

伴随鞍结点分支的非通有异宿轨道的存在性*

朱德明

(华东师范大学数学系, 上海 200062)

摘 要

通过发展指数三分性理论和建立主法向坐标, 对伴随鞍结点分支的非通有异宿轨道的保存条件导出了相应的分支方程和分支图, 并给出了具体的例子.

关键词 鞍结点、异宿轨道、指数三分性

1 预 备

近年来已有大量的文章研究高维系统的同宿、异宿分支. 但由于伴随奇点分支的同宿、异宿轨道的分支问题要困难得多, 故这方面的工作尚屈指可数^[1-3]. 本文将文献[4, 5]处理连接双曲鞍点的异宿轨道和异宿流形在摄动下保存问题的方法进一步改进并推广应用到伴随鞍结点分支的异宿轨道的保存问题. 为此, 我们必须首先发展指数三分性理论, 并依此在异宿轨道的邻域建立主法向坐标, 然后通过沿着主法向度量稳定流形和不稳定流形间的距离来解决异宿轨道的保存问题. 与已有文献相比, 本文的方法适用范围更广, 而且所得分支函数有较强的可计算性.

考虑 C^r 的 n 维系统

$$\dot{w} = G(w, t, \alpha, \mu), \quad (1.1)$$

$$\dot{w} = F(w), \quad (1.2)$$

其中 $r > 3$, $|\alpha| \ll 1$, $\mu \in J$, J 为 R^m 中原点的开邻域, $G(w, t, 0, 0) = F(w)$, $G(w, t+T, \alpha, \mu) = G(w, t, \alpha, \mu)$, $F(p) = F(q) = 0$. (1.2) 式有异宿轨道 $\Gamma = \Gamma(t)$, $\Gamma(+\infty) = q$, $\Gamma(-\infty) = p$.

记 $\dim W_p^u = u^-$, $\dim W_p^s = s^-$, $\dim W_q^u = u^+$, $\dim W_q^s = s^+$, $\dim W_q^c = c^+$, 其中 W_x^u , W_x^s , W_x^c 分别表示 x 的不稳定流形、稳定流形和中心流形. 设

$$(H_1) u^- + s^- = u^+ + s^+ + c^+ = n, \quad c^+ = 1, \quad u^- \leq u^+ + 1.$$

(H₂) $\dim(T_{\Gamma(t)} W_p^u \cap T_{\Gamma(t)} W_q^s) = \dim(T_{\Gamma(t)} W_p^u \cap T_{\Gamma(t)} W_q^{cs}) = 1$, 其中 $T_w M$ 表示 M 在 w 处的切空间.

(H₁) 隐含着 p 是双曲鞍点, q 有 1 维中心流形. (H₂) 隐含着 Γ 是沿 W_q^s 趋近 q 的, 这是非

1993-12-11 收稿, 1994-05-12 收修改稿.

* 国家自然科学基金和上海市自然科学基金资助项目.

通有的假设. 而 Γ 沿 W_q^c 趋近 q 的情况则是通有的, 我们将另文考虑. 由于当 $u^- > u^+ + 1$ 时, W_p^u 和 W_q^s 横截相交, 因而是平凡的.

限于篇幅, 本文只考虑 q 是鞍结点的情况. 当 q 是超临界 (transcritical) 和叉型 (pitchfork) 奇点时, 下面的讨论基本适用, 只需将奇点分支部分稍作相应的变动.

定义 1.1 设 $DF(q)$ 有一个零特征值, 其相应的特征向量为 e , E 为由 e 张成的子空间, π 是值域为 E 的投影, 则当 $\pi D_x G(q, t, 0, 0) > 0 (< 0)$ 为常数, $\pi \nabla (\pi \nabla (\pi F))(q) < 0 (> 0)$, 且对任意 $w - q \in E$ 成立 $(I - \pi) D_x G(w, t, \alpha, \mu) = O(w^2)$, $D_\mu G(w, t, \alpha, \mu) = O(w^2)$ 时, 称 q 为 (1.1) 式的鞍结点, α 为 q 的控制参数.

记 $\mu = \varepsilon \eta$, $|\eta| = 1$, $\beta = O(\alpha) + O(\varepsilon)$. 与文献 [2] 的容许坐标相类似, 可证存在独立于 t, α 和 μ 的 C^{r-2} 变换, 使在 p 的邻域 U_p 中 (1.1) 式具有形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x + f_p(w)x + \beta, \\ \dot{y} &= B_p y + g_p(w)y + \beta, \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中 $(x, y) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$, $\operatorname{Re}(\sigma(A_p)) < 0$, $\operatorname{Re}(\sigma(B_p)) > 0$, $f_p(0) = g_p(0) = 0$, $f_p, g_p, \beta \in C^{r-2}$; 而在 q 的邻域 U_q 中 (1.1) 式具有形式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_q x + f_q(w)x + \alpha f_1 + \varepsilon f_2, \\ \dot{y} &= B_q y + g_q(w)y + \alpha g_1 + \varepsilon g_2, \\ \dot{z} &= -z^2 + \theta(z) + h(w)z + \alpha h_1 + \varepsilon h_2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{s^+} \times \mathbb{R}^{n-s^+} \times \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(\sigma(A_q)) < 0$, $\operatorname{Re}(\sigma(B_q)) > 0$, $f_q(0) = g_q(0) = 0$, $\theta(0) = \theta'(0) = \theta''(0) = 0$, $h(0, y, z) = h(x, 0, z) = 0$, $f_i, g_i, h_i \in C^{r-2}$, $\theta \in C^{r-1}$, $h \in C^{r-3}$, $i = 1, 2$. (1.3) 和 (1.4) 式的右端项关于 t, α, μ 是 C^{r-1} 的.

将 (1.4) 式的摄动项视为 $(w, t, \alpha, \varepsilon, \eta)$ 的函数, 则由定义 1.1,

$$h_q \triangleq h_1(0, 0, 0, 0, \eta) > 0, \quad h_2((0, 0, z), t, \alpha, \varepsilon, \eta) = O(z^2), \quad (1.5)$$

$$v_i((0, 0, z), t, \alpha, \varepsilon, \eta) = O(z^2), \quad i = 1, 2, \quad v = f, g. \quad (1.6)$$

为了在 Γ 的邻域建立法向坐标, 我们还需要关于指数三分性的一些理论准备. 考虑

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

用 $X(t, t_0)$ 表示其主矩阵解, 满足 $X(t_0, t_0) = I$.

定义 1.2 称 (1.7) 式在区间 J 上具有指数三分性, 若存在常数 $K \geq 1$, $\alpha > \sigma > 0$ 及投影 $P_c(t)$, $P_s(t)$ 和 $P_u(t) = I - P_c(t) - P_s(t)$, 使当 $t, s \in J$ 时,

$$X(t, s)P_c(s) = P_c(t)X(t, s), \quad t \geq s; \quad v = c, u, s,$$

$$|X(t, s)P_c(s)| \leq K e^{\sigma(t-s)},$$

$$|X(t, s)P_s(s)| \leq K e^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$|X(s, t)P_u(t)| \leq K e^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s.$$

特别地, 当 $P_c(t) = 0$ 时, 称 (1.7) 式在 J 上具有指数二分性.

考虑 (1.7) 式的伴随方程

$$\dot{x} = -A^*(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.8)$$

其中 $*$ 表示转置. 可以证明

引理 1.1 设 $J = \mathbb{R}^i$, $i = +, -$, 系统 (1.7) 在 J 上具有指数三分性, 其相应的投影为 $P_c^i(t)$,

$P_s^+(t)$ 和 $P_u^-(t)$, 则 (1.8) 式在 J 上亦具有指数三分性, 且具有相同的常数 K, α 和 σ , 而其相应的投影 $P_c^+(t), P_s^+(t)$ 和 $P_u^-(t)$ 分别为 $P_c^{+*}(t), P_u^{+*}(t)$ 和 $P_s^{+*}(t)$.

记 $E(b, J) = \{x \in C^0 : \sup_{t \in J} \|x(t)\| e^{b|t|} < \infty\}$, $E(b, r, J) = \{x \in C^r : x, \dots, x^{(r)} \in E(b, J)\}$, 则 $E(b, J)$ 和 $E(b, r, J)$ 是分别具有范数 $\|x\|_{E(b, J)} = \sup_{t \in J} \|x(t)\| e^{b|t|}$ 和 $\|x\|_{E(b, r, J)} = \sum_{k=0}^r \|x^{(k)}\|_{E(b, J)}$ 的 Banach 空间.

下记 $\dim \mathfrak{R}P_i^+(0) = v^i, i = +, -, v = c, s, u$. 由 Hilbert 空间投影算子理论, 不难证明下面的引理及其推论.

引理 1.2 设 (1.7) 式在 R^+ 和 R^- 上具有指数三分性, 分别具有常数 K_i, α_i 和 $\sigma_i, i = 1, 2, P_c^- = 0$. 记 $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}, \sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. 则 (i) 当 $\dim(\mathfrak{R}P_s^+(0) \cap \mathfrak{R}P_u^-(0)) = c$ 时, $\dim(\mathfrak{R}(P_u^{+*}(0) + P_c^{+*}(0)) \cap \mathfrak{R}P_s^{-*}(0)) = d \triangleq n + c - u^- - s^+$, 即 (1.8) 式在 $E(-\sigma, 1, R^+) \cap E(\alpha, 1, R^-)$ 中恰有 d 个线性独立的有界解 $\psi_1(t), \dots, \psi_d(t)$. (ii) 当 $\dim(\mathfrak{R}(P_s^+(0) + P_c^+(0)) \cap \mathfrak{R}P_u^-(0)) = c$ 时, $\dim(\mathfrak{R}P_u^{+*}(0) \cap \mathfrak{R}P_s^{-*}(0)) = e \triangleq d - c^+$, 即 (1.8) 式在 $E(\alpha, 1, R)$ 中恰有 e 个线性独立的有界解 $\psi_1(t), \dots, \psi_e(t)$.

推论 1.1 设引理 1.2(i), (ii) 的条件同时成立, 则 (1.8) 式在 $E(\alpha, 1, R)$ 中恰有 e 个线性独立的有界解 $\psi_1(t), \dots, \psi_e(t)$. 当 $t \geq 0$ 时, 它们属于 $(\mathfrak{R}(P_c^+(t) + P_s^+(t)))^\perp$; 当 $t \leq 0$ 时, 它们属于 $(\mathfrak{R}P_u^-(t))^\perp$. 而 (1.8) 式在 $E(\alpha, 1, R^-) \cap (E(-\sigma, 1, R^+) - E(\alpha, 1, R^+))$ 中恰有 c^+ 个线性独立的有界解 $\psi_{c^+}(t), \dots, \psi_d(t)$. 当 $t \geq 0$ 时, $\text{span}\{\psi_{c^+}(t), \dots, \psi_d(t)\} = (\mathfrak{R}(P_s^+(t) + P_u^-(t)))^\perp$; 当 $t \leq 0$ 时, $\text{span}\{\psi_1(t), \dots, \psi_d(t)\} \subset (\mathfrak{R}P_u^-(t))^\perp$. 并且 $\text{span}\{\psi_1(0), \dots, \psi_d(0)\} = (\mathfrak{R}P_s^+(0) + \mathfrak{R}P_u^-(0))^\perp$.

下记 $A(t) = DF(\Gamma(t))$, 则由 (1.3) 和 (1.4) 式知, 当 $\Gamma(t) \in U_p$ 时, $\Gamma(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))^* = (0, \bar{y}(t))^*$.

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_p + f_p(\Gamma(t)) & 0 \\ D_x g_q(\Gamma(t)) \bar{y}(t) & B_p + g_p(\Gamma(t)) + D_y g_p(\Gamma(t)) \bar{y}(t) \end{pmatrix};$$

当 $\Gamma(t) \in U_q$ 时, $\Gamma(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))^* = (\bar{x}(t), 0, 0)^*$.

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_q + D_x f_q(\Gamma) \bar{x} + f_q(\Gamma) & D_y f_q(\Gamma) \bar{x} & D_z f_q(\Gamma) \bar{x} \\ 0 & B_q + g_q(\Gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

并且 $A(-\infty) = \begin{pmatrix} A_p & 0 \\ 0 & B_p \end{pmatrix}, A(+\infty) = \begin{pmatrix} A_q & 0 & 0 \\ 0 & B_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

引理 1.3 设 $A(t) = DF(\Gamma(t))$, 且 $(H_1), (H_2)$ 成立, 则 (1.7) 式在 R^+ 和 R^- 上具有指数三分性, $P_c^-(t) = 0, c = 1$, 从而引理 1.1, 1.2 和推论 1.1 成立, 且可定义投影算子, 使 $\mathfrak{R}P_s^+(t) = T_{\Gamma(t)} W_q^s, \mathfrak{R}(P_c^+(t) + P_s^+(t)) = T_{\Gamma(t)} W_q^{cs}, \mathfrak{R}P_u^-(t) = T_{\Gamma(t)} W_p^u, \text{span}\{\psi_1(t), \dots, \psi_d(t)\} = (T_{\Gamma(t)} W_q^s + T_{\Gamma(t)} W_p^u)^\perp \subset (T_{\Gamma(t)} \Gamma)^\perp$.

证 由文献[6]知 (1.7) 式在 R^+ 和 R^- 上具有指数三分性, 其余结论可由推论 1.1 导出.

2 分支方程和分支图

现在我们沿着 Γ 的主法向来度量 W_p^u 和 W_q^s 在扰动下的距离, 并导出分支方程.

设 (H_1) 成立, α 是鞍结点 q 的控制参数, 则易见当 $0 < \alpha \ll 1$, $|\varepsilon| \ll 1$ 时, (1.1) 式在 p_0 附近恰有 3 个双曲 T -周期解 $p_{\alpha, \varepsilon}$, $q^+ = q_{\alpha, \varepsilon}^+$ 和 $q^- = q_{\alpha, \varepsilon}^-$, 满足 $p_{\alpha, \varepsilon} = p + \beta$, $q_{0, \varepsilon}^+ = q_{0, \varepsilon}^- = q$, $q^+ = q + (0, 0, \lambda)^* + O(\alpha)$, $q^- = q + (0, 0, -\lambda)^* + O(\alpha)$, 其中 $\lambda = (h_q \alpha)^{1/2}$, $p_{\alpha, \varepsilon}$ 与 p 的稳定性相同. 今在 w - t 空间取 $t = t_0$ 平面, 并仍用 $p_{\alpha, \varepsilon}$, q 和 q^i 表示轨道 $p_{\alpha, \varepsilon}$, q 和 q^i 与此平面的交点, $i = +, -$. 用 W_i^u , W_i^s 和 $W_{\alpha, \varepsilon}^u$ 分别表示 q^i 和 $p_{\alpha, \varepsilon}$ 在时间为 T 的解映射 $P_T(t_0)$ 下的稳定流形和不稳定流形, 则 $\dim W_+^s = s^+ + 1$, $\dim W_-^s = s^+$, $\dim W_-^u = u^+ + 1$, $\dim W_+^u = u^+$, $\dim W_{\alpha, \varepsilon}^u = u^-$.

在 q 的邻域 U_q 内过 $p_0 = \Gamma(0) \triangleq (x_0, 0, 0)$ 作正交于 $T_{p_0} \Gamma(t)$ 的局部横截面 $\pi \subset U_q$, $|x_0| = \delta$. 记 $L_s^0 = W_q^s \cap \pi$, $L_u^0 = W_p^u \cap \pi$, $L_s^+ = W_+^s \cap \pi$, $L_s^- = W_-^s \cap \pi$, $L_u = W_{\alpha, \varepsilon}^u \cap \pi$, $E^d = \text{span}\{\psi_1(0), \dots, \psi_d(0)\}$, 其中 W_+^s 是 q^+ 的强稳定流形.

由 (1.4) 式易知 $L_s^0 = \{(x, 0, 0) \in \pi : |x| \ll 1\}$. 而由引理 1.3, $\pi = \text{span}\{E^d, T_{p_0} L_s^0, T_{p_0} L_u^0\} \cap U_q$, 且在 $(E^d)^\perp$ 中 $L_s^0 = (T_{p_0} L_s^0) \cap \pi$ 和 $T_{p_0} L_u^0$ 横截相交. 故当 α, ε 充分小时, L_s^i 与 L_u 在 $(E^d)^\perp$ 中的投影在 p_0 附近横截相交, 从而在 $x = x_0$ 附近存在唯一的 x^* , 使 $p^u = (x^*, y^u, z^u) = p_0 + O(\lambda) + O(\varepsilon) \in L_u$, $p_i^s = (x^*, y_i^s, z_i^s) = p_0 + O(\lambda) + O(\varepsilon) \in L_s^i$, $(p^u - p_i^s) \in E^d$, $i = +, -$. 由引理 1.3 和推论 1.1, 当 $t \geq 0$ 时 $\psi_d(t) \in \mathfrak{R} P_c^{+*}(t)$. 再由 (1.9) 式知 $\mathfrak{R} P_c^{+*}(t)$ 可取为 $\{(x, y, z) : x = y = 0\}$. 因此当 $t \geq 0$ 时可取 $\psi_d(t) = (0, 0, 1)^*$.

记 (1.1) 式的过 p^u 和 p_i^s 的轨道方程为 $q^u(t, t_0)$ 和 $q_i^s(t, t_0)$, 满足 $q^u(t_0, t_0) = p^u$, $q_i^s(t_0, t_0) = p_i^s$,

$$q^u(t, t_0) = \Gamma(t - t_0) + \lambda q_{\lambda}^u(t) + \varepsilon q_{\varepsilon}^u(t) + O(\alpha) + o(\varepsilon),$$

$$q_i^s(t, t_0) = \Gamma(t - t_0) + \lambda q_{\lambda}^i(t) + \varepsilon q_{\varepsilon}^i(t) + O(\alpha) + o(\varepsilon).$$

由前可知, $q_{\lambda}^+(+\infty) = (0, 0, 1)^*$, $q_{\lambda}^-(+\infty) = (0, 0, -1)^*$, $q_{\varepsilon}^i(+\infty) = 0$.

因为 $p^u - p_j^s \in E^d$, $j = +, -$, 故可表

$$p^u - p_j^s = \sum_{i=1}^d |\psi_i(0)|^{-2} (\psi_i^*(0)(p^u - p_j^s)) \psi_i(0). \quad (2.1)$$

记

$$d_{ij}(t_0, \alpha, \mu) = \psi_i^*(0)(p^u - p_j^s), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} d_{ij}(t, \alpha, \mu) &= \psi_i^*(t - t_0)(q^u(t, t_0) - q_j^s(t, t_0)) \\ &= \lambda(\gamma_i^u - \gamma_j^i) + \varepsilon(\Delta_i^u - \Delta_j^i) + O(\alpha) + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $\gamma_i^u(t) = \psi_i^*(t - t_0)q_{\lambda}^u(t)$, $\Delta_i^u(t) = \psi_i^*(t - t_0)q_{\varepsilon}^u(t)$, $v = u, j$, 满足 $\dot{\gamma}_i^v = 0$, $\dot{\Delta}_i^v = \psi_i^*(t - t_0)G_{\mu}(\Gamma(t - t_0), t, 0, 0)\eta$.

下设 $i = 1, \dots, d-1$. 由推论 1.1, 当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时 $\psi_i(t)$ 指数级地趋于零, 故 $\gamma_i^u(t_0) = \gamma_i^u(-\infty) = 0$, $r_i^u(t_0) = \gamma_i^u(+\infty) = 0$, $\Delta_i^u(t_0) - \Delta_i^u(t_0) = M_{ij}^u(t_0)\eta$, 其中 $j = +, -$,

$$M_{ij}^u(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^*(t)G_{\mu}(\Gamma(t), t + t_0, 0, 0)dt. \quad (2.4)$$

另一方面, $\gamma_d^u(t_0) = \gamma_d^u(-\infty) = 0$, $\gamma_d^+(t_0) = \gamma_d^+(+\infty) = 1$, $\gamma_d^-(t_0) = \gamma_d^-(+\infty) = -1$, $\Delta_d^u(+\infty) = \psi_d^*(+\infty)q_{\varepsilon}^u(+\infty) = 0$, $\Delta_d^u(t_0) - \Delta_d^u(t_0) = M_{dj}^u(t_0)\eta$, 其中

$$M_{dj}^u(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_d^*(t)G_{\mu}(\Gamma(t), t + t_0, 0, 0)dt. \quad (2.5)$$

注意到当 $t \geq 0$ 时, $\psi_d^*(t)G_{\mu}(\Gamma(t), t + t_0, 0, 0) = D_{\mu}h_2(\bar{x}(t), 0, 0, \eta)$, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$\bar{x}(t)$ 指数级地趋于零, 故由 (1.5) 式知当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $\psi_d^*(t)G_\mu(\Gamma(t), t+t_0, 0, 0)$ 指数级地趋于零. 由推论 1.1, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时 $\psi_d(t)$ 指数级地趋于零. 所以广义积分 $M_{d_j}^\mu(t_0)$ 收敛. 于是由 (2.1) — (2.3) 式, $p^\mu - p_j^\mu = 0$ 等价于

$$M_{j_i}^\mu(t_0)\mu + O(\alpha) + o(\varepsilon) = 0, \quad i=1, \dots, d-1, \quad (2.6)$$

$$-j\lambda + M_{d_j}^\mu(t_0)\mu + o(\lambda) + o(\varepsilon) = 0. \quad (2.7)$$

我们称 (2.6), (2.7) 式为伴随鞍结点分支的非通有异宿轨道的分支方程. 不难看出, $M_{j_i}^\mu$ 是独立于 j 的, 故下面略去下标 j . 记

$$M^\mu(t_0) = (M_1^\mu(t_0), \dots, M_{d-1}^\mu(t_0)). \quad (2.8)$$

由隐函数定理即得下面本文的主要结果.

定理 2.1 设 (H_1) , (H_2) 成立, $d = n + 1 - u^- - s^+$, $m \geq d$, α 是鞍结点 q 的控制参数, 存在 t_0 使得 $M^\mu(t_0)$ 的秩为 $d-1$, $\lambda = (\alpha h_q)^{1/2}$, 当 $\alpha \geq 0$. 则当 $\alpha < 0$ 时 (1.1) 式在 q 附近不存在周期轨道, 因而在 Γ 邻域亦无异宿轨道; 当 $\alpha \geq 0$ 时, 在 R^m 原点邻域存在 1 张 $m-d+1$ 维 C^{r-1} 超曲面

$$H(t_0): \tilde{\mu} = \mu(\mu^*, t_0) = O(\varepsilon),$$

其中 $\mu^* \in R^{m-d+1}$ 和 $\tilde{\mu} \in R^{d-1}$ 的分量是 μ 的分量的重新排列, 而在 $m-d+2$ 维 $\lambda - \mu^*$ 空间的原点邻域存在两张 $m-d+1$ 维 C^{r-1} 超曲面

$$L_j: \lambda = \lambda_j(\mu^*, t_0) = jM_{d_j}^\mu(t_0)\mu + o(|\mu^*|), \quad (2.9)$$

$\mu \in H(t_0)$, $j = +, -$, 使当 (λ, μ^*) 位于不同的参数区域且 $\mu \in H(t_0)$ 时, 映射 $P_j(t_0)$ 在 Γ 邻近有如图 1 所示的 8 种不同的拓扑结构.

注 2.1 在图 1 中设 μ^* 是 1 维的, 并且 $\text{sgn}(M_{d_j}^\mu(t_0)\mu) = \text{sgn}\mu^*$. 若改写曲面 L_j 的方程 (2.9) 为 $\alpha = \lambda_j^2(\mu^*, t_0)/h_q$, 则 L_j 与鞍结点分支曲面 $\alpha = 0$ 二阶相切. 在 $\alpha \geq 0$ 的半空间上亦可得到相应的 (a) — (h) 8 个不同的区域 (集合).

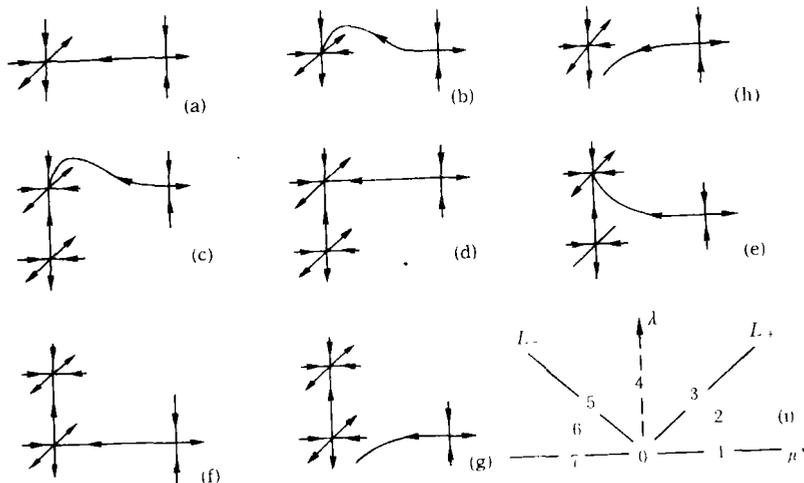


图 1 当 $\mu \in H(t_0)$ 时在 $\lambda - \mu^*$ 空间的分支图

3 应 用

考虑 4 维系统

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2 + f_1, \\
 \dot{x}_2 &= x_2 + f_2, \\
 \dot{x}_3 &= x_3 - 2x_1x_3 + \mu_1x_1^2 + \mu_2x_2^2\cos t, \\
 \dot{x}_4 &= -x_4^2 - g(x_1)x_4 + \alpha + \mu_1(x_2^2 + x_3^2) + \mu_2x_1(x_1 + b)^2,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $f_i \in C^2$, $f_i = f_i(x, t, \alpha, \mu)$, $f_i((0, 0, 0, x_4), t, \alpha, \mu) = O(x_4^2)$, $i=1, 2$, $x = (x_1, \dots, x_4)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, 当 $y \leq \frac{1}{2}$ 时, $g(y) = 0$, 当 $y > \frac{1}{2}$ 时, $g(y) = y(y - \frac{1}{2})^2(y + a)^{-1}(y + b)^{-1}$, $a = \frac{\sqrt{15}}{3} - \frac{3}{2}$, $b = 1 + 3a = \sqrt{15} - \frac{7}{2}$.

当 $\alpha = \mu = 0$ 时, (3.1) 式有奇点 $p = (1, 0, 0, 0)$, $q = (0, 0, 0, 0)$ 及连接它们的异宿轨道 $\Gamma = \{(x_i(t), 0, 0, 0)\}$, $x_i(t) = \delta(\delta + (1 - \delta)e^t)^{-1}$, $x_i(+\infty) = 0$, $x_i(-\infty) = 1$, $x_i(0) = \delta \ll 1$. p 的特征值为 $1, 1, -1, -3(2\sqrt{15} - 5)^{-1}(2\sqrt{15} - 3)^{-1}$. q 的特征值为 $-1, 1, 1, 0$. $c = c^+ = 1$, $s^+ = 1$, $u^+ = u^- = s^- = d = 2$. 易见 α 为鞍结点 q 的控制参数, 且 (3.1) 式已具有 (1.4) 式的形式.

记 $t_1 = \ln \delta - \ln(1 - \delta) < 0$ 满足 $x_i(t_1) = \frac{1}{2}$. 经简单积分运算可得 $\psi_1(t) = (0, 0, y(t), 0)^*$, $\psi_2(t) = (0, 0, 0, z(t))^*$, 其中

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \exp(-t + 2 \int_0^t x_1(s) ds) = \delta^2 e^t (\delta + (1 - \delta)e^t)^{-2}, \\
 z(t) &= \exp\left(\int_0^t g(x_1) ds\right) = \frac{2}{9} (1 - x_1)(x_1 + b)^2 / (x_1 + a)^2, \text{ 当 } t < t_1 \text{ (1 当 } t \geq t_1), \\
 M_1^\mu &= (\delta/3(1 - \delta), 0),
 \end{aligned}$$

$$M_2^\mu = \left(0, \frac{731}{216} - \frac{17}{18} \sqrt{15} + \frac{1}{36} (2\sqrt{15} - 3)^2 \ln 2\right) \triangleq (0, h).$$

于是 $H(t_0) = \{(\mu_1, \mu_2): \mu_1 = \mu(\mu_2) = O(\mu_2^2)\}$, $L_j = \{\lambda = \sqrt{a} = \lambda_j(\mu_2) = jh\mu_2 + O(\mu_2^2)\}$, 从而在 $\lambda - \mu_2$ 平面的原点邻域有图 1 所示的分支图.

若改上面第三个方程右端为 $x_3 + 2x_1x_3 + f_3$ 满足 $f_3((0, 0, 0, x_4), t, \alpha, \mu) = O(x_4^2)$, 则 $c = c^+ = s^+ = s^- = d = 1$, $u^+ = 2$, $u^- = 3$. 此时 $\psi_d(t)$ 和 M_d^μ 即为上面的 $\psi_2(t)$ 和 M_2^μ , 且在 $\lambda - \mu$ 空间原点邻域存在两个 2 维超曲面 $L_j: \lambda = jh\mu_2 + O(|\mu|^2)$, 使系统在相应的参数区域内在 Γ 附近有如图 1 所示的轨道结构.

参 考 文 献

- [1] Chow, S. N., Lin, X. B., *Diff. Int. Equs.*, 1990, 3: 435—466.
- [2] Deng, B., *SIAM J. Math. Anal.*, 1990, 21: 693—720.
- [3] Sun, J. H., Luo, D. J., *Science in China*, 1994, 37A(5): 523—534.
- [4] 朱德明, 中国科学, A 辑, 1994, 24(4): 346—352.
- [5] 朱德明, 中国科学, A 辑, 1994, 24(5): 467—473.
- [6] Hale, J. K., Lin, X. B., *J. Diff. Equs.*, 1986, 65: 175—202.