闭凸集. 以此为基础, 提出了寻求该模型全局最优解的最优值线段算法. 在4种不同的设计条件下, 给出了V带传动最大承载能力的全局优化解法. 工程设计案例研究表明了该模型和全局优化方法具有广阔的应用前景.

**关键词**V带传动  
全局优化  
传动能力  
最优值线段算法

因为V带传动具有结构简单、运行平稳、抗冲击能力强、传递功率较大、成本较低等优点, 所以广泛应用于各类机械中<sup>[1,2]</sup>. 如何根据设计条件设计出单根V带传动承载能力最大, 也即所需带根数最少的V带传动系统, 这对于优化机械结构、节约资源和降低生产成本具有积极意义.

V带传动设计可分为常规设计和优化设计. V带传动常规设计<sup>[3]</sup>一般首先根据系统设计传递功率和小带轮转速查表选定V带型号, 再选取大小带轮直径, 并根据传动的结构要求在一定范围内初定中心距, 算出V带长. 然后在验证V带速度和小带轮包角满足约束条件后, 查表确定标准情形下的单根V带额定功率, 再考虑具体传动比、包角、带长的修正值影响后得到单根V带的传递功率, 从而也可得所需带根数. 一些软件公司还专门开发了诸如Ciclo VBelt等V带常规设计软件. 常规设计法的基本原则是在一定可行域范围内依据经验选择合理的可行解, 但无法保证其解的局部或全局最优性.

为了实现V带传动的优化设计, 人们进行了诸多研究. 文献[4~7]及其后所列参考文献对已有理论和方法作了较系统和全面的阐述. 概括地说, 按优化目标不同, V带优化设计模型可分为体积优化模型<sup>[8]</sup>、单根V带传动能力(也即V带根数)优化模型<sup>[9]</sup>和多目标优化模型<sup>[10]</sup>等. 文献[11, 12]还研究了含不确定性参数的V带优化设计模型. 一般地, 单根V带所能传递的功率 $P$  (kW)由下式给出<sup>[3,13]</sup>:

$$P = [[\sigma] - \sigma_{b_1} - \sigma_c] \left[ 1 - \frac{1}{e^{\mu, \alpha}} \right] \frac{AV}{1000} \\ = \left[ \frac{m \sqrt{CL}}{\sqrt{7200tV}} - \frac{2E_b y_0}{d_e} - \frac{\rho_l V^2}{A} \right] \left[ 1 - \frac{1}{e^{\mu, \alpha}} \right] \frac{AV}{1000}, \quad (1)$$

其中,  $[\sigma] = \frac{m \sqrt{CL}}{\sqrt{7200tV}}$  为V带的许用拉应力(MPa),  $\sigma_{b_1} = 2E_b y_0 / d_e$  为V带的弯曲应力(MPa),  $\sigma_c = \rho_l V^2 / A$  为V带的离心应力(MPa),  $m$ 是与带型有关的系数,  $C$ 是实验常数,  $L$ 为V带的节线长(mm),  $t$ 是对应

于  $10^8 \sim 10^9$  次循环应力的传动带寿命(h),  $V$  是带速(m/s),  $E_b$  是 V 带弯曲弹性模量(MPa),  $y_0$  是 V 带外层至中性层距离(mm),  $d_e$  为同时考虑大、小带轮对弯曲影响的当量直径(mm),  $\rho_l$  为 V 带线质量(kg/m),  $A$  是 V 带横截面积( $\text{mm}^2$ ),  $\mu_v$  是 V 带与带轮槽间的当量摩擦系数,  $\alpha$  是小带轮包角(rad). 文献[13]在计算 V 带额定传动功率时, 将(1)式中的  $d_e$  表示为  $K_i d_1$ , 其中  $K_i$  为传动比系数. 此外, 以往工程设计中, 也常用如下公式<sup>[14]</sup>直接计算系统所需 V 带根数  $Z$ :

$$Z = \frac{P_d}{(P_1 + \Delta P_1) K_\alpha K_L}, \quad (2)$$

其中,  $P_d$  为系统设计功率, 也即系统额定功率乘以工况系数  $K_A$ ,  $P_1$  为单根 V 带的基本额定功率, 由(1)式给出,  $\Delta P_1$  为  $i \neq 1$  时的额定功率增量,  $K_\alpha$  为包角修正系数.  $K_L$  为带长修正系数. 这些参数的确定方法参看文献[15, 16]. 不过, 运用(2)式(包括常规法)时只能按特定的 V 带预期寿命计算, 而以(1)式为目标函数有利于不同预期寿命条件下设计参数的优化.

已有 V 带优化模型的数值解法包括穷举法、复合形法<sup>[17]</sup>、内(外)点惩罚函数法<sup>[9, 16, 18]</sup>、序列二次规划方法<sup>[19]</sup>, 以及启发式算法<sup>[8, 20]</sup>等. 穷举法通过离散化连续型设计变量, 对各种可能的设计方案进行穷举而找到近似最优解. 这种方法要么计算量大, 要么所得“最优解”精度低. 惩罚函数法和序列二次规划方法都是局部优化算法, 无法保证所得解的全局最优性. 复合形法搜索全局最优解的数值行为差<sup>[17]</sup>. 启发式算法具有一定的全局搜索能力, 但缺乏全局收敛性理论, 且运算量往往较大<sup>[21]</sup>.

基于以上考虑, 本文将研究 V 带传动最大承载能力的全局优化设计问题. 为此, 我们将在深入研究该类优化问题的性质(如目标函数的凸性, 可行域的结构等)的基础上, 提出高效率的全局优化设计方法, 即最优值线段算法. 全文的结构如下: 首先建立 V 带传动设计优化模型; 然后研究目标函数的性质和可行域的结构; 以此为基础, 将就 4 种情形提出全局优化算法; 最后, 将用工程设计实例验证本文提出的模型和算法的有效性.

## 1 V 带传动设计优化模型

首先根据 V 带设计中的力学和工艺要求, 建立 V 带传动设计优化模型.

设  $x = (x_1, x_2, x_3)^T = (L, d_1, \alpha)^T$ , 并由  $V = \frac{\pi d_1 n_1}{1000 \times 60}$  ( $n_1$  为主动轮即小带轮转速(r/min)), 可将(1)式转化为:

$$P(x) = \left[ C_1 x_2^m x_3^m - C_2 - C_3 x_2^3 \right] C_4 \left[ 1 - e^{-C_5 x_3} \right], \quad (3)$$

其中,  $C_1 \sim C_5$  分别是已知系统模型系数, 见表 1.

假设 V 带型号选定( $E_b, y_0, \rho_l, A$  确定),  $t, n_1, i$  (传动比)确定( $K_i$  也因此确定). 此时, V 带传动设计中只有 2 个独立设计变量, 即带长  $x_1$  和小带轮直径  $x_2$ , 而小带轮包角  $x_3$  是  $x_1$  和  $x_2$  的函数, 即:

$$x_3 = C(x_1, x_2) = \pi - 8(i-1)x_2 / [2x_1 - \pi(i+1)x_2 + \sqrt{[2x_1 - \pi(i+1)x_2]^2 - 8(i-1)^2 x_2^2}], \quad (4)$$

从而目标函数可写成:

$$\max P(x_1, x_2) = [C_1 x_1^{1/m} x_2^{(m-1)/m} - C_2 - C_3 x_2^3] C_4 [1 - e^{-C_5 C(x_1, x_2)}]. \quad (5)$$

根据力学原理和实际生产工艺要求, V 带传动设计必须考虑如下约束条件.

1) 中心距设计约束

$$\begin{cases} g_1(x) = C_6(i+1)x_2 - [2x_1 - \pi(i+1)x_2 + \sqrt{[2x_1 - \pi(i+1)x_2]^2 - 8(i-1)^2 x_2^2}] / 8 \leq 0, \\ g_2(x) = -C_7(i+1)x_2 + [2x_1 - \pi(i+1)x_2 + \sqrt{[2x_1 - \pi(i+1)x_2]^2 - 8(i-1)^2 x_2^2}] / 8 \leq 0. \end{cases} \quad (6)$$

2) V 带的带速限制

$$\begin{cases} g_3(x) = C_8 - (\pi n_1 x_2 / 6) \times 10^{-4} \leq 0, \\ g_4(x) = (\pi n_1 x_2 / 6) \times 10^{-4} - C_9 \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

3) V 带每秒绕转次数限制

$$g_5(x) = n_1 x_2 / (19.1 x_1) - C_{10} \leq 0. \quad (8)$$

4) 小带轮直径设计约束

$$\begin{cases} g_6(x) = C_{12} C_{11} - x_2 \leq 0, \\ g_7(x) = x_2 - C_{13} C_{11} \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$

5) V 带节线长设计约束

$$\begin{cases} g_8(x) = C_{14} - x_1 \leq 0, \\ g_9(x) = x_2 - C_{15} \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

6) 小带轮包角设计约束

$$\begin{cases} g_{10}(x) = \pi C_{16} / 180 - C(x_1, x_2) \leq 0, \\ g_{11}(x) = C(x_1, x_2) - \pi C_{17} / 180 \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $C_6 \sim C_{17}$  为约束条件中的常系数, 具体数值见表 1. 从上述讨论可以看出, V 带传动设计优化问题的

表1 V带优化模型中的常系数列表

Parameter	Formula	Remark
$C_1$	$C_1 = \left( \frac{C}{7.2 \times 10^3 t} \right)^{1/m} \left( \frac{\pi n_1}{6 \times 10^4} \right)^{(m-1)/m}$	$C$ is an experimental constant, $m$ is a coefficient relevant to the type of V-belt, $n_1$ is the rotational speed (r/min) of small pulley, $t$ is the fatigue life (h) of V-belt with the duration of $10^8$ – $10^9$ times of circular stress
$C_2$	$C_2 = \frac{\pi E_b y_0 n_1}{3 \times 10^4 K_i}$	$E_b$ is the bending modulus of the elasticity(MPa) of V-belt, $y_0$ is the distance(mm) between the outer and neutral layers of V-belt, $K_i$ is the coefficient of the transmission ratio
$C_3$	$C_3 = \frac{\rho_l}{A} \left( \frac{\pi n_1}{6 \times 10^4} \right)^3$	$\rho_l$ is the line mass (kg/m) of V-belt, $A$ is the cross section area (mm <sup>2</sup> ) of V-belt
$C_4$	$C_4 = \frac{A}{1000}$	
$C_5$	$C_5 = \mu_v$	$\eta_v$ is the equivalent friction coefficient between the V-belt and the pulley
$C_6$	0.7	Minimal coefficient of center distance
$C_7$	2	Maximal coefficient of center distance
$C_8$	10	Minimal velocity (m/s) of V-belt
$C_9$	25	Maximal velocity (m/s) of V-belt
$C_{10}$	20	Maximal number of V-belt's rotations every second
$C_{11}$	$C_{11} = d_{1 \min}$	$d_{1 \min}$ is the minimal allowable diameter (mm) of the small pulley
$C_{12}$	1	Minimal coefficient of small pulley's diameter
$C_{13}$	1.1	Maximal coefficient of small pulley's diameter
$C_{14}$	$C_{14} = L_{\min}$	$L_{\min}$ is the minimal allowable pitch length (mm) of V-belt
$C_{15}$	$C_{15} = L_{\max}$	$L_{\max}$ is the maximal allowable pitch length (mm) of V-belt
$C_{16}$	120	Minimal wrap angle (°) of small pulley
$C_{17}$	180	Maximal wrap angle (°) of small pulley
$C_{18}$	$C_{18} = \frac{8(i-1)}{\pi(1-C_{16}/180)}$	
$C_{19}$	$C_{19} = \frac{8(i-1)}{\pi(1-C_{17}/180)}$	$C_{19}$ exists only if $0 < C_{17} < 180$

数学模型就是如下一类约束优化问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & P(x_1, x_2), \\ \text{s.t.} \quad & (6)-(11). \end{aligned} \tag{12}$$

## 2 模型的性质

为了设计最有效的求解上述优化问题(12)的算法, 首先证明目标函数具有如下性质.

**定理 1.** 目标函数  $P$  关于变量  $x_1$  在区间  $(0, +\infty)$  内单调递增.

**证明:** 由(4)式可见  $C(x_1, x_2)$  关于  $x_1$  在  $(0, +\infty)$  内单调递增, 由(5)式也可见  $P$  关于  $C(x_1, x_2)$  在  $(0, +\infty)$  内单调递增. 由复合函数及其导数的性质可得定理

成立.

**定理 2.** 假设  $D \subset R_+^2$  是单连通的有界闭集,  $f: D \rightarrow R$  是  $D$  内的连续函数, 且关于第一个变量单调递增, 则如下结论成立:

$$\max_{(x_1, x_2) \in D} f(x_1, x_2) = \max_{x_2} \max_{x_1} f(x_1, x_2).$$

**证明:** 首先,

$$\max_{x_2} \max_{x_1} f(x_1, x_2) \leq \max_{(x_1, x_2) \in D} f(x_1, x_2).$$

很显然, 只要证明

$$\max_{(x_1, x_2) \in D} f(x_1, x_2) \leq \max_{x_2} \max_{x_1} f(x_1, x_2).$$

对任意给定的  $x_2$ , 令  $I(x_2) = \{x_1 \in R \mid (x_1, x_2) \in D\}$ , 因为  $D$  是单连通的有界闭集, 所以  $I(x_2)$  是有界闭区间,

记此区间的右端点为  $r(x_2)$ .

因为  $f : D \rightarrow R$  是  $D$  内的连续函数, 且关于  $x_1$  单调递增, 所以对任意点  $(x_1, x_2) \in D$ , 有

$$f(x_1, x_2) \leq f(r(x_2), x_2). \quad (13)$$

又记  $P_{x_2}(D) = \{x_2 \in R \mid (x_1, x_2) \in D\}$ , 则集合  $P_{x_2}(D)$  是  $D$  在  $x_2$  轴上的投影. 因为  $D$  是单连通的有界闭集, 所以  $P_{x_2}(D)$  是  $x_2$  轴上的有界闭区间.

定义函数  $g : g : P_{x_2}(D) \rightarrow R$ ,  $g(x_2) = f(r(x_2), x_2)$ , 因为  $f : D \rightarrow R$  是  $D$  内的连续函数, 所以  $g$  是有界闭集  $P_{x_2}(D)$  上的连续函数, 且存在最大值点  $x_2^*$ .

由(13)式和  $g$  的定义和, 对任意点  $(x_1, x_2) \in D$  有

$$f(x_1, x_2) \leq f(r(x_2)^*, x_2^*) = \max_{x_2} \max_{x_1} f(x_1, x_2). \quad (14)$$

所以

$$\max_{(x_1, x_2) \in D} f(x_1, x_2) \leq \max_{x_2} \max_{x_1} f(x_1, x_2).$$

尽管优化模型(12)中的目标函数在区域  $R_+^2$  内无界, 但稍后将证明该问题的可行域是内界闭凸集. 从而根据定理 2, 能够提出优化模型(12)的全局最优解满足的条件.

**定理 3.** 目标函数  $P$  不是凹函数.

**证明:** 事实上, 若取定  $C_1=0.745$ ,  $C_2=94.157$ ,  $C_3=0.55 \times 10^{-6}$ ,  $C_4=0.138$ ,  $C_5=0.51$ ,  $i=1.2$ , 则又当  $x_1=2$ ,  $x_2=2000$  时,

$$\nabla^2 P(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2.2616 & 0.0023 \\ 0.0023 & -0.0009 \end{pmatrix}$$

是负定矩阵; 当  $x_1=10$ ,  $x_2=8$  时,

$$\nabla^2 P(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -0.0007 & 0.0009 \\ 0.0009 & -0.0011 \end{pmatrix}$$

是负半定矩阵; 而当  $x_1=10$ ,  $x_2=0.5$  时,

$$\nabla^2 P(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.0009 & -0.0104 \\ -0.0104 & 0.0490 \end{pmatrix}$$

是不定矩阵. 因此, 目标函数一定不是凹函数 (任何点处 Hessian 阵为负定矩阵).

根据定理 3 知: 模型(12)不能用凸规划方法求解, 因此可以肯定, 以往研究工作中采用经典的局部优化算法不能从理论上保证求得的是原问题的全局最优解.

接下来, 研究优化问题(12)的可行域结构, 为此,

我们把约束条件(6)~(11)作如下简化.

$$g_1 : \begin{cases} x_1 - [(\pi/2 + \sqrt{2})i + (\pi/2 - \sqrt{2})]x_2 \geq 0 & \text{或者} \\ x_1 - [(\pi/2 - \sqrt{2})i + (\pi/2 + \sqrt{2})]x_2 \leq 0, \\ x_1 - (4C_6 + \pi/2)(i+1)x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2[(64C_6^2 + 16\pi C_6)(i+1)^2 + 8(i-1)^2]/[32C_6(i+1)] \geq 0, \\ \text{或者 } x_1 - (4C_6 + \pi/2)(i+1)x_2 > 0; \end{cases}$$

$$g_2 : \begin{cases} x_1 - [(\pi/2 + \sqrt{2})i + (\pi/2 - \sqrt{2})]x_2 \geq 0 & \text{或者} \\ x_1 - [(\pi/2 - \sqrt{2})i + (\pi/2 + \sqrt{2})]x_2 \leq 0, \\ x_1 - (4C_7 + \pi/2)(i+1)x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2[(64C_7^2 + 16\pi C_7)(i+1)^2 + 8(i-1)^2]/[32C_7(i+1)] \leq 0; \end{cases}$$

$$g_5: n_1 x_2 - 19.1 C_{10} x_1 \leq 0.$$

$$g_{10} : \begin{cases} x_1 - [(\pi/2 + \sqrt{2})i + (\pi/2 - \sqrt{2})]x_2 \geq 0 & \text{或者} \\ x_1 - [(\pi/2 - \sqrt{2})i + (\pi/2 + \sqrt{2})]x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2[C_{18} + \pi(i+1)]/2 \leq 0, \\ x_1 - x_2[8(i-1)^2 + C_{18}^2 + 2\pi C_{18}(i+1)]/(4C_{18}) \geq 0, \\ \text{or } x_1 - x_2[C_{18} + \pi(i+1)]/2 > 0. \end{cases}$$

$$g_{11} : \begin{cases} 0 < C_{17} < 180, \\ x_1 - [(\pi/2 + \sqrt{2})i + (\pi/2 - \sqrt{2})]x_2 \geq 0, & \text{或者} \\ x_1 - [(\pi/2 - \sqrt{2})i + (\pi/2 + \sqrt{2})]x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2[C_{19} + \pi(i+1)]/2 \leq 0, \\ x_1 - x_2[8(i-1)^2 + C_{19}^2 + 2\pi C_{19}(i+1)]/(4C_{19}) \leq 0. \end{cases}$$

或  $C_{17}=180$ , 此时由  $g_1$  约束式和  $i \geq 1$  可知原  $g_{11}$  约束恒成立.

将  $g_3, g_4, g_6, g_7$  约束合并为

$$g_{12} : \max \left\{ C_{12} C_{11}, \frac{6 \times 10^4 C_8}{\pi n_1} \right\} \leq x_2 \leq \min \left\{ C_{13} C_{11}, \frac{6 \times 10^4 C_9}{\pi n_1} \right\}$$

将  $g_8, g_9$  约束合并为

$$g_{13} : C_{14} \leq x_1 \leq C_{15}.$$

以上  $g_1, g_2, g_5, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}$  构成了总的约束条件, 它们均为线性约束, 因此可得如下结论.

**定理 4.** 优化模型的可行域.

$I_x = \{(x_1, x_2) \in R_+^2 \mid (x_1, x_2) \text{ 满足条件(6)~(11)}\}$  是有界闭凸集.

### 3 不同设计条件下全局优化方法

这一节, 结合实际工程设计中不同的设计条件,

分别给出问题(12)的全局优化方法.

**情形 1.**  $n_1, t$  给定,  $i=1$  时的解法.

此时  $x_3 = \alpha = \pi$ , 从而目标函数可简化为:

$$\max P(x_1, x_2) = Hx_1^m x_2^m - Kx_2^3 - J, \quad (15)$$

其中,  $H = C_1 C_4 (1 - e^{-\pi C_5}) > 0$ ,  $K = C_3 C_4 (1 - e^{-\pi C_5}) > 0$ ,  $J = C_2 C_4 (1 - e^{-\pi C_5}) > 0$ .

对于普通 V 带,  $m$  一般取值为<sup>[22]</sup>10.9~11.2. 在不影响求解方法有效性的情况下, 取  $m=11$ , 则(15)式可写成:

$$\max P(x_1, x_2) = Hx_1^{\frac{1}{11}} x_2^{\frac{10}{11}} - Kx_2^3 - J.$$

$P(x_1, x_2)$  的 Hessian 阵为:

$$\nabla^2 P(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\frac{10}{121} Hx_1^{-\frac{21}{11}} x_2^{\frac{10}{11}} & \frac{10}{121} Hx_1^{-\frac{10}{11}} x_2^{-\frac{1}{11}} \\ \frac{10}{121} Hx_1^{-\frac{10}{11}} x_2^{-\frac{1}{11}} & -\frac{10}{121} Hx_1^{\frac{1}{11}} x_2^{-\frac{12}{11}} - 6Kx_2 \end{bmatrix}.$$

因为  $-\frac{10}{121} Hx_1^{-\frac{21}{11}} x_2^{\frac{10}{11}} < 0$ ,

$$|\nabla^2 P(x_1, x_2)| = \frac{60}{121} HKx_1^{-\frac{21}{11}} x_2^{\frac{21}{11}} > 0,$$

所以  $\nabla^2 P(x_1, x_2)$  负定, 从而  $P$  为严格凹函数, 此时  $P(x_1, x_2)$  在无约束条件下存在惟一全局最优解, 不妨记之为  $x^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ . 由最优性条件知  $\nabla P(x^*) = 0$ , 即

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{11} H \left( \frac{x_2^*}{x_1^*} \right)^{\frac{10}{11}} \\ \frac{10}{11} H \left( \frac{x_2^*}{x_1^*} \right)^{\frac{1}{11}} - 3K(x_2^*)^2 \end{pmatrix} = 0.$$

解得:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\infty \\ \left( \frac{10H}{33K} \right)^{\frac{11}{23}} (x_1^*)^{\frac{1}{23}} \end{pmatrix}.$$

如果  $x^*$  满足所有约束条件, 则  $x^*$  是模型(12)的全局最优解. 否则, 我们只要比较目标函数在可行域边界上的值, 即可得全局最优解.

**情形 2.**  $\alpha$  已知, 而  $i$  未知时的解法.

假设  $\alpha$  已知, 而  $i$  未知, 其余条件同第一种设计条件. 当传动比  $i > 1.5$ , (1)式中的  $K_i$  变化范围仅约为

1.5%, 故可视为固定值. 因此, 类似于第一种情形的求解方法, 可以得到原模型的全局最优解.

**情形 3.**  $n_1, t$  已知,  $i$  未知,  $L, d_1, \alpha$  相互独立时的解法.

假设只有  $n_1, t$  已知,  $i$  未知,  $L, d_1, \alpha$  为相互独立的变量. 显然, 由(1)式可看出,  $P$  为  $L$  及  $\alpha$  的单调增函数. 因  $\alpha$  独立, 故  $1 - e^{-\alpha}$  是目标函数(1)中可分离因子. 若选取  $\alpha$  为可行域内的最大值  $\alpha^*$ , 并代入(1)式中, 则原优化问题归结为第二种情形求解.

**情形 4.** 一般情形下的解法.

在一般设计条件下, 我们依据定理 1、定理 2 和定理 4, 提出如下计算优化模型全局最优解的高效算法(我们称之为“最优值线段算法”).

**算法 1.** 最优值线段算法.

**步 1.** 把模型(12)中每一个约束条件归为如下 3 类之一:

(I)  $x_1 \leq kx_2, (k > 0)$ ;

(II)  $x_1 \geq kx_2, (k > 0)$ ;

(III)  $a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d, a, b, c, d$  均为大于零的常数.

**步 2.** 取

$k_1 = \min\{k | k \text{ 是第 I 类约束的斜率}\}$ ,

$k_2 = \max\{k | k \text{ 是第 II 类约束的斜率}\}$ .

一般地  $k_1 \geq k_2$ . 设直线  $x_1 = k_1 x_2$  与直线  $x_1 = a$  交点的纵坐标为  $e_a$ , 与  $x_1 = b$  交点的纵坐标为  $e_b$ . 直线  $x_1 = k_2 x_2$  与直线  $x_1 = a$  交点的纵坐标为  $g_a$ , 与  $x_1 = b$  交点的纵坐标为  $g_b$ . 则

(I) 当  $e_a > d$  时, 问题无解.

(II) 当  $e_a \leq d$ , 且  $e_b \geq d$  时, 可直接得到该问题的全局最优解  $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (k_1 d, d)$ .

(III) 当  $e_b < d$ , 且  $g_b > c$  时, 则在直线段  $x_1 = b (\max\{c, e_b\} \leq x_2 \leq \min\{d, g_b\})$  上寻找最优解, 将  $x_1 = b$  代入到目标函数, 则原优化问题可归结为一元连续可微函数在有界闭区间上的全局优化问题. 利用有效的全局优化方法, 如覆盖法<sup>[21]</sup>, 就能得到原问题的全局最优解.

(IV) 当  $g_b < c$  时, 该问题无解.

工程实际中由于工作空间或工件尺寸的限制, 有时要求中心距  $a \leq a_{\max}$ , 其中  $a_{\max}$  为一常数. 这等价于在原模型中增加约束条件:

$$g_{14}: [2x_1 - \pi(i+1)x_2 + \sqrt{[2x_1 - \pi(i+1)x_2]^2 - 8(i-1)^2 x_2^2}] / 8 \leq a_{\max}$$

即

$$\begin{cases} x_1 \leq \frac{\pi}{2}(i+1)x_2 + 4a_{\max}, \\ x_1 \leq \frac{(i-1)^2}{4a_{\max}}x_2^2 + \frac{(i+1)\pi}{2}x_2 + 2a_{\max}. \end{cases}$$

因此, 除线性约束外, 模型中含有二次约束. 当曲线

$$x_1 = \frac{(i-1)^2}{4a_{\max}}x_2^2 + \frac{(i+1)\pi}{2}x_2 + 2a_{\max}$$

为可行域  $I_x$  沿坐标  $x_1$  增大方向一侧的全部或部分边界时, 可行域就不一定是凸集. 但此时并不妨碍上述最优值线段算法的使用. 若可行域最右侧边界全部由该二次曲线组成, 则可按算法 1 的第 2 步中情形(II)来计算最优解, 最优解是

$$\left( \frac{(i-1)^2}{4a_{\max}}d_{1\max}^2 + \frac{(i+1)\pi}{2}d_{1\max} + 2a_{\max}, d_{1\max} \right).$$

若可行域最右侧边界只是一部分由该二次曲线组成, 则可按步 2 中的情形(III)来计算.

#### 4 案例研究

本节我们将用设计实例来说明本文提出的优化模型和算法的有效性.

**设计案例 1.** 试设计由电动机驱动旋转式水泵的 V 带传动. 电动机为 Y160M-4, 额定功率  $P=11$  kW, 转速  $n_1=1460$  r/min, 水泵轴转速为  $n_2=400$  r/min, 单班制工作, 设计寿命至少 24000 h.

由设计条件查得工况系数  $K_A=1.1$ . 系统设计传递功率  $P_d=K_A P=12.1$  kW. 根据  $P_d$  和  $n_1$  可查表<sup>[23]</sup>确定选用 B 型 V 带, 其参数为:  $m=11.0$ ,  $\rho_l=0.17$  kg/m,  $A=142.96$  mm<sup>2</sup>,  $E_b=55.7$  MPa,  $\mu_v=0.51$ ,  $y_0=4.1212$  mm,  $C=1.8099 \times 10^{14}$ ,  $K_f=1.1373$ , 而  $i=3.65$ .

**方法 1.** 采用常规设计法.

参照文献[23]中的常规设计法, 小带轮基准直径取  $x_2=d_1=140$  mm, 大带轮基准直径  $d_2=505.89$  mm, 带速  $V=10.70$  m/s, 满足要求. 初定中心距  $a=1200$  mm= $1.843(d_1+d_2)$ , 符合要求. 所需 V 带节线长  $x_1=L \approx 3422.6$  mm. 将  $x_1$  圆整为标准系列值 3550 mm, 则小带轮包角  $x_3 = \alpha \approx 2.845$  rad= $163^\circ$ , 符合要求. 根据  $d_1=140$  mm 和  $n_1=1460$  r/min, 查表得单根 B 型 V 带基本额定功率  $P_1=2.82$  kW. 考虑传动比影响, 查表得  $\Delta P_1=0.46$  kW,  $K_\alpha=0.956$ ,  $K_L=1.10$ . 因此所需 V 带根数  $Z = \frac{P_d}{(P_1 + \Delta P_1)K_\alpha K_L} = 3.51$ , 需用 4 根 V 带.

**方法 2.** 采用最优值线段算法.

由给定的设计条件可知, 本案例属于第 4 种设计情形. 按照本文提出的方法的思想, 将通过最大化单根 V 带的承载能力来设计 V 带传动系统. 因为  $P$  是 V 带预期寿命  $t$  的减函数, 故取  $t$  为 24000 h. 优化模型(12)中各系数值如表 2 所示. 通过简化和整理各约束条件得到模型(12)的可行域  $I_x$  为:

$$\begin{cases} 900 \leq x_1 \leq 5000, \\ 140 \leq x_2 \leq 154, \\ 14.354x_2 \leq x_1 \leq 26.093x_2. \end{cases}$$

其图形如图 1 所示, 是由点 A, B, C, D 围成的区域.

此优化问题可行域的特点符合算法 1 的步 2 中的情形(II). 由最优值线段算法可知,  $P(x_1, x_2)$  的全局最大值解必然就是图 1 中 C 点, 即全局最优解

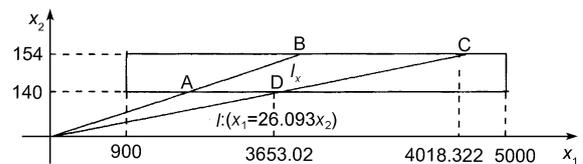


图 1 案例 1 中可行域  $I_x$  的图形

表 2 设计实例 1 的模型系数值列表

Name	Value	Name	Value	Name	Value	Name	Value	Name	Value
$C_1$	0.341	$C_2$	30.859	$C_3$	$0.531 \times 10^{-6}$	$C_4$	0.143	$C_5$	0.51
$C_6$	0.7	$C_7$	2	$C_8$	10	$C_9$	25	$C_{10}$	20
$C_{11}$	140	$C_{12}$	1	$C_{13}$	1.1	$C_{14}$	900	$C_{15}$	5000
$C_{16}$	120	$C_{17}$	180	$C_{18}$	20.245	$C_{19}$	Not exist		

$x^* = (x_1^*, x_2^*)^T = (4018.322, 154)^T$ , 对应的全局最大值  $P(x_1^*, x_2^*) = 4.139$  kW. 若将 V 带节线长  $x_1^*$  圆整为标准系列值 4000, 则对应的最大值  $P = (x_1^*, x_2^*) = 4.134$  kW. 所需 V 带根数  $Z^* = 2.93$ , 只需用 3 根 V 带即可, 优于常规设计方案.

**设计案例 2.** 试设计带式运输装置用电动机与齿轮减速器之间的 V 带传动. 已知电动机功率  $P=7$  kW, 转速  $n_1=960$  r/min,  $n_2=330$  r/min, 两班制工作, 工作时有轻度冲击.

查表  $K_A=1.2$ ,  $P_d=K_A P=8.4$  kW. 由  $P_d$  和  $n_1$  选 B 型化纤胶带. 按工艺设计要求, 其各约束条件与本文案例 1 基本相同, 只是最小带速要大于 5 m/s, 并限制  $125 \text{ mm} \leq d_1 \leq 180 \text{ mm}$ ,  $1640 \text{ mm} \leq L \leq 2040 \text{ mm}$ . 采用最优值线段算法解决上述设计问题. 类似于第一个案例研究, 首先可得可行域  $I_x$  是由点 A, B, C, D 所围成的区域(见图 2).

由图 2 可知, 该可行域的最右侧边界线为直线段 CD:  $x_1=2040$ ,  $(125 \leq x_2 \leq 170.768)$ . 其特点与算法 1 的步 2 中的情形(III)相同, 因此 CD 即为最优值线段. 将其方程代入目标函数, 可将原优化问题化简为下面的一元函数优化问题:

$$\begin{aligned} \max P(x_2) &= (0.067x_2^{0.909} - 2.901 - 0.216 \times 10^{-7} x_2^3) \times (1 - e^{-0.51\alpha}) \\ \text{s.t. } & 125 \leq x_2 \leq 170.768, \end{aligned} \quad (16)$$

其中,

$$\alpha = \pi - 15.272x_2 / [4080 - 12.28x_2 + \sqrt{[4080 - 12.28x_2]^2 - 29.154x_2^2}].$$

经计算得(16)式的最优解为  $x_2^* = 170.768$  mm, 从而原问题的最优解为  $x^* = (2040, 170.768)^T$ , 最优值为  $P(x^*) = 2.926$  kW, 所需的最少带根数  $Z^* = 2.87$  根. 若采用 B 型棉芯胶带, 则需最少带根数  $Z^* = 2.87 \times 1.333 = 3.83$  根.

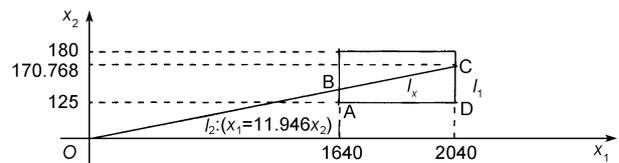


图 2 案例 2 中可行域  $I_x$  的图形

文献[16]采用惩罚函数法, 选用 B 型棉芯胶带, 求得最优解为:  $x^* = (2039.715, 170.74)^T$ ,  $Z^* = 3.901$  根. 该文献中还提到某常规设计法求得此问题的解为  $x^* = (2240, 180)^T$ ,  $Z^* = 4.0$  根.

此外, 我们还利用最优值线段算法求解了文献[9]给出的实例, 其中在模型(12)中对中心距增加了非线性约束. 得到可行域的最右侧边界是二次曲线  $x_1 = 0.000482 x_2^2 + 5.187x_2 + 1760$ . 因而其全局最优解为  $x^* = (2548.895, 150)^T$ . 对应的最少带根数  $Z^* = 3.258$  根. 虽然该最优解与文献[9]中的结果相同, 但并不意味惩罚函数法能与最优值线段算法媲美. 事实上, 不难验证目标函数在此最优解处的 Hessian 阵负定, 即用惩罚函数法找到的局部最优解有可能与全局最优解重合. 两者的差别在于, 罚函数法无法从理论上保证其结果一定是全局最优解.

以上案例研究说明, 最优值线段算法比常规设计方法和局部优化法均具有理论上和计算上的优越性. 其思想方法对研究类似的工程优化设计问题具有抛砖引玉的作用.

## 5 结论

本文建立了 V 带传动承载能力最大化问题的最优设计模型. 基于问题的性质和结构研究, 提出了寻求该模型全局最优解的最优值线段算法. 工程设计案例研究表明了该模型和全局优化方法具有广阔的应用前景.

## 参考文献

- Gerbert B G. Some notes on V-belt drives. ASME J Mech Des, 1981, 103(1): 8-18
- Shieh C J, Chen W H. Effect of angular speed on behavior of a V-belt drive system. Int J Mech Sci, 2002, 44(9): 1879-1892
- 濮良贵, 纪名刚, 陈国定, 等. 机械设计. 北京: 高等教育出版社, 2006
- Sharma C S, Purohit K. Design of Machine Elements. New Delhi: Prentice Hall of India, 2003
- Hamrock B J, Schmid S R, Jacobson B O. Fundamentals of Machine Elements. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Science, 2004
- Bhandari V B. Design of Machine Elements. New Delhi: Tata McGraw Hill Publishing, 2007

- 7 Srivastava N, Haque I. A review on belt and chain continuously variable transmissions (CVT): Dynamics and control. *Mech Mach Theory*, 2009, 44(1): 19-41
- 8 严寒冰, 原思聪, 季文祥. 基于遗传算法及 MATLAB 的 V 带传动优化设计. *机械*, 2008, 35(9): 23-25
- 9 莫才颂, 千学明, 王岗罡. 普通 V 带传动的优化设计. *机械传动*, 2006, 30(6): 45-46
- 10 李华, 梁尚明. 带传动的多目标优化设计. *成都大学学报: 自然科学版*, 2006, 24(1): 22-24
- 11 郭惠昕, 张龙庭, 曾经梁. 基于模糊学方法的 V 带传动优化设计. *机械*, 2000, 27(4): 11-15
- 12 邬华芝, 高德平, 郭海丁. V 型带传动可靠性设计方法优化设计. *机械设计与研究*, 2001, 17(2): 53-54
- 13 罗善明, 余以道, 郭迎福, 等. *带传动理论与新型带传动*. 北京: 国防工业出版社, 2006
- 14 GB/T 13575.1-92 《带传动——普通 V 带传动》
- 15 金怡果, 陈轶. 基于 Visual Basic 的 V 型带传动的常规设计与优化设计的比较研究. *机床与液压*, 2004, (4): 141-142
- 16 唐锦茹. 三角皮带传动的优化设计. *东北电力大学学报*, 1996, 23(3): 71-74
- 17 余刚, 李栋. 基于混合遗传算法和复合形法的翼形优化设计. *科学技术与工程*, 2007, 7(10): 2292-2295
- 18 陈立周. *机械优化设计方法*. 北京: 冶金工业出版社, 2005
- 19 席平原. 基于模糊分析的 V 带传动优化设计. *轻工机械*, 2004, (4): 60-62
- 20 石刊, 魏锋涛, 任雷雷. 基于改进遗传算法的带传动优化设计. *机械*, 2006, 33(7): 18-20
- 21 李董辉, 童小娇, 万中. *数值最优化算法与理论*. 北京: 科学出版社, 2010
- 22 Spotts M F. *Design of Machine Element*. 5th ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall Inc., 1978
- 23 机械设计手册编委会. *机械设计手册: 带传动和链传动*. 北京: 机械工业出版社, 2007