

紧凑拉伸试样的 K_I

范天佑

(北京工业学院)

固体力学的一门新分支——断裂力学兴起之后,应力强度因子的计算,一直是人们重视的重要课题之一。紧凑拉伸试样,在测定平面应变断裂韧性试验中是用得最多的试样之一,因而它的 K_I 的计算,自然引起广泛的注意。这种试样的几何尺寸同裂纹长度 a 相比均属有限。同其它的有限尺寸的含裂纹弹性体一样,由于数学上的困难,至今尚未能得到其普遍适用的精确分析解。用各种分析方法尝试的结果,最后仍只能归结为求数值解^[1]。在数值解法中,边界配位法比较简易可行并且具有一定的精确性。Srawley, Gross 用此方法计算的 K_I ^[2,3],几乎是这方面已发表的唯一系统的结果,并且已被广泛引用。本文所报道的工作,在一个方面,有核对 Srawley, Gross 等人计算结果的作用(这是本文的主要方面);在另一个方面,我们又试图将其计算范围加以适当扩大,特别是扩大到他们尚未给出过的 $a/W = 0.1$ 和 $a/W = 0.9$ 的情形。

紧凑拉伸试样如图 1 所示。裂纹位于 DO 处,长度为 a 。 W 为试样的宽度, $2H$ 为其高度,并设其厚度为 B 。计算时所用的直角坐标系及相应的极坐标系取在裂纹尖端处。

我们知道,这里所采用的边界配位法,是将 Williams^[4] 关于单边裂纹问题的无穷级数解(亦称为 Williams 应力函数)截断为有限项,例如为 $2m$ 项,然后用边界上的 m 个点处的 $2m$ 个边界条件确定 $2m$ 个待定系数,其中,所得到的第一个系数即对应于所求的 K_I 。计算表明,当外力 P 和试样厚度 B 给定

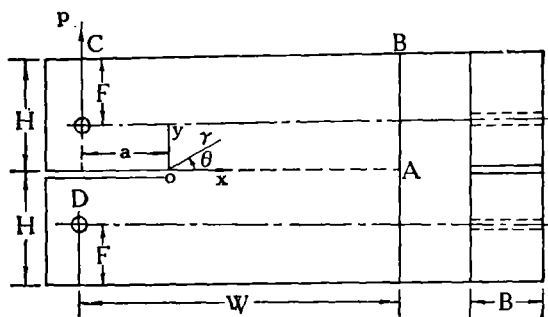


图 1

后, K_I 主要随参数 H/W 和 a/W 变化。Srawley, Gross 还考虑过另一因素^[3],即施力点的位置(他们表示成参数 F/H)的影响,不过根据他们的计算,此因素对 K_I 的影响相对于 H/W 和 a/W 的影响小得多,因此我们不考虑这一因素,我们所计算的相当于取 $F/H = 1$ 的情形。

由图 1 可见,试样在几何和受力方面均关于 ox 轴对称,取其一半(即 $ABCD$ 部分)计算即可。我们取 $ABCD$ 为计算边界,在其上设置 m 个计算点(但 D 处不能设置计算点), m 的数目,我们最少取 4,最多取 20,相应的代数方程组的阶为 8 至 40,这比 Srawley 等所建议的数要低得多(他们提出 m 的数目从 18 到 45,相应的代数方程组的阶从 36 到 90)。边界上的计算点,等距离配置,间距 Δ/W (即计算步长)一般在 0.35 至 0.15 之间。对同一高宽比的样品,采用三种或四种不同计算步长(相应于取三种或四种不同

本文 1976 年 1 月 15 日收到。

的配置点,亦即相应于方程组取三种或四种不同的阶数),如果所得结果很接近,即认为解稳定。我们共做了九组不同高宽比的样品的计算,在每一组中,裂纹长度 a/W 从 0.1 至 0.8 的解都很稳定, $a/W = 0.9$ 的解稳定程度差些,但多作几次计算(例如取六种或八种不同配置点计算,即计算量相当于 $a/W = 0.1 \sim 0.8$ 各种情形的计算量的两倍),亦得到相对稳定的结果。边界条件的提法与资料 [2] 相同,即采用应力函数 φ 及其法向导数 $\partial\varphi/\partial n$ 表达。

本文的数值计算是在 109-乙机上进行的。应力强度因子采用无量纲形式 $K_1BW^{1/2}/P$ 表达,计算结果列于表 1。为了便于比较,将 Srawley, Gross 的计算结果列于表 2。

计算结果的分析 and 讨论:

一、本文数值解与 Srawley, Gross 数值解的比较

表 1 和表 2 的值绝大部分符合得较好,但两者有明显出入的,仍有六处:

1. $H/W = 1/5$, $a/W = 0.6$
相差 $\sim 2\%$;
2. $H/W = 1/4$, $a/W = 0.6$
相差 $\sim 3\%$;
3. $H/W = 1/4$, $a/W = 0.7$
相差 $\sim 1.5\%$;
4. $H/W = 1/3$, $a/W = 0.3$
相差 $\sim 1\%$;
5. $H/W = 4/5$, $a/W = 0.8$
相差 $\sim 1\%$;
6. $H/W = 1/1$, $a/W = 0.8$
相差 $\sim 3\%$ 。

我们对这几种情形,作了多次复算,所得结果仍与表 1 中所列的值相同,这是我们仍然坚持自己计算结果的一个方面的依据,同时下面再从其它方面作进一步分析,以说明

表 1 本文数值解 $K_1BW^{1/2}/P$

$H/W \backslash a/W$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1/5	9.08	12.85	16.83	20.70	24.56	28.57	33.43	46.76	122.01
1/4	7.42	10.20	12.97	15.75	18.56	21.75	27.17	43.08	121.04
1/3	5.83	7.63	9.45	11.31	13.48	16.65	23.22	41.42	121.55
2/5	5.03	6.44	7.86	9.46	11.56	15.04	22.26	41.20	121.94
1/2	4.26	5.36	6.52	8.01	10.22	14.02	21.68	41.22	123.26
3/5	3.72	4.76	5.85	7.33	9.63	13.58	21.56	41.20	121.38
2/3	3.49	4.52	5.58	7.09	9.45	13.51	21.53	41.25	121.86
4/5	3.19	4.20	5.30	6.85	9.29	13.44	21.51	41.19	122.57
1/1	2.93	3.99	5.14	6.74	9.22	13.41	21.53	41.24	124.65

表 2 Srawley, Gross 解^[2,3] $K_1BW^{1/2}/P$

$H/W \backslash a/W$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1/5	—	12.90	16.85	20.72	24.49	28.01	33.42	—	—
1/4	—	10.20	13.00	15.76	18.57	22.35	26.81	—	—
1/3	—	7.65	9.35	11.34	13.53	16.64	23.16	—	—
2/5	—	6.44	7.87	9.46	11.54	15.00	22.20	41.13	—
1/2	—	5.36	6.52	8.00	10.18	13.98	21.56	41.01	—
3/5	—	4.75	5.84	7.33	9.63	13.62	21.53	41.04	—
2/3	—	—	5.59	7.10	9.45	13.52	21.54	—	—
4/5	—	4.21	5.31	6.86	9.29	13.44	21.53	40.85	—
1/1	—	3.99	5.14	6.74	9.22	13.42	21.53	40.01	—

Srawley, Gross 所给出的这些数值的可疑之处。

以下对上述情形具体分析如下:

(1) 情形 $H/W = 1/1$, $a/W = 0.8$ 和 $H/W = 4/5$, $a/W = 0.8$:

这里有一个很好的资料有助我们的分析,即陈饒同志根据 Koiter^[5] 的渐近近似理

论的两个结果,利用等效力系原理,得到紧凑拉伸试样 K_1 的如下的近似分析表达式^[6]:

$$K_1 BW^{1/2}/P = 1.463(1.718 + a/W) \times (1 - a/W)^{-3/2}. \quad (1)$$

此公式适用于 H/W 充分大(即 H/W 接近于 1,等于 1 和大于 1)及 a/W 接近于 1 的情形。由式(1)所得之计算值如表 3:

表 3 公式(1)给出的计算值

a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$K_1 BW^{1/2}/P$	3.04	3.92	5.04	6.67	9.18	13.41	21.53	41.19	121.12

比较表 1 和表 3,可见,近似分析解公式(1)在其适用范围内是相当准确的,其精确程度随 $H/W \rightarrow 1$ 和 $a/W \rightarrow 1$ 而增高,这正是 Koiter 渐近理论所预期的。(关于表 1 的 $a/W = 0.9$ 栏里个别数据与表 3 同一栏里的数据 121.12 的明显出入,后面另有讨论。)

根据上面所述,公式(1)可以作为分析 $H/W = 1/1$, $a/W = 0.8$ 和 $H/W = 4/5$, $a/W = 0.8$ 两种情形的一个标准。为便于比较,特列表 4 如下:

表 4 $a/W = 0.8$ $K_1 BW^{1/2}/P$

H/W	4/5	1/1
Srawley, Gross	40.85	40.01
本文	41.19	41.24
公式(1)	41.19	

情形 $H/W = 1/1$, $a/W = 0.8$, 本文数值解与公式(1)相差 $\sim 0.1\%$,这可用计算误差来解释,而 Srawley, Gross 解与之相差竟达 3%,可见他们这个数值不正确。

情形 $H/W = 4/5$, $a/W = 0.8$, 本文数值解与公式(1)完全一致,而 Srawley, Gross 的结果与之相差 $\sim 1\%$,这表明他们的这个计算值也不好。同时,理论分析表明,在给定的 a/W 下, $K_1 BW^{1/2}/P$ 应随 H/W 的减小而增大,因而这种情形下的 $K_1 BW^{1/2}/P$ 应该比 41.19 略大,但他们的值是 40.85,实际是比 41.19 小,并且小得颇多(不能用计算误差来

解释),从这方面也可以断定他们的这个结果不对。

(2) 情形 $H/W = 1/5$, $a/W = 0.6$

当 H/W 不大, a/W 也不大时,目前尚无准确可靠的分析解作为比较的标准,但可以从分析表 1 和表 2 所列数据的变化规律来判断,因为计算结果正确,变化应有规律,反之则紊乱。此情形的 K_1 值及其一次和二次差分如表 5:

表 5 $H/W = 1/5$

本文						
a/W	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$K_1 BW^{1/2}/P$	12.85	16.83	20.70	24.56	28.57	33.43
Δ_1	3.98	3.87	3.86	4.01	4.86	
Δ_2		-0.11	-0.01	0.15	0.85	
Srawley, Gross						
a/W	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$K_1 BW^{1/2}/P$	12.90	16.85	20.72	24.49	28.01	33.42
Δ_1	3.95	3.87	3.77	3.52	5.41	
Δ_2		-0.08	-0.10	-0.25	1.89	

可以看出,本文数值解的 Δ_2 随 a/W 的增加而增加,变化很有规律;而 Srawley, Gross 解的 Δ_2 的变化无规律,在 $a/W = 0.6$ 处表现紊乱,因而不正确。

(3) 情形 $H/W = 1/4$, $a/W = 0.6$ 和 $H/W = 1/4$, $a/W = 0.7$

在这两种情形,表1和表2所列数据及其第一次和第二次差分如表6所示:

表6 $H/W = 1/4$

本 文						
a/W	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$K_1BW^{1/2}/P$	10.20	12.97	15.75	18.56	21.75	27.17
Δ_1	2.77	2.78	2.81	3.19	5.42	
Δ_2	0.01	0.03	0.38	1.23		
Srawley, Gross						
a/W	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$K_1BW^{1/2}/P$	10.20	13.00	15.76	18.57	22.35	26.81
Δ_1	2.80	2.76	2.81	3.78	4.46	
Δ_2	-0.04	0.05	0.97	0.68		

由表6可见,本文的数值解的 Δ_2 随 a/W 的增加而增加,变化是有规律的;而 Srawley, Gross 解的 Δ_2 随 a/W 的增加,忽而增大,忽而减小,是无规律的,特别是在 $a/W = 0.6$ 和 $a/W = 0.7$ 处更紊乱,说明他们这两个结果错误。

(4) 情形 $H/W = 1/3$, $a/W = 0.3$

对这种情形,我们也作了类似的分析比较,结果表明,我们的计算值符合普遍规律,即其 Δ_2 随 a/W 的增大而增长;相反, Srawley, Gross 的计算值变化无规律,特别是由 $a/W = 0.3$ 处及其左右的 $K_1BW^{1/2}/P$ 所得的 Δ_2 变化反常,可以断定他们的计算值不正确。表7列出了这一情形下的分析比较的结果。

所有比较表明,本文的结果比 Srawley 等可靠。

二、 $a/W = 0.1$ 的各种情形

Srawley, Gross 的计算结果中没有 $a/W = 0.1$ 的各种情形的解答,本文第一次给出这方面的结果,自然是一种尝试。计算表明, $a/W = 0.1$ 时,各种 H/W 下的 K_1 值都很稳定。表1 $a/W = 0.1$ 栏里的各数据,无论从 $K_1BW^{1/2}/P$ 随 H/W 的变化规律来看,或

表7 $H/W = 1/3$

本文	a/W	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
	$K_1BW^{1/2}/P$	7.63	9.45	11.31	13.48	16.65	23.22
	Δ_1	1.82	1.86	2.17	3.17	6.57	
	Δ_2		0.04	0.31	1.00	3.40	
Srawley, Gross	a/W	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
	$K_1BW^{1/2}/P$	7.65	9.35	11.34	13.53	16.64	23.16
	Δ_1	1.70	1.99	2.19	3.11	6.52	
	Δ_2		0.29	0.20	0.92	3.41	

者从 $K_1BW^{1/2}/P$ 随 a/W 的变化规律来看,它们均属正常。目前尚无这方面的分析解,也没有其它的数值解可资比较,因此这些计算值的可靠性有待进一步研究。

三、 $a/W = 0.9$ 的各种情形

Srawley, Gross 的计算结果中也没有 $a/W = 0.9$ 的各种情形的解答,本文第一次报道这方面的结果,自然也是一种尝试。计算表明,这些解的稳定程度较差,并且这些计算值随 H/W 的变化也无规律,特别是其中有两个数据为123.26和124.65,它们与公式(1)的差达到 $\sim 1.5\%$ 和 $\sim 3\%$,因而这些结果不能认为是满意的。但除这两个结果外,其余结果均与公式(1)给出的121.12很接近,或者相差不大,这说明用边界配位法计算 $a/W = 0.9$ 时的 K_1 仍然是可行的,并且具有一定的精确性。

总结以上的讨论,可以看出,由于边界配位法的收敛性尚无证明,使得计算工作带有一定的盲目性。其次,边界配位法所得的结果是一系列的离散值,在使用上也有不便之处,我们曾试图根据数值解用纯数值分析的方法构造一个适用范围较宽的 K_1 的近似分析表达式,此项工作的工作量很大,但结果并不理想。还有,本试样计算方案中, CD 边上的边界条件采用了双悬臂梁近似(属于一种所谓的 Saint-Venant 边界条件),也有必要对

[下转 489 页]

其明显不同的特征。利用这些特征*,就可以在 Δ 给定的情况下,根据单粒子速度分布的实验曲线确定非衍射贡献和衍射贡献所占的成分。此外,利用上述非衍射事件及各种类型的衍射事件的特征(例如(33)式及(36)式所代表的特征),甚至可望很粗略地判断每一个单独的事件(Event)是属于那一种类型。

参 考 资 料

- [1] Koba, Z., Nielsen, H. B. and Olesen, P., *Phys. Letters* **38B** (1972), 25; *Nucl. Phys.*, **B40** (1972), 317.
- [2] Slansky, S., *Phys. Reports*, **11C**, 1974, No. 3.
- [3] Whitmore, J., *Phys. Reports*, **10C**, 1974, No. 5.
- [4] Nieh, H. J. and Wang, J. M., *Phys. Rev.*, **D5** (1972), 2226.
- [5] Chou, T. T. (邹祖德) and Yang, C. N. (杨振宁), *Phys. Rev.*, **D7** (1973), 1425; Chao, A. W. and Quigg, C., *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 2016.
- [6] Nussinov, S., Quigg, C. and Wang, J. M.

(王俊明), *Phys. Rev.*, **D6** (1972), 2713; Sivers, D. and Thomas, G. H., *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 208.

- [7] Jones, S. T. and Snider, D. B., *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 242.
- [8] Dash, J. W., *Phys. Letters*, **49B** (1974), 81.
- [9] Kafka, T., et al., *Phys. Rev. Letters*, **34** (1974), 687.
- [10] Jobs, M. and Shaylor, H. R., *Reports on Progress in Physics*, **35** (1972), 1077.
- [11] Feynman, R. P., *Phys. Rev. Letters*, **23** (1969), 1415; Benecke, J., Chou, T. T. (邹祖德), Yang C. N. (杨振宁), and Yen, E., *Phys. Rev.*, **188** (1969), 2159.
- [12] Dao, F. T. and Whitmore, J., *Phys. Letters*, **46B** (1973), 252.
- [13] Bromberg, C. M., et al., *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 1864.
- [14] Chew, G. F. and Pignotti, A., *Phys. Rev.*, **181** (1969), 1914; Frazer, W. R., et al., *Rev. Mod. Phys.*, **44** (1972), 284.

* 当然还必须作更接近实际的定量的计算,把这些粗略的特征定量地表达出来。

[上接 497 页]

这种近似所带来的误差作出估计。这些在实践上和理论上都很重要的问题,有待进一步研究。

参 考 资 料

- [1] Bowic, O. L., *Mechanics of Fracture*, vol. 1 (ed. by G. C. Sih), 1973.

- [2] Srawley, J. E., Gross, B., *Mat. Res. Stand.*, **7** (1967), 4, 155.
- [3] Srawley, J. E., Gross, B., *Eng. Fract. Mech.*, **4** (1972), 587.
- [4] Williams, M. L., *J. Appl. Mech.*, **24** (1957), 109.
- [5] Benthem, J. P., Koiter, W. T., *Mechanics of Fracture*, vol. 1 (ed. by G. C. Sih), 1973.
- [6] 陈 饒, 若干常用试样的断裂力学数据, 钢铁研究院, 1975.