中国科学（A 辑）
第 30 卷 第 4 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2000 年 4 月

Student U-统计量的 Berry-Esseen 界*

林正炎
（浙江大学西溪校区数学系，杭州 310028）

摘要 在 $2+\delta$ 阶矩存在的条件下，建立了 Student U-统计量的 Berry-Esseen 界 $O(n^{-\delta/2})$.

关键词 Student U-统计量 Berry-Esseen 界

设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是一 i.i.d. 随机变量序列，具有共同的分布函数 $F(x)$，又设 $h(x_1,x_2)$ 是一对称函数. 定义 U-统计量

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} h(X_i,X_j).$$

Arvesen[1]研究了 Student U-统计量

$$\sqrt{n}(U_n-\theta)/S_n$$

的正态收敛性，其中 $\theta = \mathrm{E}h(X_1,X_2)$，

$$S_n^2 = 4(n-1)(n-2)^{-2}\sum_{i=1}^{n}\Big[(n-1)^{-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} h(X_i,X_j) - U_n\Big]^2.$$

引入一致距离

$$\Delta_n = \sup_x |\mathrm{P}(\sqrt{n}(U_n-\theta)/S_n < x) - \Phi(x)|,\ \ n>2,$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数，Callaert 等人[2]在 $\mathrm{E}|h(X_1,X_2)|^{4.5}<\infty$ 的条件下建立了 Berry-Esseen 界 $O(n^{-1/2})$；赵林城[3]减弱上述矩条件到 $\mathrm{E}(X_1,X_2)^4<\infty$. 这个条件还能进一步减弱吗？本文证明这是可能的，而且得到了一个最佳的结论，即，如果对某个 $\delta>0$，条件 $\mathrm{E}|h(X_1,X_2)|^{2+\delta}<\infty$ 成立，那么就有 Berry-Esseen 界 $\Delta_n = O(n^{-\delta/2})$.

记 $g(X_1) = \mathrm{E}(h(X_1,X_2)-\theta\,|\,X_1)$.

定理 假设对某个 $0<\delta\leqslant 1$，$\mathrm{E}|h(X_1,X_2)|^{2+\delta}<\infty$ 且 $\mathrm{E}g(X_1)^2>0$，那么，

$$\Delta_n = O(n^{-\delta/2}).$$

为了证明我们的定理，需要下列引理：

引理 设 H_n 是一核为 $u(x_1,x_2)$ 的 j 阶 ($j=1$ 或 2) U-统计量，满足 $\mathrm{E}u(X_1,X_2)=0$，那么对 $1\leqslant r<2$，

1999-08-27 收稿
* 国家自然科学基金(批准号：19871021)和浙江省自然科学基金资助项目

$$\mathrm{E}|H_n|^r \leqslant \begin{cases} n^{-(r-1)}\mathrm{E}\,|u(X_1,X_2)|^r, & j=1, \\ 4n^{-2(r-1)}\mathrm{E}\,|u(X_1,X_2)|^r, & j=2; \end{cases}$$

对 $r\geqslant 2$,

$$\mathrm{E}|H_n|^r \leqslant \begin{cases} c_r n^{-r/2}\mathrm{E}\,|u(X_1,X_2)|^r, & j=1, \\ c_r' n^{-r}\mathrm{E}|u(X_1,X_2)|^r, & j=2, \end{cases}$$

其中 c_r 和 c_r' 是仅与 r 有关的正常数.

这是陈希孺[4]的一个结论(对 $r\geqslant 2$ 的情形,Serfling[5]也提到上述结果).

不失一般性,可设 $\theta=0$. 记

$$\varphi(X_i,X_j)=h(X_i,X_j)-g(X_i)-g(X_j),$$
$$g^*(X_i)=\mathrm{E}[g(X_j)\varphi(X_i,X_j)\,|\,X_i].$$

为简单,记

$$h_{ij}=h(X_i,X_j),g_i=g(X_i),\varphi_{ij}=\varphi(X_i,X_j),g_i^*=g^*(X_i),\ \sigma_g^2=\mathrm{E}g_1^2.$$

根据文献[2]中关于 S_n^2 的分解,可写

$$S_n^2=4\sigma_g^2(1+T_n+R_n), \tag{1}$$

其中

$$T_n=\frac{1}{n\sigma_g^2}\sum_{i=1}^n(g_i^2-\sigma_g^2+2g_i^*),\ R_n=\frac{1}{4\sigma_g^2}\sum_{p=1}^6 R_{np},$$

而

$$R_{n1}=-4\binom{n}{2}^{-1}\sum_{i<j}g_ig_j,\quad R_{n2}=4\binom{n}{2}^{-1}\sum_{i<j}[(g_i+g_j)\varphi_{ij}-g_i^*-g_j^*],$$

$$R_{n3}=-\frac{8}{n}\sum_{i=1}^n\left[g_i\binom{n-1}{2}^{-1}\sum_{k<l}^{(i)}\varphi_{kl}\right],$$

$$R_{n4}=\frac{4}{n-2}\sum_{i=1}^n\left[\binom{n-1}{2}^{-1}\sum_{k<l}^{(i)}\varphi_{ik}\varphi_{il}\right],$$

$$R_{n5}=-\frac{4n(n-1)}{(n-2)^2}\left[\binom{n}{2}^{-1}\sum_{i<j}\varphi_{ij}\right]^2,\qquad R_{n6}=\frac{4n}{(n-2)^2}\binom{n}{2}^{-1}\sum_{i<j}\varphi_{ij}^2,$$

其中 $\sum\limits_{i<j}$ 和 $\sum\limits_{k<l}^{(i)}$ 分别表示 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ 和 $\sum\limits_{1\leqslant k<l\leqslant n,k\neq i,l\neq i}$. 于是有

$$\frac{\sqrt{n}U_n}{S_n}=\frac{\sqrt{n}U_n}{2\sigma_g}(1+T_n+R_n)^{-1/2}. \tag{2}$$

注意到 $n\sigma_g^2T_n$ 是均值为0的i.i.d.随机变量之和,有

$$\mathrm{P}\left(|T_n|>\frac{1}{4}\right)\leqslant 8\mathrm{E}\,|T_n|^{1+\delta/2}\leqslant cn^{-\delta/2}, \tag{3}$$

此处以及以后,c 表示一正常数,不同处可取不同的值.

对于 R_n,只考察 R_{n4}. 对于其他的项可完全类似地进行. 注意到 $\binom{n-1}{2}^{-1}\sum\limits_{k<l}^{(i)}\varphi_{ik}\varphi_{il}$ 是一个退化的U-统计量,利用引理(取 $j=2,r=1+(\delta/2)$),有

$$\mathrm{E}\,|R_{n4}|\leqslant(\mathrm{E}|R_{n4}|^{1+(\delta/2)})^{2/(2+\delta)}\leqslant cn^{-2\delta/(2+\delta)}\leqslant cn^{-\delta/2}.$$

对于其他的 R_{ni}，我们有相同的估计，因此 $\mathrm{E}|R_n|\leq cn^{-\delta/2}$. 进一步又有

$$\mathrm{P}\left(|R_n|>\frac{1}{4}\right)\leqslant cn^{-\delta/2}. \tag{4}$$

令 w 是$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数，它具有有界导数，无限次可微且满足

$$\frac{2}{3}\leqslant w(x)\leqslant 2;\qquad w(x)=x^{-1/2},\ \frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant\frac{3}{2}.$$

由(3)和(4)式，可考虑 $U_n^*:=\dfrac{\sqrt{n}U_n}{2\sigma_g}w(1+T_n+R_n)$ 代替$\sqrt{n}U_n/S_n$. 记

$$g_{in}=g_iI(|g_i|\leqslant\sqrt{n}),\ g_{in}^*=g_i^*I(|g_i^*|\leqslant n),$$
$$\varphi_{ijn}=\varphi_{ij}I(|\varphi_{ij}|\leqslant n(\delta)),$$

其中 $n(\delta)=n^{(4+\delta)/2(2+\delta)}$. 因为

$$\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{n}\{g_i\neq g_{in}\})\leqslant n\mathrm{P}(|g_1|>\sqrt{n})\leqslant n^{-\delta/2}\mathrm{E}|g_1|^{2+\delta}, \tag{5}$$

所以在 T_n 和 R_n 中可以 g_{in}代替 g_i. 类似地可以用 g_{in}^*和 φ_{ijn}分别代替 g_i^* 和 φ_{ij}. 此外

$$|\mathrm{E}g_{1n}|=|\mathrm{E}g_1I(|g_1|>\sqrt{n})|\leqslant n^{-(1+\delta)/2}\mathrm{E}|g_1|^{2+\delta}, \tag{6}$$

$$|\mathrm{E}\varphi_{12n}|=|\mathrm{E}\varphi_{12}I(|\varphi_{12}|>n(\delta))|\leqslant n^{-\frac{(1+\delta)(4+\delta)}{2(2+\delta)}}\mathrm{E}|\varphi_{12}|^{2+\delta}; \tag{7}$$

类似地

$$\mathrm{E}(g_1-g_{1n})^2\leqslant n^{-\delta/2}\mathrm{E}|g_1|^{2+\delta},\quad |\mathrm{E}(g_1^*-g_{1n}^*)|\leqslant n^{-\delta/2}\mathrm{E}|g_1^*|^{1+\delta/2}. \tag{8}$$

进一步记 $g_{in}'=g_{in}-\mathrm{E}g_{in}$, $\varphi_{ijn}'=\varphi_{ijn}-\mathrm{E}\varphi_{ijn}$, $\bar{g}_{in}=\mathrm{E}(g_{jn}'\varphi_{ijn}'|X_i)$. 由(5)～(8)式，可以修改 T_n 的定义为

$$T_n=\frac{1}{n\sigma_g^2}\sum_{i=1}^{n}(g_{in}^2-\mathrm{E}g_{in}^2+2g_{in}^*-2\mathrm{E}g_{in}^*)=:\frac{1}{n\sigma_g^2}\sum_{i=1}^{n}d_{in}.$$

类似地也可以 g_{in}', φ_{ijn}'和$\bar{g}_{in}$分别代替 g_i, φ_{ij}和 g_i^* 去定义 R_n. 记

$$w_n=w(1+T_n+R_n),\quad Q_n=\frac{1}{\sqrt{n}\sigma_g}\sum_{i=1}^{n}g_{in}',\quad D_n=\frac{\sqrt{n}}{2\sigma_g}\binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\varphi_{ijn}'.$$

可以考虑以 $U_n':=(Q_n+D_n)w_n$代替 U_n^*.

用 f_X 表示 X 的特征函数. 为了证明 Berry-Esseen 不等式，只需证明对任意给定的 $\varepsilon>0$，

$$J_n:=\int_{C\leqslant|t|\leqslant\varepsilon n^{\delta/2}}|t|^{-1}|f_{U_n'}(t)-\mathrm{e}^{-t^2/2}|\,\mathrm{d}t\leqslant cn^{-\delta/2}, \tag{9}$$

其中 $C>0$ 是常数. 写

$$\begin{aligned}J_n\leqslant&\int_{C\leqslant|t|\leqslant\varepsilon n^{\delta/2}}|t|^{-1}|f_{(Q_n+D_n)w_n}(t)-f_{Q_nw_n}(t)|\,\mathrm{d}t\\&+\int_{C\leqslant|t|\leqslant\varepsilon n^{\delta/2}}|t|^{-1}|f_{Q_nw_n}(t)-\mathrm{e}^{-t^2/2}|\,\mathrm{d}t=:J_{n1}+J_{n2}.\end{aligned} \tag{10}$$

首先估计 J_{n2}. 记

$$m:=m(n,t)=[C_1nt^{-2}\ln|t|],\ C\leqslant|t|\leqslant\varepsilon n^{\delta/2},$$

其中 C_1 是一个足够大的常数. 通过对常数的选择，可以假设 $2\leqslant m\leqslant n/2$. 令 $q_n=$

$\frac{1}{\sqrt{n}\sigma_g}\sum_{i=1}^{m} g_{in}^{'}$, $q_n^{'}=Q_n-q_n$, $t_n=\frac{1}{n\sigma_g^2}\sum_{i=1}^{m} d_{in}$, $t_n^{'}=T_n-t_n$. 进一步,对 $p=1,\cdots,6$, 令 r_{np}是R_{np},但是其中的求和范围做如下的改变:对 $p=1,2,5,6$,在$\{(i,j),1\leqslant i<j\leqslant m\}$上求和,对 $p=3,4$,在$\{(i,k,l),1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant k<l\leqslant m,k\neq i,l\neq i\}$上求和. 又令 $r_{np}^{'}=R_{np}-r_{np}$,并记 $r_n=\sum_{p=1}^{6} r_{np}$, $r_n^{'}=\sum_{p=1}^{6} r_{np}^{'}$. 考察 $f_{Q_nw_n}(t)=\mathrm{E}\exp(\mathrm{i}tQ_nw_n)$. 写

$$\begin{aligned}Q_nw_n=&\, q_nw(1+t_n^{'})+q_n(t_n+R_n)w^{'}(1+t_n^{'}+\theta(t_n+R_n))\\&+q_n^{'}w(1+t_n^{'}+r_n^{'})+q_n^{'}(t_n+r_n)w^{'}(1+t_n^{'}+r_n^{'})\\&+q_n^{'}(t_n+r_n)^2w^{''}(1+t_n^{'}+r_n^{'}+\theta(t_n+r_n))/2,\end{aligned}\tag{11}$$

其中$|\theta|\leqslant 1$. 有

$$\mathrm{E}t_n^2\leqslant cn^{-2}mE(g_{1n}^4+g_{1n}^{*2})\leqslant cmn^{-1-\delta/2}.$$

我们来估计 $\mathrm{E}r_n^2$. 作为一个例子,考察 $\mathrm{E}r_{n4}^2$. 利用引理,

$$\mathrm{E}r_{n4}^2\leqslant cn^{-4}m^2E\varphi_{12n}^{'4}\leqslant cm^2n^{-4}n(\delta)^{2-\delta}=cm^2n^{-2-\frac{\delta(6+\delta)}{2(2+\delta)}}.\tag{12}$$

注意到 $q_n^{'}$ 和 t_n+r_n 是独立的,而且 w 的导数是有界的,我们有

$$\mathrm{E}|q_n^{'}(t_n+r_n)^2w^{''}(1+t_n^{'}+r_n^{'}+\theta(t_n+r_n))|\leqslant c(\mathrm{E}q_n^{'2})^{1/2}\mathrm{E}(t_n+r_n)^2\leqslant cmn^{-1-\delta/2}.\tag{13}$$

由于$|t|mn^{-1-(\delta/2)}=O(|t|^{-1}(\ln|t|)n^{-\delta/2})$,因此可以在 $\mathrm{i}tQ_nw_n$ 的展开式中移去项 $\mathrm{i}tq_n^{'}(t_n+r_n)^2w^{''}(1+t_n^{'}+r_n^{'}+\theta(t_n+r_n))/2$(参见(11)式). 下面来处理(11)式右边的第2项. 为此估计 $\mathrm{E}|R_n|^{(2+\delta)/(1+\delta)}$. 作为一个例子,考察 R_{n4}. 由引理,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|R_{n4}|^{(2+\delta)/(1+\delta)}&\leqslant cn^{-2/(1+\delta)}\mathrm{E}|\varphi_{12n}^{'}|^{2(2+\delta)/(1+\delta)}\\&\leqslant cn^{-\frac{2}{1+\delta}}n(\delta)^{\frac{(1-\delta)(2+\delta)}{1+\delta}}=cn^{-\frac{\delta(3+\delta)}{2(1+\delta)}}.\end{aligned}\tag{14}$$

由此得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\,|\,q_nR_nw^{'}(1+t_n^{'}+\theta(t_n+R_n))\,|\\&\leqslant c(\mathrm{E}\,|\,q_n\,|^{2+\delta})^{\frac{1}{2+\delta}}(\mathrm{E}\,|\,R_n\,|^{\frac{2+\delta}{1+\delta}})^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}\leqslant cm^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}-\frac{\delta(3+\delta)}{2(2+\delta)}}.\end{aligned}\tag{15}$$

将和式 q_nt_n 分解为对角线和非对角线两部分:

$$q_nt_n=u_n+v_n,\qquad u_n=n^{-3/2}\sigma_g^{-3}\sum_{i=1}^{m} g_{in}^{'}d_{in}.\tag{16}$$

有

$$\mathrm{E}|u_n|\leqslant cn^{-3/2}m(\mathrm{E}|g_{1n}|^3+\mathrm{E}|g_{1n}g_{1n}^{*}|)\leqslant cmn^{-1-\delta/2}.\tag{17}$$

因此可以在 $f_{Q_nw_n}(t)$的展开式中移去 $\mathrm{i}tu_nw^{'}(1+t_n^{'}+\theta(t_n+R_n))$. 关于 v_n,有

$$\mathrm{E}v_n^2\leqslant cn^{-3}m^2(Eg_{1n}^{'2})\mathrm{E}(g_{1n}^2+g_{1n}^{*})^2\leqslant cm^2n^{-2-\delta/2}.\tag{18}$$

写

$$v_nw^{'}(1+t_n^{'}+\theta(t_n+R_n))=v_nw^{'}(1+t_n^{'})+\tau.\tag{19}$$

注意到 $\mathrm{E}R_n^2\leqslant cn^{-7\delta/6}$,对上式中的 τ 成立

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|\tau|&\leqslant c\mathrm{E}|v_n(t_n+R_n)|\leqslant c(\mathrm{E}v_n^2)^{1/2}(\mathrm{E}(t_n+R_n)^2)^{1/2}\\&\leqslant cmn^{-1-(\delta/4)}(mn^{-1-(\delta/2)}+n^{-7\delta/6})^{1/2}\\&\leqslant c(m^{3/2}n^{-(3+\delta)/2}+mn^{-1-(5\delta/6)}).\end{aligned}\tag{20}$$

因此可以用下式代替 J_{n2}中的 $f_{Q_nw_n}(t)$：

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\exp\{\mathrm{i}t[q_nw(1+t_n')+q_n'w(1+t_n'+r_n')+q_n'(t_n+r_n)w'(1+t_n'+r_n')]\}\\&+\mathrm{i}t\mathrm{E}\{v_nw'(1+t_n')\exp\{\mathrm{i}t[q_nw(1+t_n')+q_n'w(1+t_n'+r_n')\\&+q_n'(t_n+r_n)w'(1+t_n'+r_n')]\}\}=:f_{n1}(t)+f_{n2}(t).\end{aligned}\tag{21}$$

展开 $f_{n2}(t)$中的指数为 $\mathrm{i}tq_n'(t_n+r_n)w'(1+t_n'+r_n')$的因子，相应的剩余项的界是

$$ct^2\mathrm{E}|q_n'|\mathrm{E}|v_n(t_n+r_n)|\leqslant ct^2n^{3/2}m^{-(3+\delta)/2}$$

(参见(20)和(12)式)，因此可以用

$$f_{n3}(t):=\mathrm{i}t\mathrm{E}\{v_nw'(1+t_n')\exp\{\mathrm{i}t[q_nw(1+t_n')+q_n'w(1+t_n'+r_n')]\}\}$$

代替 $f_{n2}(t)$. 令

$$\xi_1(t)=\left(\mathrm{E}_1\frac{g_{1n}'}{\sqrt{n}\sigma_g}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{g_{1n}'}{\sqrt{n}\sigma_g}w(1+t_n')\right\}\right),$$

$$\xi_2(t)=\mathrm{E}_2\left(\frac{d_{2n}}{n\sigma_g^2}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{g_{2n}'}{\sqrt{n}\sigma_g}w(1+t_n')\right\}\right),$$

其中 E_i 表示给定所有与 $X_i(i=1,2)$独立的随机变量的条件下的条件期望. 我们有

$$\begin{aligned}&|\xi_1(t)|\leqslant c|t|\mathrm{E}(g_{1n}'^2/(n\sigma_g^2))\leqslant c|t|n^{-1},\\&|\xi_2(t)|\leqslant c|t|\mathrm{E}|g_{2n}'(g_{2n}^2-\mathrm{E}g_{2n}^2+2g_{2n}^*-2Eg_{2n}^*)/(n^{3/2}\sigma_g^3)|\\&\qquad\leqslant c|t|n^{-1-(\delta/2)},\end{aligned}\tag{22}$$

进一步

$$\begin{aligned}|f_{n3}(t)|&=\Big|t(m^2-m)\mathrm{E}\Big\{\frac{g_{1n}'}{\sqrt{n}\sigma_g}\frac{d_{2n}}{n\sigma_g^2}w'(1+t_n')\\&\qquad\cdot\exp\{\mathrm{i}t[q_nw(1+t_n')+q_n'w(1+t_n'+r_n')]\}\Big\}\Big|\\&\leqslant c|t|^3m^2n^{-2-(\delta/2)}.\end{aligned}$$

因此并回顾(21)式，$f_{Q_nw_n}(t)$可以用 $f_{n1}(t)$替代. 因由(12)式成立着

$$\mathrm{E}|tq_n'r_nw'(1+t_n'+r_n')|\leqslant c|t|(\mathrm{E}(q_n'^2)^{1/2})(\mathrm{E}r_n^2)^{1/2}\leqslant c|t|^3mn^{-1-7\delta/12},$$

故可以在 $f_{n1}(t)$的指数中移去项 $\mathrm{i}tq_n'r_nw'(1+t_n'+r_n')$. 利用不等式 $|\exp(\mathrm{i}x)-1-\mathrm{i}x|\leqslant|x|^{3/2}$ 于 $x=tq_n't_nw'(1+t_n'+r_n')$，并注意到

$$\mathrm{E}|q_n't_n|^{3/2}\leqslant(\mathrm{E}q_n'^2)^{3/4}\mathrm{E}|t_n|^{3/2}\leqslant cmn^{-1-(\delta/2)},$$

$f_{n1}(t)$可以用 $f_{n4}(t)$代替：

$$\begin{aligned}f_{n4}(t)&=\mathrm{E}\exp\{\mathrm{i}t[q_nw(1+t_n')+q_n'w(1+t_n'+r_n')]\}\\&\quad+\mathrm{i}t\mathrm{E}q_n't_nw(1+t_n'+r_n')\exp\{\mathrm{i}t[q_nw(1+t_n')+q_n'w'(1+t_n'+r_n')]\}\\&=:f_{n5}(t)+f_{n6}(t).\end{aligned}$$

记 $\eta(t)=\mathrm{E}\exp\{\mathrm{i}t(g_{1n}'/(\sqrt{n}\sigma_g))\}$并令条件期望

$$\zeta(t)=\mathrm{E}_1\exp\{\mathrm{i}t(g_{1n}'/(\sqrt{n}\sigma_g))w(1+t_n')\},$$

$$\kappa(t)=\mathrm{E}_1([d_{1n}/(n\sigma_g^2)]\exp\{\mathrm{i}t(g_{1n}'/(\sqrt{n}\sigma_g))w(1+t_n')\}).$$

于是可写

$$f_{n5}(t)=\mathrm{E}\exp\{\mathrm{i}tq_n'w(1+t_n'+r_n')\}\zeta^m(t),$$

$$f_{n6}(t)=\mathrm{i}tm\mathrm{E}q_n'w'(1+t_n'+r_n')\exp\{\mathrm{i}tq_n'w(1+t_n'+r_n')\}\zeta^{m-1}(t)\kappa(t).$$

由(22)式有

$$|\kappa(t)|\leqslant c|t|n^{-1-(\delta/2)}.$$

函数$|\zeta(t)|^2$是某一对称随机变量ψ的特征函数,ψ满足关系

$$n^{-1}w^2(1+t_n')\leqslant \mathrm{Var}\psi\leqslant 2n^{-1}w^2(1+t_n'),$$

$$\mathrm{E}|\psi|^3\leqslant 8\sigma_g^{-3}n^{-3/2}\mathrm{E}|g_{1n}'|^3|w(1+t_n')|^3\leqslant cn^{-1-(\delta/2)}.$$

因此对$|t|\leqslant c_1n^{\delta/2}$,

$$|\zeta(t)|\leqslant\exp(-c_2t^2/n),\tag{23}$$

此处及下文中的$c_i(i=1,2,\cdots)$是正常数. 类似地有

$$|\eta(t)|\leqslant\exp(-c_3t^2/n),\quad |t|\leqslant c_4n^{\delta/2}.\tag{24}$$

于是对$|t|\leqslant c_1n^{\delta/2}$,只要在$m$的定义中的$c_1$足够大,就有

$$|f_{n6}(t)|\leqslant ct^2mn^{-1-(\delta/2)}\exp\{-c_2(m-1)t^2/n\}$$
$$\leqslant ct^2mn^{-1-(\delta/2)}|t|^{c_2c_1}\leqslant cmn^{-1-(\delta/2)}.$$

因此f_{n4}可以用f_{n5}代替. 不妨假设$k=m/2$是一个整数,并写

$$\zeta^k(t)=\mathrm{E}_Y\exp\{\mathrm{i}tYw(1+t_n')\},$$

其中$Y=\sum_{i=1}^k g_{in}'/(\sqrt{n}\sigma_g)$,$\mathrm{E}_Y$表示在给定除了$Y$之外的所有随机变量的条件下的条件期望. 利用 Taylor 公式有

$$\zeta^k(t)=\mathrm{E}_Y\exp\left\{\mathrm{i}tY\left(1-\frac{t_n'}{2}+\frac{t_n'^2}{2}w''(1+\theta t_n')\right)\right\}$$
$$=\mathrm{E}\exp(\mathrm{i}tY)-\frac{\mathrm{i}tt_n'}{2}\mathrm{E}Y\exp(\mathrm{i}tY)+\varepsilon_1,$$

其中$|\theta|\leqslant 1$,

$$|\varepsilon_1|\leqslant c|t|t_n'^2\mathrm{E}|Y|+ct^2(t_n'^2+t_n'^4)\mathrm{E}Y^2\leqslant c|t|t_n'^2+ct^2(t_n'^2+t_n'^4).$$

而

$$\mathrm{E}t_n'^2\leqslant cn^{-1}\mathrm{E}(g_{1n}^4+g_{1n}^{*2})\leqslant cn^{-\delta/2},\tag{25}$$

$$\mathrm{E}t_n'^4\leqslant cn^{-3}\mathrm{E}(g_{1n}^8+g_{1n}^{*4})+cn^{-2}((\mathrm{E}g_{1n}^4)^2+(\mathrm{E}g_{1n}^{*2})^2)\leqslant cn^{-\delta/2}.$$

此外由(23)式,通过适当选取常数c_1,有$|\zeta^k(t)|\leqslant|t|^{-5}$. 因此,可以用

$$\mathrm{E}\exp(\mathrm{i}tY)-\frac{\mathrm{i}tt_n'}{2}\mathrm{E}Y\exp(\mathrm{i}tY)=\eta^k(t)-\frac{\mathrm{i}mtt_n'}{2}\eta^{k-1}(t)\eta_1(t)$$

代替f_{n5}中的$\zeta^k(t)$,其中$\eta_1(t)=\mathrm{E}\{(g_{1n}'/(\sqrt{n}\sigma_g))\exp(\mathrm{i}tg_{1n}'/(\sqrt{n}\sigma_g))\}$满足

$$|\eta_1(t)|\leqslant c|t|\mathrm{E}g_{1n}'^2/(n\sigma_g^2)\leqslant c|t|n^{-1}.$$

于是可写

$$f_{n5}(t)=\eta^m(t)\mathrm{E}\exp\{\mathrm{i}tq_n'w(1+t_n'+r_n')\}+\varepsilon_2.$$

对其中的ε_2,由对称性并注意到通过选取足够大的c_1,$|\eta^{m-1}(t)|\leqslant|\eta^{m-2}(t)|\leqslant t^{-7}$(参见

(24)式),有

$$|\varepsilon_2| \leqslant ct^2 mn^{-1} |\eta^{m-1}(t) \mathrm{E} t_n' \exp\{itq_n' w(1+t_n'+r_n')\}| + ct^4 m^2 n^{-2} |\eta^{m-2}(t) \mathrm{E} t_n'^2 \exp\{itq_n' w(1+t_n'+r_n')\}| \leqslant c|t|^{-3}\{|\mathrm{E} d_{nn} \exp\{itq_n' w(1+t_n'+r_n')\}| + \mathrm{E} t_n'^2\},$$

其中 $d_{nn} = g_{nn}^2 - \mathrm{E} g_{nn}^2 + 2g_{nn}^* - 2\mathrm{E} g_{nn}^*$. 由(25)式, $\mathrm{E} t_n'^2 \leqslant cn^{-\delta/2}$, 又

$$\begin{aligned} &|\mathrm{E} d_{nn} \exp\{itq_n' w(1+t_n'+r_n')\}| \\ &= \left| \mathrm{E} d_{nn} \left\{1 + \mathrm{i}t \frac{g_{nn}'}{\sqrt{n}\sigma_g} w(1+t_n'+r_n')\theta\right\} \exp\{itq_{n-1}' w(1+t_n'+r_n')\} \right| \\ &\leqslant |\mathrm{E} d_{nn} \exp\{itq_{n-1}'[w(1+t_{n-1}'+r_{n-1}') + ((n\sigma_g^2)^{-1} d_{nn} + r_n' - r_{n-1}') \\ &\quad \cdot w'(1+t_{n-1}'+r_{n-1}'+\theta((n\sigma_g^2)^{-1} d_{nn} + r_n' - r_{n-1}'))]\}| + c|t| n^{-1/2} \mathrm{E}|d_{nn} g_{nn}'| \\ &\leqslant c|t| \mathrm{E}|d_{nn} q_{n-1}'(n^{-1} d_{nn} + r_n' - r_{n-1}')| + c|t| n^{-\delta/2} \\ &\leqslant c|t| n^{-\delta/2}, \end{aligned}$$

这里利用了下列不等式: $\mathrm{E}(r_n' - r_{n-1}')^2 \leqslant cn^{-3} \mathrm{E}\varphi_{12n}^4 \leqslant cn^{-1-(7\delta/6)}$, 它可通过初等计算证明. 因此有

$$|\varepsilon_2| \leqslant ct^{-2} n^{-\delta/2},$$

且由此 $f_{n5}(t)$ 可用

$$f_{n7}(t) := \eta^m(t) \mathrm{E}\exp\{itq_n' w(1+t_n'+r_n')\}$$

代替.

写

$$\begin{aligned} &\left| \mathrm{E}\exp\{itq_n' w(1+t_n'+r_n')\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{n}\right)t^2\right\} \right| \\ &\leqslant |\mathrm{E}\exp\{itq_n' w(1+t_n'+r_n')\} - \mathrm{E}\exp(itq_n')| + \left| \mathrm{E}\exp(itq_n') - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{n}\right)t^2\right\} \right| \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

由熟知的不等式(例如参见文献[6]第5章引理1)知

$$I_2 \leqslant 16(n\sigma_g^2)^{-3/2}(n-m)\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-3/2} \mathrm{E}|g_{1n}'|^3 \leqslant cn^{-\delta/2}. \tag{26}$$

考察 I_1. 令 θ_1 和 θ_2 是与其他一切随机变量都独立的[0,1]上均匀分布的随机变量, E_θ 表示给定除了 θ_1 和 θ_2 之外的所有随机变量条件下的条件期望. 由 Taylor 公式可得

$$\mathrm{E}\exp\{itq_n' w(1+t_n'+r_n')\} = \mathrm{E}\exp\{itq_n' + \mathrm{i}t\mathrm{E}_\theta q_n'(t_n'+r_n') w'(1+\theta_1(t_n'+r_n'))\}.$$

我们来估计 $\mathrm{E}|\mathrm{E}_\theta q_n'(t_n'+r_n') w'(1+\theta_1(t_n'+r_n'))|$. 因有

$$\mathrm{E}|\mathrm{E}_\theta q_n' r_n' w'(1+\theta_1(t_n'+r_n'))| \leqslant cn^{-\delta/2}$$

(参见(15)式), 所以只需考虑 $\mathrm{E}|\mathrm{E}_\theta q_n' t_n' w'(1+\theta_1(t_n'+r_n'))|$. 类似于(16)式, 可写

$$q_n' t_n' = u_n' + v_n', \qquad u_n' = n^{-3/2}\sigma_g^{-3} \sum_{i=m+1}^{n} g_{in}' d_{in}.$$

有 $\mathrm{E}|u_n'| \leqslant cn^{-\delta/2}$ (参见(17)式)和

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\mid \mathrm{E}_\theta v_n' w'(1+\theta_1(t_n'+r_n'))\mid \\
&= \mathrm{E}\left|\mathrm{E}_\theta\left(-\frac{1}{2}v_n' + v_n'\theta_1(t_n'+r_n')w''(1+\theta_1\theta_2(t_n'+r_n'))\right)\right| \\
&\leqslant c\mathrm{E}\mid v_n'(t_n'+r_n')\mid \leqslant c\,(\mathrm{E}v_n'^2)^{1/2}(\mathrm{E}(t_n'+r_n')^2)^{1/2}\leqslant cn^{-\delta/2}
\end{aligned}
$$

(参见(18)、(25)和(14)式), 因此得证

$$\mathrm{E}|\mathrm{E}_\theta q_n'(t_n'+r_n')w'(1+\theta_1(t_n'+r_n'))|\leqslant cn^{-\delta/2},$$

进一步又有

$$I_1\leqslant c|t|n^{-\delta/2}.$$

此外,类似于(26)式,

$$\left|\eta^m(t)-\exp\left(-\frac{m}{2n}t^2\right)\right|\leqslant cn^{-\delta/2}.$$

令

$$|f_{n7}(t)-\mathrm{e}^{-t^2/2}|\leqslant|\eta^m(t)|(I_1+I_2)+\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{n}\right)t^2\right\}\left|\eta^m(t)-\exp\left(-\frac{m}{2n}t^2\right)\right|.$$

综合上面的估计得

$$J_{n2}\leqslant cn^{-\delta/2}. \tag{27}$$

最后估计 J_{n1}. 令 $m_1=[3\sqrt{n}\log n]$. 定义

$$D_{n1}=\frac{\sqrt{n}}{2\sigma_g}\binom{n}{2}^{-1}\sum_{m_1\leqslant i<j\leqslant n}\varphi_{ijn}',\quad D_{n2}=D_n-D_{n1}.$$

利用鞅论方法有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\mid D_{n2}w_n\mid^{2+\delta}&\leqslant 8\mathrm{E}\mid D_{n2}\mid^{2+\delta}\leqslant c(n-m_1)^{1+(\delta/2)}n^{-(2+\delta)}\\
&\leqslant cn^{-3(2+\delta)/4}(\log n)^{1+(\delta/2)}.
\end{aligned} \tag{28}
$$

由此即有 $\mathrm{P}(|D_{n2}w_n|>n^{-\delta/2})\leqslant cn^{-\delta/2}$. 因此可以 D_{n1}代替 D_n.

写

$$\mathrm{E}_n(t):=f_{(Q_n+D_{n1})w_n}(t)-f_{Q_nw_n}(t)=\mathrm{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_nw_nt}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}D_{n1}w_nt}-1).$$

用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_nw_nt}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}D_{n1}w_nt}-1)$代替 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_nw_nt}$,并注意到 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}D_{n1}w_nt}-1$ 是一个有界的因子,对 J_{n1}的估计的某些步骤是与对 J_{n2}的估计的相应步骤类似的,只考虑需要特别说明的那些步骤. 回顾(21)式,可以用$\bar{f}_{n1}(t)$和$\bar{f}_{n2}(t)$代替 $\mathrm{E}_n(t)$,其中

$$
\begin{aligned}
\bar{f}_{n1}(t)&=\mathrm{E}\{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}D_{n1}w_nt}-1)\exp\{\mathrm{i}t[q_nw(1+t_n')+q_n'w(1+t_n'+r_n')\\
&\quad+q_n'(t_n+r_n)w'(1+t_n'+r_n')]\}\},\\
\bar{f}_{n2}(t)&=\mathrm{i}t\mathrm{E}\{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}D_{n1}w_nt}-1)v_nw'(1+t_n')\exp\{\mathrm{i}t[q_nw(1+t_n')\\
&\quad+q_n'w(1+t_n'+r_n')+q_n'(t_n+r_n)w'(1+t_n'+r_n')]\}\}.
\end{aligned}
$$

有

$$|\bar{f}_{n2}(t)|\leqslant ct^2\mathrm{E}\mid D_{n1}v_n\mid\leqslant ct^2\,(\mathrm{E}D_{n1}^2\mathrm{E}v_n^2)^{1/2}\leqslant ct^2mn^{-\frac{3}{2}-\frac{\delta}{4}}.$$

因此可以用$\bar{f}_{n1}(t)$代替 $\mathrm{E}_n(t)$.

记 $m'=m\vee m_1$,且当 $m_1<m$ 时,令 $D_{n1}'=\dfrac{\sqrt{n}}{2\sigma_g}\dbinom{n}{2}^{-1}\sum\limits_{m'<i<j\leqslant n}\varphi_{ijn}'$ 和 $D_{n1}''=D_{n1}-D_{n1}'$. 显然

D'_{n1}与 t_n 和 r_n 独立. 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(|D'_{n1}||q'_n(t_n+r_n)|^{3/2})\\
&\leqslant c(\mathrm{E}(|D'_{n1}|^{2+\delta})^{\frac{1}{2+\delta}}(\mathrm{E}|q'_n|^{\frac{3(2+\delta)}{2(1+\delta)}})^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}(\mathrm{E}|t_n|^{\frac{3}{2}}+\mathrm{E}|r_n|^{\frac{3}{2}})\\
&\leqslant cn^{-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\vee 0}(mn^{-1-\frac{\delta}{2}}+m^2n^{-2-\delta})\leqslant cmn^{-\frac{3+\delta}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\vee 0},
\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(|D''_{n1}||q'_n(t_n+r_n)|^{3/2})\\
&\leqslant(\mathrm{E}(|D''_{n1}|^{2+\delta})^{\frac{1}{2+\delta}}(\mathrm{E}|q'_n|^{\frac{3(2+\delta)}{2(1+\delta)}})(\mathrm{E}|t_n|^{\frac{3(2+\delta)}{2(1+\delta)}}+\mathrm{E}|r_n|^{\frac{3(2+\delta)}{2(1+\delta)}}))^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}\\
&\leqslant c(m^{\frac{2+\delta}{2}}n^{-(2+\delta)})^{\frac{1}{2+\delta}}n^{\left(\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\vee 0}(m^{\frac{3(2+\delta)}{4(1+\delta)}}n^{-\frac{2+\delta}{2}}+m^{\frac{3(2+\delta)}{2(1+\delta)}}n^{-(2+\delta)})^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}\\
&\leqslant cm^{\frac{5}{4}}n^{-\frac{3+\delta}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\vee 0},
\end{aligned}\tag{30}$$

其中对于 $\mathrm{E}|D''_{n1}|^{2+\delta}$的估计类似于对 $\mathrm{E}|D_{n2}|^{2+\delta}$的估计. 结合(29)和(30)式可知,$\bar{f}_{n1}(t)$可以$\bar{f}_{n3}(t)+\bar{f}_{n4}(t)$代替,其中

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{n3}(t)&=\mathrm{E}\{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}D_{n1}w_nt}-1)\exp\{\mathrm{i}t[q_nw(1+t'_n)+q'_nw(1+t'_n+r'_n)]\}\},\\
\bar{f}_{n4}(t)&=\mathrm{i}t\mathrm{E}\{q'_n(t_n+r_n)w'(1+t'_n+r'_n)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}D_{n1}w_nt}-1)\exp\{\mathrm{i}t[q_nw(1+t'_n)\\
&\quad+q'_nw(1+t'_n+r'_n)]\}\}.
\end{aligned}$$

由不等式

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}|D'_{n1}q'_n(t_n+r_n)|&\leqslant(\mathrm{E}D'^2_{n1}\mathrm{E}q'^2_n)^{1/2}\mathrm{E}|t_n+r_n|\\
&\leqslant cn^{-1/2}(mn^{-1}+m^2n^{-2})\leqslant cmn^{-3/2},\\
\mathrm{E}|D''_{n1}q'_n(t_n+r_n)|&\leqslant(\mathrm{E}D''^2_{n1})^{1/2}[(\mathrm{E}q'^2_n\mathrm{E}t_n^2)^{1/2}+(\mathrm{E}q'^2_n\mathrm{E}r_n^2)^{1/2}]\\
&\leqslant c(mn^{-2})^{1/2}(mn^{-1-\delta/2}+m^2n^{-2-\delta})^{1/2}\leqslant cmn^{-3/2-\delta/4},
\end{aligned}$$

对 $\delta<1$ 的情形,我们可以移去$\bar{f}_{n4}(t)$. 当 $\delta=1$ 时,从上面的估计,可以用

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{n5}(t):=\mathrm{i}t\mathrm{E}\{&q'_nt_nw'(1+t'_n+r'_n)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}D'_{n1}w_nt}-1)\\
&\cdot\exp\{\mathrm{i}t[q_nw(1+t'_n)+q'_nw(1+t'_n+r'_n)]\}\}
\end{aligned}$$

代替$\bar{f}_{n4}(t)$. 令 r''_{np}是R_{np},但是其中的求和范围做如下的改变:对 $p=1,2,5,6$,在$\{(i,j),m<i<j\leqslant n\}$上求和;对 $p=3,4$,在$\{(i,k,l),m<i\leqslant n,m<k<l\leqslant n,k\neq i,l\neq i\}$上求和. 又令$r'''_{np}=r'_{np}-r''_{np}$,例如

$$r'''_{np}=\frac{4}{n-2}\binom{n-1}{2}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{m+1\leqslant l\leqslant n}^{(i)}\sum_{l\leqslant k\leqslant l-l}^{(\mathrm{i})}\varphi'_{ikn}\varphi'_{iln}+\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{1\leqslant l\leqslant n}^{(i)}\sum_{1\leqslant k\leqslant(l-1)\wedge m}^{(i)}\varphi'_{ikn}\varphi'_{iln}\right\}.$$

令 $r''_n=\sum_{p=1}^{6}r''_{np}$,$r'''_n=\sum_{p=1}^{6}r'''_{np}$. 显然 r''_n与σ 域$\sigma(X_1,\cdots,X_m)$是独立的. 利用鞅论方法对于 $\delta=1$ 的情形有

$$\mathrm{E}r'''^2_{n4}\leqslant cn^{-6}(m^2n^2+n^2mn)\mathrm{E}\varphi'^4_{12n}\leqslant cmn^{-3}n(1)\leqslant cmn^{-13/6}.\tag{31}$$

对于 $\mathrm{E}r'''^2_n$有相同的界. 因此

$$\mathrm{E}|q'^2_nt_nr'''_n|\leqslant(\mathrm{E}q'^4_n\mathrm{E}t_n^2)^{1/2}(\mathrm{E}r'''^2_n)^{1/2}\leqslant cmn^{-19/12}.$$

此外

$$\mathrm{E}\,|\,q'_n t_n r'''_n\,| \leqslant (\mathrm{E}q'^2_n \mathrm{E}t_n^2)^{1/2}(\mathrm{E}r'''^2_n)^{1/2} \leqslant cmn^{-11/6},$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\,|\,q'_n t_n D'_{n1}(t_n + r_n + r'''_n)\,|\\ &\quad\leqslant (\mathrm{E}q'^2_n \mathrm{E}D'^2_{n1})^{1/2}(\mathrm{E}t_n^2 + (\mathrm{E}t_n^2\mathrm{E}r_n^2)^{1/2}) + (\mathrm{E}q'^4_n\mathrm{E}D'^4_{n1})^{1/4}(\mathrm{E}t_n^2)^{1/2}(\mathrm{E}r'''^2_n)^{1/2}\\ &\quad\leqslant cmn^{-2}.\end{aligned}$$

因此可以用

$$\begin{aligned}\bar{f}_{n6}(t) := \mathrm{i}t\mathrm{E}\{&q'_n t_n w'(1 + t'_n + r''_n)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}D'_{n1}w(1+t'_n+r''_n)t} - 1)\exp\{\mathrm{i}t[q_n w(1+t'_n)\\ &+ q'_n w(1 + t'_n + r''_n)]\}\}\end{aligned}$$

代替$\bar{f}_{n5}(t)$. 利用估计 f_{n4}时的记号,可写

$$\begin{aligned}\bar{f}_{n6}(t) = \mathrm{i}tm\mathrm{E}q'_n w'(1 + t'_n + r''_n)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}D'_{n1}w(1+t'_n+r''_n)t} - 1)\\ \cdot\exp\{\mathrm{i}tq'_n w(1 + t'_n + r''_n)\}\zeta^{m-1}(t)\kappa(t).\end{aligned}$$

回顾对 $f_{n6}(t)$的估计并注意到 $\mathrm{E}|D'_{n1}|\leqslant cn^{1/2}$,我们可以移去$\bar{f}_{n6}(t)$, 因此只需考察$\bar{f}_{n3}(t)$就够了. 综合以下事实:

$$(\mathrm{E}D''^2_{n1})^{1/2}\leqslant cm^{1/2}n^{-1}, \qquad \mathrm{E}|q'_n r'''_n| \leqslant cm^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}-\frac{7\delta}{12}},$$

$$\mathrm{E}|D'_{n1}(t_n + r_n + r'''_n)| \leqslant c(m^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}} + mn^{-\frac{3}{2}-\frac{7\delta}{12}} + m^{\frac{1}{2}}n^{-1-\frac{7\delta}{12}}),$$

可以用

$$\begin{aligned}\bar{f}_{n7}(t) &:= \mathrm{E}\{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}D'_{n1}w(1+t'_n+r''_n)t} - 1)\exp\{\mathrm{i}t[q_n w(1+t'_n) + q'_n w(1 + t'_n + r''_n)]\}\}\\ &= \mathrm{E}\{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}D'_{n1}w(1+t'_n+r''_n)t} - 1)\exp\{\mathrm{i}tq'_n w(1 + t'_n + r''_n)\}\zeta^m(t)\}\end{aligned}$$

代替 $\bar{f}_{n3}(t)$(参见 $f_{n5}(t)$). 回顾对 $\zeta^m(t)$的估计并注意到 $\mathrm{E}|D'_{n1}|\leqslant cn^{-1/2}$,得

$$J_{n1}\leqslant cn^{-\delta/2}.$$

将它与(27)式结合即得证定理.

参 考 文 献

1 Arvesen J N. Jackknifing U-statistics. Ann Math Statist, 1969, 40(6): 2 076 ~ 2 100

2 Callaert H, Veraverbeke N. The order of the normal approximation for a studentized U-statistics. Ann Statist, 1981, 9(1): 194 ~ 200

3 赵林城. 学生氏 U-统计量正态逼近的速度. 科学探索,1983,3(2):45 ~ 52

4 陈希孺. 关于 U-统计量和 von-Mises 统计量的极限性质. 中国科学,1980,(6): 522 ~ 532

5 Serfling R J. Approximation Theorems of Mathematical Statistics. New York: Wiley, 1980

6 Petov V V. Sums of Independent Random Variables. Berlin: Springer, 1975