

直接用电密 J 计算导体三维涡流场的 FE-BE 耦合法

刘志珍

(山东大学电气工程学院, 济南 250061)

王衍章

(山东大学科技处, 济南 250061)

贾智平

(山东大学计算机科学与技术学院, 济南 250061)

孙英明

(济南大学计算中心, 济南 250002)

摘要 提出一种计算导体三维涡流场的 FE-BE 耦合法. 在涡流区中直接采用涡流电密 J 为求解量的 FEM, 其公式采用八节点长方体单元进行离散, 在非涡流区中采用磁场强度 H 为求解量的 BEM, 其公式采用矩形单元离散. 根据交界面条件, 耦合得到一个求解变量仅为 J 的代数方程组. 该方法的优点就是所求量无需微分, 求解变量少, 耦合容易, 适用于多连域问题. 对两个模型进行了计算, 计算结果与测试结果吻合较好.

关键词 导体 涡流电密 磁场强度 三维涡流场 有限元法 边界元法 耦合

电气工程中大型涡流场求解问题仍是电磁场数值计算的难题之一, 研究行之有效的计算方法成为电磁场数值计算人员追求的目标. 目前, 在这个领域应用较多且比较完善的计算方法主要是有限元法(FEM)和边界元法(BEM), 它们是电磁场数值计算的两个非常有用的工具. FEM 容易处理封闭区域、非线性、复杂介质问题且系数阵稀疏、正定、对称, 但处理开域问题较困难. BEM 易于解决开域、线性问题, 尽管其代数方程组较 FEM 要少, 但其系数阵为不对称满阵. 这两种方法对于计算简单的涡流场问题非常有用, 但对于电气工程中复杂的涡流场问题, 仅用一种方法往往不是很奏效, 所以混合法在涡流场计算中越来越显示出优势来. Muller 和 Onuki 等人近几年发展起来的 FEM 及 BEM 耦合法是各种混合法中最具代表性、最有优势且应用与研究最多的一种, FEM 一般用于涡流区, BEM 用于非涡流区, 所求解的状态量也各式各样, 如 H - ψ , A - ψ - Ω , T - Ω - H 和 A^* - Ω 等组合^[1~4]. 这些方法的优势显而易见, 但缺陷也同样明显, 如状态量较多, 耗费计算资源; 求解涡流分布时需要微分, 影响精度; 耦合方法复杂等, 这些成为 FE-BE 耦合法急需解决的问题.

基于 FE-BE 耦合法存在的问题, 本文提出一种计算导体三维涡流场的 FE-BE 耦合法. 在涡流区直接采用涡流电密 J 为求解量的 FEM, 非涡流区采用磁场强度 H 为求解量的 BEM, 根据交界面条件, 耦合得到一个求解变量仅为 J 的代数方程组. 该方法使用场量求解, 无需考虑唯一性及规范条件问题; 涡流区用电流密度 J 求解, 无需微分, 保证了较高的精度; 求解变量较少, 耦合容易; 适用于多连域问题.

1 模型构造

图1是本文研究的通用模型, 区域 Ω_0 是自由空间; 区域 Ω_e 是导体涡流区, 其磁导率为 μ_0 , 电导率为 σ_e , 都是常数; Γ 是 Ω_0 和 Ω_e 的交界面, R_0 是包括激磁电流 $\mathbf{J}_s$ 的源区. 该模型对多连域问题也适用. 假设(i) 工频情况下, 磁场是准静态的, 不考虑位移电流的影响. (ii) 导体各向同性, 线性均匀. (iii) 温度的影响不计. (iv) 各量均按正弦变化.

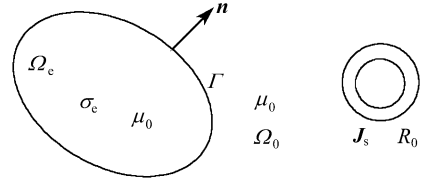


图1 涡流场模型示意图

1.1 涡流区 Ω_e

在涡流区 Ω_e , 根据 Maxwell 微分方程组, 有

$$\nabla \times \nabla \cdot \mathbf{J} + j\omega\mu_0\sigma_e\mathbf{J} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{J} = -j\omega\mu_0\sigma_e\mathbf{H}. \quad (2)$$

利用加权余量法, 取矢权函数 $\mathbf{W}$, 对(1)式进行加权积分, 得

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{J} + j\omega\mu_0\sigma_e\mathbf{J}) d\Omega = 0. \quad (3)$$

对(3)式利用散度定理及矢量恒等式进行变换, 可得

$$\int_{\Omega_e} (\nabla \times \mathbf{J} \cdot \nabla \times \mathbf{W} + j\omega\mu_0\sigma_e\mathbf{W} \cdot \mathbf{J}) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot (\nabla \times \mathbf{J} \times \mathbf{n}) ds = 0. \quad (4)$$

把(2)式代入(4)式, 得

$$\int_{\Omega_e} (\nabla \times \mathbf{J} \cdot \nabla \times \mathbf{W} + j\omega\mu_0\sigma_e\mathbf{W} \cdot \mathbf{J}) d\Omega + j\omega\mu_0\sigma_e \int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) ds = 0. \quad (5)$$

1.2 非涡流区 Ω_0

如果导体是多连域, 在非涡流区 Ω_0 中, 为了避免使用标量位求解时可能导致的多值问题, 本文利用磁场强度 $\mathbf{H}$ 作为状态变量, 应用 BEM 求解. 根据 Green 定理, 可以得出关于 $\mathbf{H}$ 的基本积分方程^[3]:

$$C_p \mathbf{H}_p = \int_{R_0} \mathbf{J}_s \times \nabla \frac{1}{r} dv + \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_Q \times \mathbf{n}) \times \nabla \frac{1}{r} ds - \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_Q \cdot \mathbf{n}) \nabla \frac{1}{r} ds, \quad (6)$$

其中, 下标 P 表示场点, Q 表示源点, C_p 是一常数, $\mathbf{n}$ 是区域 Ω_e 的单位外法向, r 是场点与源点之间的距离,

$$r = \sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2}.$$

1.3 导体边界面关系

设在边界面上任取一点 O' , 以该点为原点的局部坐标系 l - m - n 如图2所示, n 的指向与 Γ 的外法向一致, l 和 m 为 Γ 上 O' 点的两个切向分量, 则根据坐标变换关系, O' 点任一矢量 $\mathbf{F}$ 存在下列关系:

$$\begin{bmatrix} F_{ox} \\ F_{oy} \\ F_{oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ol} \\ F_{om} \\ F_{on} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

图2 坐标变换关系

其中, $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1, \cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2, \cos \alpha_3, \cos \beta_3$ 和 $\cos \gamma_3$ 分别为 $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ 和 $\mathbf{n}$ 对 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 的方向余弦.

在涡流区 Ω_e 中, 由于导体的电导率为常数, 所以导体没有电荷存在, 并且在交界面 Γ 上,

涡流的法向分量也不存在, 即有

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{或} \quad J_n = 0, \quad (8)$$

则根据 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, 有

$$\nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial J_l}{\partial l} + \frac{\partial J_m}{\partial m} = 0. \quad (9)$$

而根据(2)和(8)式, 有

$$H_l = \frac{1}{j\omega\mu_0\sigma_e} \frac{\partial J_m}{\partial n}, \quad (10)$$

$$H_m = \frac{1}{j\omega\mu_0\sigma_e} \frac{\partial J_l}{\partial n}, \quad (11)$$

$$H_n = -\frac{1}{j\omega\mu_0\sigma_e} \left(\frac{\partial J_m}{\partial l} - \frac{\partial J_l}{\partial m} \right). \quad (12)$$

2 FEM 与 BEM 的耦合

为了耦合(5)和(6)式, 在涡流区采用八节点长方体单元离散, 映射到边界面 Γ 上就是一些四节点的矩形单元. 设涡流区域 Ω_e 离散为 e_0 个单元, n_0 个节点; 边界面 Γ 离散为 e_1 个单元, n_1 个节点.

令 $\mathbf{J} = [\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y, \mathbf{J}_z]^T$, 形状函数 $[\mathbf{N}] = [N_1, N_2, \dots, N_{n_0}]$, 其中 $[\mathbf{J}_x] = [J_{1x}, J_{2x}, \dots, J_{n_0x}]^T$, $[\mathbf{J}_y] = [J_{1y}, J_{2y}, \dots, J_{n_0y}]^T$, $[\mathbf{J}_z] = [J_{1z}, J_{2z}, \dots, J_{n_0z}]^T$, 则 $\mathbf{J} = [\mathbf{N}][\mathbf{J}_x]\mathbf{i} + [\mathbf{N}][\mathbf{J}_y]\mathbf{j} + [\mathbf{N}][\mathbf{J}_z]\mathbf{k}$.

令边界上的 $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_l, \mathbf{H}_m, \mathbf{H}_n]^T$, $\mathbf{H}_t = [\mathbf{H}_l, \mathbf{H}_m]^T$, 形状函数 $[\mathbf{N}_{\Gamma}] = [N_{\Gamma_1}, N_{\Gamma_2}, \dots, N_{\Gamma_{n_1}}]$, 其中, $[\mathbf{H}_l] = [H_{1l}, H_{2l}, \dots, H_{n_1l}]^T$, $[\mathbf{H}_m] = [H_{1m}, H_{2m}, \dots, H_{n_1m}]^T$, $[\mathbf{H}_n] = [H_{1n}, H_{2n}, \dots, H_{n_1n}]^T$, 则 $\mathbf{H} = [\mathbf{N}_{\Gamma}][\mathbf{H}_l]\mathbf{l} + [\mathbf{N}_{\Gamma}][\mathbf{H}_m]\mathbf{m} + [\mathbf{N}_{\Gamma}][\mathbf{H}_n]\mathbf{n}$.

2.1 FEM 方程离散

应用 Galerkin 准则, 对(5)式进行离散, 得到以矩阵形式表示的有限元方程组为

$$[\mathbf{T}][\mathbf{J}] + j\omega\mu_0\sigma_e[\mathbf{E}][\mathbf{H}_t] = 0, \quad (13)$$

其中, $[\mathbf{T}] = [\mathbf{K}] + j\omega\mu_0\sigma_e[\mathbf{D}]$, 这里 $[\mathbf{K}]$ 和 $[\mathbf{D}]$ 为 FEM 的系数阵^[5].

(13)式也可化为

$$[\mathbf{T}_A \vdots \mathbf{T}_B] \begin{bmatrix} \mathbf{J}_e \\ \mathbf{J}'_t \end{bmatrix} + j\omega\mu_0\sigma_e[\mathbf{E}][\mathbf{H}_t] = 0,$$

即

$$[\mathbf{T}_A][\mathbf{J}_e] + [\mathbf{T}_B][\lambda][\mathbf{J}_t] + j\omega\mu_0\sigma_e[\mathbf{E}][\mathbf{H}_t] = 0, \quad (14)$$

其中, $[\mathbf{T}_A]$ 为对应 Ω_e 内部节点的系数矩阵, $[\mathbf{T}_B]$ 为对应 Ω_e 边界节点的系数矩阵, $[\mathbf{J}_e]$ 为对应 Ω_e 内部节点的涡流电密矩阵, $[\mathbf{J}_t]$ 为对应 Ω_e 边界面上的涡流电密矩阵,

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} -\int_{\Gamma} [\cos \alpha_2][\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]ds & \int_{\Gamma} [\cos \alpha_1][\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]ds \\ -\int_{\Gamma} [\cos \beta_2][\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]ds & \int_{\Gamma} [\cos \beta_1][\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]ds \\ -\int_{\Gamma} [\cos \gamma_2][\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]ds & \int_{\Gamma} [\cos \gamma_1][\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]ds \end{bmatrix}, \quad [\lambda] = \begin{bmatrix} [\cos \alpha_1] & [\cos \alpha_2] \\ [\cos \beta_1] & [\cos \beta_2] \\ [\cos \gamma_1] & [\cos \gamma_2] \end{bmatrix},$$

这里, $[\cos \alpha_1]$, $[\cos \alpha_2]$, $[\cos \beta_1]$, $[\cos \beta_2]$, $[\cos \gamma_1]$ 和 $[\cos \gamma_2]$ 皆为 $n_0 \times n_0$ 阶矩阵.

2.2 BEM 方程的离散

令 $\mathbf{J}_m = [\mathbf{N}_r][\mathbf{J}_m]$, $\mathbf{J}_l = [\mathbf{N}_r][\mathbf{J}_l]$, 则根据(12)式, 有

$$\mathbf{H}_n = \frac{j}{\omega\mu_0\sigma_e} \left(\frac{\partial[\mathbf{N}_r]}{\partial l}[\mathbf{J}_m] - \frac{\partial[\mathbf{N}_r]}{\partial m}[\mathbf{J}_l] \right). \quad (15)$$

根据 $\nabla \frac{1}{r_{ij}} = \frac{(x_i - x_j)\mathbf{i} + (y_i - y_j)\mathbf{j} + (z_i - z_j)\mathbf{k}}{r_{ij}^3} = t_l\mathbf{l} + t_m\mathbf{m} + t_n\mathbf{n}$, 经过推导就可以对边界节点

写出离散后的积分方程:

$$c_i \mathbf{H}_{li} = T_{sli} - \sum_{k=1}^{e1} \int_{\Gamma_k} \left([\mathbf{N}_r][\mathbf{H}_l]t_n + \frac{j}{\omega\mu_0\sigma_e} \left[-\frac{\partial[\mathbf{N}_r]}{\partial m} \quad \frac{\partial[\mathbf{N}_r]}{\partial l} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{J}_l \\ \mathbf{J}_m \end{bmatrix} t_l \right) ds, \quad (16)$$

$$c_i \mathbf{H}_{mi} = T_{smi} - \sum_{k=1}^{e1} \int_{\Gamma_k} \left([\mathbf{N}_r][\mathbf{H}_m]t_n + \frac{j}{\omega\mu_0\sigma_e} \left[-\frac{\partial[\mathbf{N}_r]}{\partial m} \quad \frac{\partial[\mathbf{N}_r]}{\partial l} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{J}_l \\ \mathbf{J}_m \end{bmatrix} t_m \right) ds, \quad (17)$$

其中, $i=1, 2, \dots, n1$, $\begin{bmatrix} t_l \\ t_m \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_i - x_j)/r_{ij}^3 \\ (y_i - y_j)/r_{ij}^3 \\ (z_i - z_j)/r_{ij}^3 \end{bmatrix}.$

对边界面上每个节点都可以列出一个如(16)和(17)式那样的方程, 合并起来就是全系统的代数方程组, 写成矩阵形式为

$$[\mathbf{G}][\mathbf{H}_t] + \frac{j}{\omega\mu_0\sigma_e} [\mathbf{P}][\mathbf{J}_t] = [\mathbf{T}_{st}], \quad (18)$$

其中, $[\mathbf{G}]$ 和 $[\mathbf{P}]$ 为 BEM 的系数阵, $[\mathbf{T}_{st}]$ 为激磁电流在边界节点上产生的磁场强度^[5].

2.3 FEM-BEM 耦合方程

根据交界面条件^[6]:

$$\mathbf{H}_e \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_0 \times \mathbf{n}, \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_e \cdot \mathbf{n} = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}. \quad (20)$$

(20)式在边界积分方程的离散中已自动满足, 这样根据(19)式, 就可以把(5)和(6)式进行耦合, 最终得到以矩阵形式表示的 FEM-BEM 耦合方程:

$$[\mathbf{T}_A][\mathbf{J}_e] + \left([\mathbf{T}_B][\lambda] + [\mathbf{E}][\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{P}] \right) [\mathbf{J}_t] = -j\omega\mu_0\sigma_e [\mathbf{E}][\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{T}_{st}]$$

或者写成

$$\left\{ [\mathbf{T}_A] \quad [\mathbf{T}_B][\lambda] + [\mathbf{E}][\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{P}] \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_e \\ \mathbf{J}_t \end{bmatrix} = -j\omega\mu_0\sigma_e [\mathbf{E}][\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{T}_{st}]. \quad (21)$$

3 算例计算

3.1 模型 A 计算

模型 A^[7]如图 3 所示. 方型线圈的截面积为 $14 \text{ cm} \times 14 \text{ cm}$, 铜块的尺寸为 $1.3 \text{ cm} \times 2.5 \text{ cm} \times 5.0 \text{ cm}$, 通过线圈截面的总电流为 600 A , 正弦交变的频率为 50 Hz , 铜块的电导率为 $5.497 \times 10^7 \text{ S/m}$. 铜块被剖分为 648 个长方体单元, 总节点数是 950 个, 边界节点是 534 个. 图 4

是涡流电密的三维矢量分布, 与实际情况相符合. 图 5 画出了在直线 $x = -1.3 \text{ cm}$, $z = 4.0 \text{ cm}$ 上一些点的磁密测试值与计算值的大小比较, 两者吻合较好, 这证实了该方法的有效性.

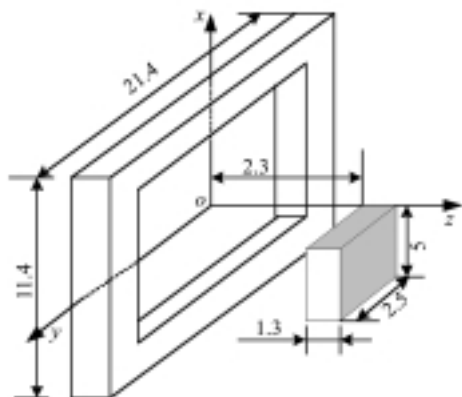


图 3 校验算例模型 A(单位: mm)

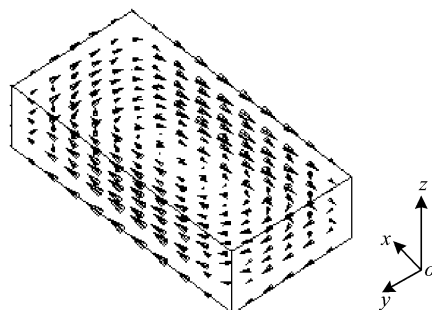


图 4 涡流电密(实部)的三维矢量分布

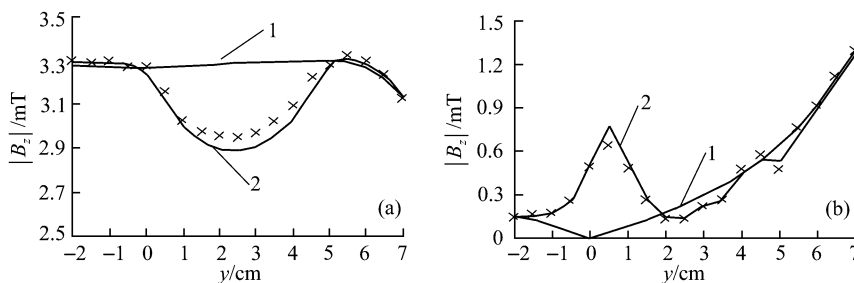


图 5 导体外的磁密大小

(a) z 向, (b) y 向. 1 示无导体块的磁密计算值, 2 示有导体块时磁密计算值, $\times$ 示测试值

3.2 模型 B 计算

模型 B 如图 6 所示, 它是基准问题 TEAM WORKSHOP Problem 7, 这是一个典型的导体

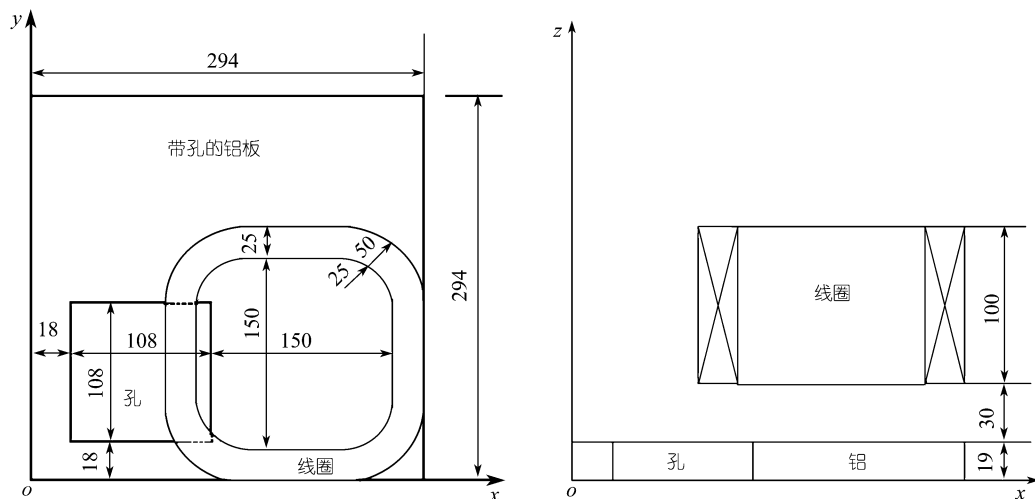


图 6 校验算例模型 B(单位: mm)

涡流多连域问题^[8]. 一激磁线圈通 50 Hz 正弦交变电流 2742 AT, 带孔铝板的电导率为 3.526×10^7 S/m.

铝板被剖分为 1095 个六面体单元, 总节点数是 1578 个, 边界节点是 862 个. 图 7 是在直线 $y = 7.2$ cm, $z = 3.4$ cm 上一些点的最大磁密测试值与计算值的大小(负值表示方向). 图 8 是涡流电密的三维矢量分布. 这些图进一步证实了本文方法的正确性.

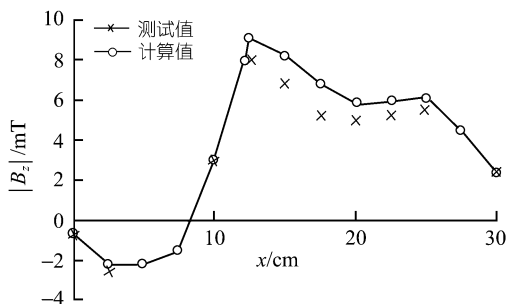


图 7 导体外的 z 向磁密大小

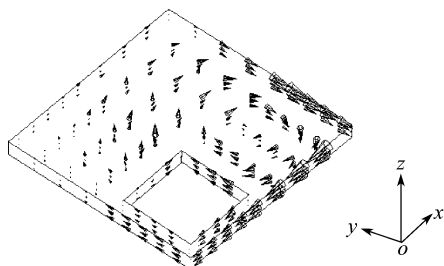


图 8 涡流电密(实部)的三维矢量分布

4 结论

本文提出的计算导体三维涡流的 FE-BE 耦合法对开域涡流问题非常有用, 该方法使用场量求解, 无需微分, 求解精度高, 不必考虑惟一性及规范条件问题, 求解变量较少, 耦合容易, 非常适用于多连域问题. 用该方法对两个模型进行了计算, 计算结果与测试结果吻合较好, 证明了本文提出方法的有效性. 实际工程中用该方法对一台大型电力变压器电屏蔽的涡流问题进行了分析和计算, 计算结果满足工程上对精度的要求.

参 考 文 献

- 1 Onuki T, Wakao S. Novel boundary element formulation in hybrid FE-BE method for electromagnetic field computations. IEEE Trans on Mag, 1992, 28(2): 1162~1165
- 2 Bouillaut F. $T\Omega$ formulation by hybrid FEM-BEM and its gauges for 3D electromagnetic calculations. IEEE Trans on Mag, 1992, 28(2): 1208~1211
- 3 Onuki T. Hybrid finite element and boundary element method applied to electromagnetic problems. IEEE Trans on Mag, 1990, 26(2): 582~587
- 4 Krahenbuhl L, Muller D. Thin layers in electrical engineering example of shell models in analyzing eddy-currents by boundary and finite element methods. IEEE Trans on Mag, 1993, 29(2): 1450~1455
- 5 盛剑霓. 工程电磁场数值分析. 西安: 西安交通大学出版社, 1991
- 6 Ruan J J, Chen X Z, Zhou K D. 3D transient eddy current calculation by the hybrid FE-BE method using magnetic field intensity $\mathbf{H}$. IEEE Trans on Mag, 1992, 28(2): 1408~1411
- 7 Alexander K, Sergey V, Tatjana V. Eddy current calculation using finite element method with boundary conditions of integral type. IEEE Trans on Mag, 1997, 32(2): 1326~1329
- 8 Rucker W M, Richter K R. A BEM code for 3-D eddy current calculations. IEEE Trans on Mag, 1985, 21(2): 462~465