

# 金属塑性变形的主剪切带分析

方 漪

(青岛大学机电学院机械系, 青岛 266071)

**摘要** 根据金属宏观塑性变形的特点, 提出了塑性主剪切带的概念. 并且利用这一概念详细分析了平面应力和平面应变塑性变形的特征线理论. 塑性主剪切带作为金属变形的一个基本物理特征, 为金属塑性变形的宏观唯象理论补充了一个新概念.

**关键词** 塑性变形 主剪切带 应力分析 应变分析

在塑性理论中, 对塑性平面应变滑移线问题的研究比较完善, 不但给出了许多严谨的数学结果, 而且有着明确的物理概念. 但是, 平面应变滑移线的概念却不能直接应用于塑性平面应力问题或其他塑性变形问题中. 在塑性平面应变问题中, 以最大剪应力迹线定义的滑移线与应力方程的特征线相重合<sup>[1, 2]</sup>. 然而在塑性平面应力问题中, 以最大剪应力迹线定义的滑移线就不再是应力方程的特征线了. 由此可以判定, 以最大剪应力迹线所描述的塑性平面应变的物理特征不具有普遍性. 本文的宗旨之一就是要提出对塑性变形相对具有普遍意义的塑性变形主剪切带的概念.

若从金属变形的微观理论来理解塑性变形的物理本质, 塑性变形的发生总会伴随有滑移带的出现. 而在晶体相邻的两部分沿着一个晶面(或某些晶面)彼此有滑移运动, 则是滑移带的基本物理特征. 实质上, 宏观的滑移带应当是变形体内位移梯度不连续的区域, 该区域应当对应着应力方程或应变方程的特征线<sup>[2, 3]</sup>. 证明基于这一概念提出的塑性主剪切带相对具有普遍的物理意义, 是本文的宗旨之二. 本文的结果不但可以统一解释塑性平面应力和平面应变特征线的物理意义, 而且可以为一般塑性变形的理论研究补充一个新的物理概念.

## 1 塑性主剪切带的定义和性质

**定义 1** 在塑性变形体内, 若存在曲面  $S$ , 该曲面上任意一点法线方向的应变增量满足

$$d\varepsilon_N = 0, \quad (1)$$

则曲面  $S$  就称作塑性剪切带.

根据塑性变形的 Mises 流动法则

$$d\varepsilon_N = d\lambda(\sigma_N - \sigma_m), \quad (2)$$

式中  $d\lambda$  是非负的比例加载因子,  $\sigma_N$  是曲面  $S$  上一点的法向应力,  $\sigma_m$  是曲面  $S$  上一点的平均应力. 所以, 根据(2)式, 定义 1 也可重新表述为

在塑性变形体内, 若存在曲面  $S$ , 该曲面  $S$  任意一点的法向应力满足

$$\sigma_N = \sigma_m, \quad (3)$$

则曲面  $S$  就称作塑性剪切带(见图 1).

**定义 2** 作用在塑性剪切带切向的剪应力  $\tau_N$  称作剪切带剪应力.

有了以上的定义, 我们就可以确定塑性主剪切带的方位了. 根据斜面上的应力公式, 得斜面法应力  $\sigma_N$  和切应力  $\tau_N$  为

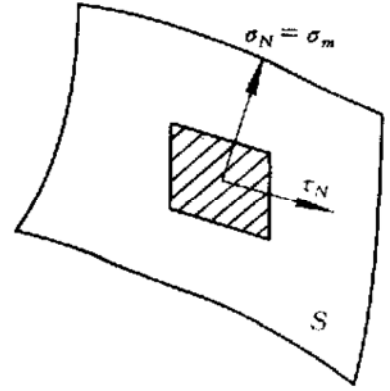


图 1 塑性剪切滑移带上的法向应力和切向应力

$$\begin{cases} \sigma_N = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3, \\ \tau_N = [(l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2) - (l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3)^2]^{1/2}, \end{cases} \quad (4)$$

式中  $l, m, n$  是  $\sigma_N$  在主应力坐标系中的方向数, 令

$$\sigma_N = \sigma_m, \quad (5)$$

并且考虑到

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma'_1 + \sigma_m, \\ \sigma_2 = \sigma'_2 + \sigma_m, \\ \sigma_3 = \sigma'_3 + \sigma_m, \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1, \end{cases} \quad (6)$$

式中  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3; \sigma_m$  分别是主应力、主应力偏量、平均应力. 将(6)式代入(4)式, 并考虑到(7)式, 可以得

$$l^2 \sigma'_1 + m^2 \sigma'_2 + n^2 \sigma'_3 = 0, \quad (8)$$

$$l^2 \sigma'^2_1 + m^2 \sigma'^2_2 + n^2 \sigma'^2_3 = \tau_N^2. \quad (9)$$

如果应力  $\sigma_N, \tau_N$  已知, 我们可以求解以下方程组, 唯一确定方向数  $l, m, n$ ,

$$\begin{cases} l^2 \sigma'_1 + m^2 \sigma'_2 + n^2 \sigma'_3 = 0, \\ l^2 \sigma'^2_1 + m^2 \sigma'^2_2 + n^2 \sigma'^2_3 = \tau_N^2, \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$l^2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad m^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad n^2 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (11)$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sigma'_2 & \sigma'_3 \\ \tau_N^2 & \sigma'^2_2 & \sigma'^2_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, & \Delta_2 = \begin{vmatrix} \sigma'_1 & 0 & \sigma'_3 \\ \sigma'^2_3 & \tau_N^2 & \sigma'^2_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_2 & 0 \\ \sigma'^2_1 & \sigma'^2_2 & \tau_N^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, & \Delta_4 = \begin{vmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_2 & \sigma'_3 \\ \sigma'^2_1 & \sigma'^2_2 & \sigma'^2_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{cases} \quad (12)$$

对于给定的应力状态,  $\sigma_m$  是不变量, 由  $\sigma_N = \sigma_m$  所定义的剪切带剪应力  $\tau_N$  与方向数有关, 而满足滑移带条件的方向数是不唯一的. 但是, 我们更关心的是位于主平面上的滑移带, 因为在主平面的滑移带上, 剪切带剪应力  $\tau_N$  才能取极值. 为了讨论方便, 假设主应力满足  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  关系, 对三维主平面上的剪切带分别讨论如下.

### 1.1 在 $\sigma_1$ - $\sigma_3$ 主平面的剪切带剪应力

在该主平面内, 方向数  $m = 0$ , 所以(10)式简化为

$$\begin{cases} l^2 \sigma'_1 + n^2 \sigma'_3 = 0, \\ l^2 + n^2 = 1, \\ \tau_{N13}^2 = l^2 \sigma_1'^2 + n^2 \sigma_3'^2. \end{cases} \quad (13)$$

由此可以解出

$$l = \pm \sqrt{-\frac{\sigma'_3}{\sigma'_1 - \sigma'_3}}, \quad n = \pm \sqrt{\frac{\sigma'_1}{\sigma'_1 - \sigma'_3}}, \quad (14)$$

或

$$\tan \alpha_{13} = \frac{n}{l} = \pm \sqrt{-\frac{\sigma'_3}{\sigma'_1}}, \quad (15)$$

式中  $\alpha_{13}$  是主平面内的剪切带法线方向与主应力  $\sigma_1$  方向的夹角. 将求出的方向数代入(13)式, 可以求出该方位的  $\tau_N$

$$\tau_{N13} = \pm \sqrt{-\sigma'_1 \sigma'_3}, \quad (16)$$

因为  $\sigma'_1 \geq \sigma'_2 \geq \sigma'_3$ ,  $-\sigma'_1 \sigma'_3 > 0$ ,  $\sigma'_3 < 0$ ,  $\tau_{N13}$  有两个大小相等符号相反的解, 所以在  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  主面上, 总是存在两条塑性变形剪切带.

### 1.2 在 $\sigma_2$ - $\sigma_3$ 主平面的剪切带剪应力

在该主平面内, 方向数  $l = 0$ , 同理可得该方位的  $\tau_N$

$$\tau_{N23} = \pm \sqrt{-\sigma'_2 \sigma'_3}, \quad (17)$$

此时, 在  $\sigma_2$ - $\sigma_3$  主平面上存在塑性变形剪切带的条件是当  $\sigma_2 > \sigma_m$  时, 存在两条塑性变形剪切带; 当  $\sigma_2 = \sigma_m$  时, 仅存在一条塑性变形剪切带; 当  $\sigma < \sigma_m$  时, 则该主平面上不存在塑性变形剪切带,

### 1.3 在 $\sigma_1$ - $\sigma_2$ 主平面的剪切带剪应力

在该主平面内, 方向数  $n = 0$ , 同理可得该方位的  $\tau_N$

$$\tau_{N12} = \pm \sqrt{-\sigma'_1 \sigma'_2}, \quad (18)$$

在  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  主平面存在塑性变形剪切带的条件是: 当  $\sigma_2 < \sigma_m$  时, 存在两条塑性变形剪切带; 当  $\sigma_2 = \sigma_m$  时, 仅存在一条塑性变形剪切带; 当  $\sigma_2 > \sigma_m$  时, 则该主平面上不存在塑性变形主剪切带.

根据以上的讨论, 我们可以分别给出主剪切带和主剪切带剪应力的定义:

**定义 3** 位于主平面的剪切带称作主剪切带.

**定义 4** 主滑移带上的剪应力称作主剪切带剪应力.

## 2 主剪切带在应力 Mohr 圆中的几何解释

借助于熟知的应力 Mohr 圆, 可以更明确以上的讨论的物理意义.

(1) 主平面剪切带上的剪应力  $\tau_N$ , 就是  $\sigma$ - $\tau$  平面上的直线  $\sigma = \sigma_m$  与主应力 Mohr 圆的交点坐标(见图 2).

(2) 在某个主平面是否存在塑性主剪切带, 只要看 在  $\sigma$ - $\tau$  平面上直线  $\sigma = \sigma_m$  与该主平面的主应力 Mohr 圆是否存在交点.

(3) 在  $\sigma\tau$  平面上, 直线  $\sigma = \sigma_m$  与主应力  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  确定的 Mohr 圆, 总是存在两个交点  $\tau_{N13}$  和  $-\tau_{N13}$ , 而且  $\tau_{N13}$  是  $\tau_N$  的最大值; 而直线  $\sigma = \sigma_m$  与  $\sigma_2$ - $\sigma_3$  和  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  确定的 Mohr 圆可能存在两个或一个交点, 当  $\sigma_2 > \sigma_m$  或  $\sigma_2 < \sigma_m$  时, 存在两个交点, 当  $\sigma_2 = \sigma_m$  时, 只存在一个交点. 这一特征从 Mohr 圆中可以直接得到.

(4) 在  $\sigma\tau$  平面上, 直线  $\sigma = \sigma_m$  与主应力 Mohr 圆总是存在 4 个交点, 且分为两种基本情况: 一种情况是直线  $\sigma = \sigma_m$  与两个 Mohr 圆相交, 得 4 个交点; 另一种情况是直线  $\sigma = \sigma_m$  与  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  确定的 Mohr 圆有 2 个交点, 而与其他两个 Mohr 圆相切, 各有一个交点, 也是 4 个交点.

(5) 若主平面  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  上两条相交的剪切带不是正交的, 则一定还存在另一对剪切带 (在  $\sigma_2$ - $\sigma_3$  或  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  平面上), 也不是正交的; 若主平面  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  上两条相交的剪切带是正交的, 则另一对剪切带分别位于  $\sigma_2$ - $\sigma_3$  和  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  确定的 Mohr 圆上.

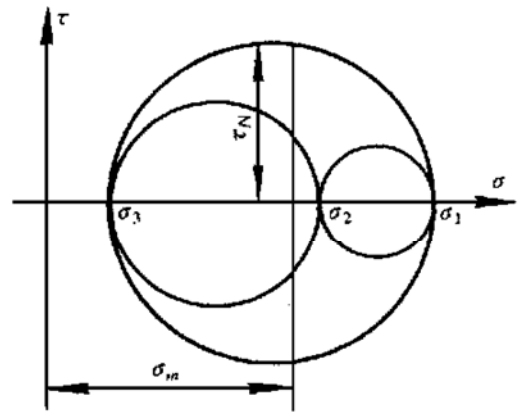


图 2 主剪切带剪应力与 Mohr 圆的关系

### 3 塑性平面应力和平面应变状态的主剪切带

在以下的讨论中, 我们假设材料的变形服从 Mises 屈服准则,

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s. \quad (19)$$

#### 3.1 平面应变状态塑性变形主剪切带

在平面应变状态, 假设主应力满足  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , 则有

$$\sigma_2 = \sigma_m, \quad \sigma'_1 = -\sigma'_3, \quad \sigma'_2 = 0, \quad (20)$$

剪切带的方向数是:

$$\begin{aligned} l &= \pm \sqrt{-\frac{\sigma'_3}{\sigma'_1 - \sigma'_3}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ n &= \pm \sqrt{-\frac{\sigma'_1}{\sigma'_1 - \sigma'_3}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \tau_{N13} &= \pm \sqrt{-\sigma'_1 \sigma'_3} = \pm \sigma'_1 = \pm \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (21)$$

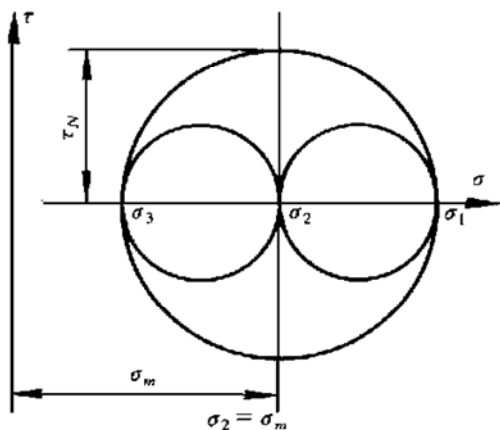


图 3 塑性平面应变状态的 Mohr 圆

显然, 在平面应变状态, 塑性剪切带上的剪应力  $\tau_N$  就等于最大剪应力  $\tau_{\max}$  (见图 3), 而且主剪切带与最大剪应力迹线重合.

#### 3.2 平面应力状态塑性变形主剪切带

假定主应力满足  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , 则平面应力状态可分为 3 种情况 (见图 4):

(1)  $\sigma_1 = 0, \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq 0$ . 此时, 要考察的应力状态位于主平面  $\sigma_2$ - $\sigma_3$ , 剪切带存在的条件为:

$\sigma_2 > \sigma_m$ , 该主平面上存在两条主剪切带;

$\sigma_2 = \sigma_m$ , 该主平面上存在一条主剪切带;

$\sigma_2 < \sigma_m$ , 该主平面上不存在主剪切带;

(2)  $\sigma_2 = 0, \sigma_3 \leq 0 \leq \sigma_1$ . 此时, 我们所要考察的应力状态位于主平面  $\sigma_1$ - $\sigma_3$ , 主剪切带总是存在的;

(3)  $\sigma_3 = 0, 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ . 此时, 我们所要确定的主剪切带位于主平面  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  上,

$\sigma_2 > \sigma_m$ , 该主平面上不存在主剪切带;

$\sigma_2 = \sigma_m$ , 该主平面上存在一条主剪切带;

$\sigma_2 < \sigma_m$ , 该主平面上存在两条主剪切带.

以上的结果与塑性平面应力问题的数学理论结果是一致的<sup>[1,3]</sup>.

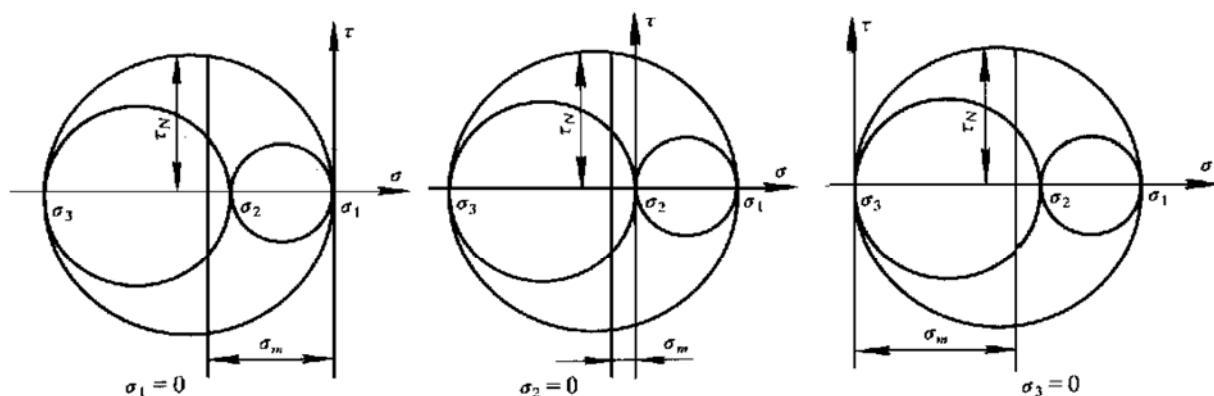


图 4 塑性平面应力状态的 3 种典型 Mohr 圆和主剪切滑移带的关系

## 4 结论

(1) 变形区的任一点剪切带上的法向应力和切应力是

$$\sigma_N = \sigma_m,$$

$$\tau_N = (l^2 \sigma_1'^2 + m^2 \sigma_2'^2 + n^2 \sigma_3'^2)^{1/2}.$$

(2) 在许多的剪切带中, 主剪切带的性质决定了变形特征. 也就是说, 一点的变形可以由主平面内的剪切带确定.

(3) 在 Mohr 圆中, 主剪切带的方位和主剪切带剪应力的, 可以由直线  $\sigma = \sigma_m$  与相应 Mohr 圆的交点确定.

(4) 在平面应变和平面应力问题中, 主剪切带与特征线重合, 对于轴对称问题和一般三维问题的特征线理论尚不完善, 本文没有讨论.

致谢 感谢吉林工业大学宋玉泉院士给予的指导和鼓励.

## 参 考 文 献

- 1 方 漪. 平面塑性变形的剪切变形线. 青岛大学学报(工程技术版), 1997, 12(1): 81~ 86
- 2 Chakrabarty J. Theory of Plasticity. New York: McGraw-Hill Inc, 1987. 23~ 32
- 3 卡恰诺夫 L M. 塑性理论基础. 周承倜译. 北京: 人民教育出版社, 1983. 261~ 282