与 Schur 引理相关的两种 Artin 环*

肖　杰

（北京师范大学数学系）

环论中一个众所周知的结果为："单模的自同态环是除环."大家称之为 Schur 引理. 一般地，Schur 引理的逆命题并不成立，有预投射分支的有限表示型代数和我们在第二节中讨论的代数都是这种反例. 本文第一节证明了使 Schur 引理逆命题,恒成立的 Artin 环实质上就是局部环.

Ringel[1] 证明了代数闭域上的有限维直向代数是有限表示型的. 我们在第二节中考虑一般直向 Artin 代数,证明这种代数是近乎有限表示型的,特别地，实数域上有限维直向代数是有限表示型的.

一

本文中总假定 R 是有单位元的左 Artin 环,总考虑左模.

称环 R 满足 Schur 引理逆,如果 R 上使自同态环为除环的模总是单模.

以下四个引理容易证明.

引理 1.1　设 $R = R_1 \oplus R_2$（环的直和），则 R 满足 Schur 引理逆当且仅当 R_1 和 R_2 都满足 Schur 引理逆.

引理 1.2　满足 Schur 引理逆是 Morita 等价下保持的性质.

引理 1.3　设 R 是满足 Schur 引理逆的 Artin 环，e 是 R 的幂等元，则 eRe 仍满足 Schur 引理逆.

引理 1.4　满足 Schur 引理逆这一性质在同态象下保持不变.

定理 1.1　满足 Schur 引理逆的 Artin 环恰好是与局部 Artin 环的直和 Morita 等价的 Artin 环.

证　由引理 1.1,1.2，只要考虑 R 是不可分解基 Artin 环情形.

若 R 是局部 Artin 环,局部 Artin 环上单模只有一个(在同构意义下),记为 S. 设 R 模 M 的自同态环 $\mathrm{End}_R M$ 是除环. 任何模都有单子模,因而有非零同态： $M \to M/J(M) \to S \to M$，这里 $M \to M/J(M)$ 和 $M/J(M) \to S$ 都是自然投影，$S \to M$ 是自然嵌入,从而 M 必须是单模.

设 R 是满足 Schur 引理逆的 Artin 环,若 R 不是局部环,存在两个正交的本原幂等元 e_1，e_2 使 $e_2Re_1 \neq 0$，由引理 1.3，可设 $R = (e_1 + e_2)R(e_1 + e_2)$，即 $\{e_1, e_2\}$ 是 R 的正交的本原幂等元的完全集. R 和 $R/J(R)^2$ 的通常图是一致的（见文献 [2]），由引理 1.4，可设 R 满足 $J(R)^2 = 0$，将 R 写成分次形式

本文 1986 年 10 月 13 日收到.

* 国家自然科学基金资助项目.

$$R = (e_1Re_1 \oplus e_2Re_2) \oplus (e_1Re_2 \oplus e_2Re_1),$$

考虑 R 上左模 $M = e_1Re_1/e_1J(R)e_1 \oplus e_2Re_1$, R 对 M 的作用是自然的. 由于 $J(R)^2 = 0$, $e_2Re_1 \subset J(R)$, $e_1Re_2 \subset J(R)$, 所以 e_1Re_2 对 e_2Re_1 作用是零作用. M 有真子模 $e_2Re_1 \neq 0$, 所以M不是单模. 设 f 是M的自同态, f 限制在 $e_1Re_1^{(e_1Re_1/e_1J(R)e_1)}$ 上是自同态, 这个限制必然是同构. 再由于 e_2Re_1 对 $e_1Re_1/e_1J(R)e_1$ 作用生成 e_2Re_1, 由此知 f 是满同态, 而M是有限长度模,故 f 是同构. M的自同态环是除环,但M不是单模,与题设矛盾. 证毕.

二

这一节总假定R是直向 Artin 代数.

一个 Artin 环R称为是 Artin 代数, 如果R的中心C是交换 Artin 环, R作为C上模是有限生成的. 一个 Artin 代数 R 称为是直向的, 如果不存在链: $M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \to \cdots \xrightarrow{f_m} M_m$, $m \geqslant 1$, 这里 M_i 是有限生成不可分解R模, f_i 是非零非同构的同态,且 $M_0 \simeq M_m$. 显然, 直向 Artin 代数上每个有限生成不可分解模的自同态环是除环.

设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是互不同构的单R模全体; $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是互不同构的不可分解投射R模全体, P_i 是 S_i 的投射盖; $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 是互不同构的不可分解入射 R 模全体, I_i 是 S_i 的入射包. 我们用记号 $|A|$ 表示C模A的长度. 对一个不可分解R模 M, 称M为 d 型模, 如果 $|\mathrm{End}_R M| = d$. 设 S_i, P_i, I_i 是d_i 型模.

对于R模 M, 定义其维数向量为 $\underline{\dim}\, M \in \boldsymbol{Z}^n$, 它的第 i 个分量为 $(\underline{\dim}\, M)_i = |\mathrm{Hom}_R(P_i, M)|$. R模M的合成因子中出现 S_i 的个数刚好是

$$[\mathrm{Hom}_R(P_i, M) : \mathrm{End}_R P_i] = \frac{1}{|\mathrm{End}_R P_i|}(\underline{\dim}\, M)_i$$

(因为 $\mathrm{End}_R P_i$ 是除环, $\mathrm{Hom}_R(P_i, M)$ 可以看成 $\mathrm{End}_R P_i$ 模)由文献 [2,3] 知直向 Artin 代数的有限生成不可分解模由其合成因子所唯一确定,因而由其维数向量所唯一确定.

定义R的 Cartan 矩阵是 $n \times n$ 矩阵 H, 它的 (i,j) 位置上元素是 $|\mathrm{Hom}_R(P_j, P_i)|$.

引理 2.1 直向 Artin 代数的 Cartan 矩阵是非退化的.

证 只要适当安排 $\{P_i\}$ 的顺序,可见H是上三角矩阵.

对于 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $\langle x, y\rangle = xH^{-1}y^T$ 定义了一个双线性型, 对应的二次型为 $Q_R(x) = \langle x, x\rangle = xH^{-1}x^T$, 这是一个有理系数的二次型.

引理 2.2 (Ringel[1]) 若R的同调维数是有限的,设 X, Y 是有限生成R模,则 $\langle \underline{\dim}\, X, \underline{\dim}\, Y\rangle = \sum\limits_{t \geqslant 0} (-1)^t |\mathrm{Ext}^t(X, Y)|$.

一个R模N称为是忠诚的,如果对任意 P_i 有 $\mathrm{Hom}_R(P_i, N) \neq 0$, 这也等价于对任意 I_i有 $\mathrm{Hom}_R(N, I_i) \neq 0$.

引理 2.3 (Ringel[1]) 设N是不可分解的忠诚的R模,则R的同调维数不超过 2.

$x \in \boldsymbol{R}^n$ 称为是正向量,如果 $x \neq 0$ 且 x 的每个分量都是非负的. 一个有理系数二次型Q称为是弱正定的,如果对 $\boldsymbol{Z}^n$ 中任意正向量 x 都有 $Q(x) > 0$.

引理 2.4 若R的同调维数不超过 2, 则 Q_R 是弱正定的.

证 设 $x \in \boldsymbol{Z}^n$ 是正向量, 存在正整数 d, 使 dx 等于某个 R 模 X 的维数向量 $\underline{\dim}\, X$, $X = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} X_i$, X_i 是不可分解R模,设 $\underline{\dim}\, X = dx$ 并且m极小, 那么 $i \neq j$ 时 $\mathrm{Ext}(X_i, X_j) =$

0，由于R是直向代数，故 $\mathrm{Ext}(X_i, X_i)=0$，所以 $Q_R(dx)=Q_R(\underline{\dim} X)=|\mathrm{End}_R X|+|\mathrm{Ext}_R^2(X,X)|>0$，即 $d^2Q_R(x)>0$，所以 $Q_R(x)>0$. 证毕.

称 $x\in \boldsymbol{Z}^n$ 是Q的 d 型正根，如果 x 是正向量且 $Q(x)=d$.

引理 2.5 设Q是有理系数的弱正定二次型，则对任意正整数 d，Q 在 $\boldsymbol{Z}^n$ 中的 d 型正根只有有限个.

证 Q是 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数，对 $\boldsymbol{Z}^n$ 中正向量取正值，因而对 $\boldsymbol{Q}^n$ 中的正向量也取正值；那么对 $\boldsymbol{R}^n$ 中正向量取非负值. 我们说明对任意正向量 $x\in\boldsymbol{R}^n$，$Q(x)>0$；当 $n=1$ 时，显然. 假定有正向量 $z\in\boldsymbol{R}^n$，$Q(z)=0$，由归纳法可设 z 的各个分量都大于零，由数学分析知，Q在 z 点的梯度等于零，即线性方程组 $2\langle e(i),x\rangle=0$，$i=1,\cdots,n$，在 $\boldsymbol{R}^n$ 中有正向量解，这个方程组是有理系数方程组，因而这个方程组在 $\boldsymbol{Q}^n$ 中有正向量解 y，那么 $Q(y)=\langle y,y\rangle=\sum\limits_i y_i\langle e(i),y\rangle=0$，与$Q$弱正定矛盾. 用 $\|\cdot\|$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中的通常范数，$L=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid \|x\|=1,\ x$ 是正向量$\}$是个紧闭集. Q 在L上取到极小值 r 且 $r>0$. 对任意正向量 $x\in\boldsymbol{R}^n$，$r\leqslant Q\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)=\dfrac{1}{\|x\|^2}Q(x)$，若 x 是Q的 d 型正根，就有 $r\leqslant\dfrac{1}{\|x\|^2}d$，那么 $\|x\|\leqslant\sqrt{\dfrac{d}{r}}$，因而$Q$在 $\boldsymbol{Z}^n$ 中的 d 型正根只有有限多个. 证毕.

定理 2.1 设R是直向 Artin 代数，则对任意正整数 d，R 的不可分解 d 型模只有有限个同构类.

证 设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是R的正交本原幂等元完全集，设M是不可分解 d 型R模，若M不是忠诚的，存在 $e_1',\cdots,e_m'\in\{e_1,\cdots,e_n\}(m<n)$ 使 $Re_1'RM=\cdots=Re_m'RM=0$，M 作为 $R/Re_1'R+\cdots+Re_m'R$ 模是忠诚的 d 型模. 而R的这种商环只有有限种可能，所以只要证明R的忠诚不可分解 d 型模只有有限多个. 设X是忠诚不可分解R模，我们有R模正合序列 $0\to X'\to P\to X\to 0$，$P\to X\to 0$ 是投射盖. 我们得到长正合序列

$$0\to\mathrm{Hom}_R(X,X)\to\mathrm{Hom}_R(P,X)\to\mathrm{Hom}_R(X',X)\to\mathrm{Ext}_R(X,X)\to$$
$$\mathrm{Ext}_R(P,X)\to\mathrm{Ext}_R(X',X)\to\mathrm{Ext}_R^2(X,X)\to\mathrm{Ext}_R^2(P,X)\to\cdots,$$

若有 $\mathrm{Ext}_R(X',X)\neq 0$，则有以$X$为起点，$X'$ 为终点的不可裂短正合列. 再由于短正合列 $0\to X'\to P\to X\to 0$，这与直向代数相违. 进一步不难知 $\mathrm{Ext}_R(X,X)=\mathrm{Ext}_R^2(X,X)=0$，而$R$的同调维数不超过 2，所以 $Q_R(\underline{\dim} X)=|\mathrm{End}_R(X)|=d$. 这样，$\underline{\dim}$ 就诱导了忠诚的不可分解 d 型R模到 Q_R 的 d 型正根的对应，由文献[3]知这个对应是单射，而 Q_R 的 d 型正根只有有限个，故R的忠诚不可分解 d 型R模只有有限个. 证毕.

推论 2.1 实数域上的有限维直向代数是有限表示型的.

我们不知道能否找到非有限表示型的直向 Artin 代数的例子，这种实例在代数表示论中将是十分有意义的.

致谢：深切感谢刘绍学教授的指导.

参 考 文 献

[1] Ringel, C. M., Tame algebras and integral qeadratic forms, *Leture Notes in Mathmatics* 1099, Chap. 2, 1984.
[2] Pierce, R. S., *Associative Algebras*, Chap. 6, Springer-Verlag, 1982.
[3] Auslander, M. and Reiten, I., Modules determined by their composition factors, *Illinois J. Math.*, 29(1985), 280—301.