

非线性弹性介质中冲击波斜反射的研究

李永池 刘鲁峰 唐之景

(中国科技大学近代力学系)

摘要 本文讨论了各向同性非线性超弹性介质在平面小应变下的冲击波斜反射问题。给出了本构关系、简单波解和冲击波解，并作为例子求解了入射冲击波在自由面的斜反射问题。

关键词 非线性弹性介质；简单波；冲击波；斜反射。

一、引言

波的斜反射问题，不但其本身有重要的理论和实际意义，而且许多其它问题也都与波的斜反射有关，如杆中波的弥散不仅与横向惯性效应有关，也与杆侧面附近阵面弯曲引起的斜反射有关；变截面体中波的传播规律、孔和凹角附近的动应力集中等现象都是与波的斜反射紧密相关的。因此近年来这一领域的研究日趋活跃。但由于这类问题很复杂，当前开展工作较多的只是非线性弹性体中冲击波在平面边界的斜反射问题^[1-4]。初步的结论是，当入射冲击波的入射角小于临界角时，反射波由几族中心简单波和冲击波组成，可称为规则反射，若入射角大于临界角，则是人们尚未找到完整解答的不规则反射。临界角与介质性质、入射波类型和强度、边界条件等有关。临界角与不规则反射是一个很复杂的问题，一般设想会出现类似于气体动力学中的马赫反射现象^[2,3]，但至今未见到实验结果，理论上也没有重大进展。本文讨论的介质为各向同性超弹性体，虽然问题具有本构非线性的特点，但只考虑几何线性问题，因而可得到较有限变形大为简化的本构关系和控制方程，有利于求解不同边界条件下的斜反射问题，并可能有助于进一步探讨不规则反射问题。

二、本构关系

建立直角笛卡尔坐标系 X_i ，对于变形只发生在 X_1OX_2 平面内的平面小应变问题，有

$$\varepsilon_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \\ q &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} \\ r &= \|\varepsilon_{ij}\| = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 p, q, r 分别表示应变张量 ε_{ij} 的第一、二、三主不变量。在不考虑热效应的情况下，各向

同性超弹性材料单位体积的弹性变形能 W 只是应变张量不变量的函数, $W=W(p, q, r)$, 应力张量 σ_{ij} 可由势函数 W 对应变的微商确定, 即 $\sigma_{ij}=\partial W/\partial \epsilon_{ij}$ 。对平面应变问题则有 $W=W(p, q)$, 于是得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= W_p + \epsilon_{22} W_q \\ \sigma_{22} &= W_p + \epsilon_{11} W_q \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = -\epsilon_{12} W_q \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 W 的下标表示对 p 和 q 的偏导数。 $\underline{\epsilon}=0$ 时有 $\underline{\sigma}=0$, 因此(3)式要求

$$W_p(0, 0)=0, \quad W_q(0, 0) \text{ 有界} \quad (4)$$

方程(3)即是平面小应变条件下超弹性材料本构关系的普遍形式, 其中 $W(p, q)$ 是满足条件(4)的任意连续可微函数。

三、中心简单波解

小应变下三维弹性动力学基本方程组为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i\alpha, \alpha} - \rho v_{i, i} &= 0 \\ 2\epsilon_{i\alpha, i} &= v_{i, \alpha} + v_{\alpha, i} \\ \underline{\sigma} &= \underline{\sigma}(\underline{\epsilon}) \end{aligned} \right\} \quad (i, \alpha=1, 2, 3) \quad (5)$$

其中, v_i 和 ρ 分别是质点速度和介质密度。

所谓(5)式的简单波解, 即是 $\underline{v}$ 、 $\underline{\epsilon}$ 和 $\underline{\sigma}$ 作为某一单参数 $\phi=\phi(x, t)$ 的函数的一类特解。波动理论已证明^[6], 简单波解的特征曲面必是一族单参数的平面族

$$n_\beta(\phi)X_\beta - C(\phi)t = g(\phi) \quad (6)$$

$\phi=\text{const.}$ 时, (6)式表示以 $\underline{n}(\phi)$ 为单位法向量、 $C(\phi)$ 为法向波速的运动平面, 而在每一个这样的平面上 $\underline{v}$ 、 $\underline{\epsilon}$ 和 $\underline{\sigma}$ 都是常量。由于简单波区中 $\underline{v}$ 、 $\underline{\epsilon}$ 和 $\underline{\sigma}$ 都是 ϕ 的函数, 而(6)式又确定 ϕ 为 $\underline{x}$ 和 t 的隐函数, 所以不难由(5)式得出

$$\left. \begin{aligned} C_{i\alpha, \beta} n_\alpha \epsilon'_{i\beta} + \rho C v'_i &= 0 \\ v'_i n_\alpha + v'_\alpha n_i + 2C \epsilon'_{i\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中“'”表示对参数 ϕ 求导, 而

$$C_{i\alpha, \beta} = \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \epsilon_{i\beta}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{i\alpha} \partial \epsilon_{j\beta}} \quad (8)$$

为材料的弹性模量张量。由(8)式消去 $\epsilon'_{i\beta}$, 得

$$(\underline{Q} - \rho C^2 \underline{I}) \underline{v}' = 0 \quad (9)$$

其中 $\underline{I}$ 为二阶单位张量, 而

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}(C_{i\alpha j\beta} + C_{i\beta j\alpha})n_\alpha n_\beta = C_{i\alpha j\beta}n_\alpha n_\beta \quad (10)$$

是声张量。(9)式说明特征法向波速 C 由特征方程

$$\|Q - \rho C^2 I\| = 0 \quad (11)$$

给出, 而 $\underline{v}'$ 则正比于 $\underline{Q}$ 的与特征值 ρC^2 相对应的右特征矢量 $\underline{r}$ 。于是由 (9) 式、(7) 式和 (8) 式, 我们得到

$$\left. \begin{aligned} v_i' &= -C\omega r_i \\ \varepsilon_{i\alpha}' &= \frac{1}{2}\omega(n_\alpha r_i + n_i r_\alpha) \\ \sigma_{i\alpha}' &= -\frac{1}{2}\omega C_{i\alpha j\beta}(n_j r_\beta + n_\beta r_j) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中 ω 为一待定比例因子。在二维固体中冲击波斜反射的问题中,如图1和图2所示,有

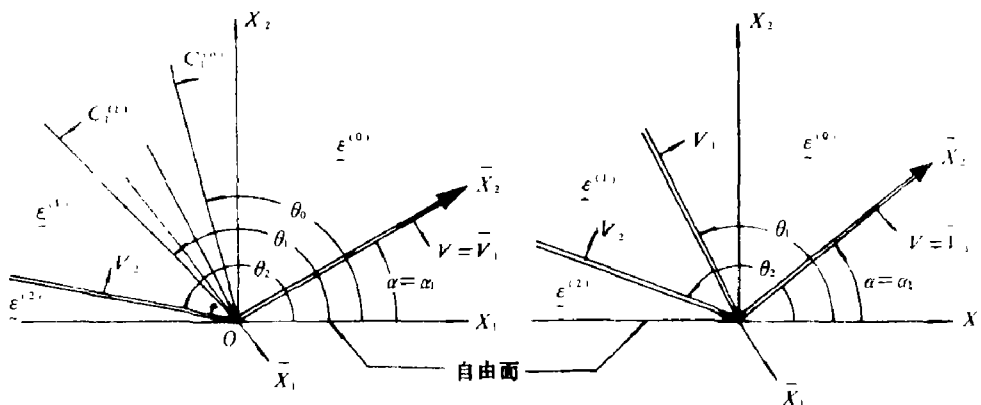


图 1

图 2

$$n = (n_1, n_2)^T = (\sin\theta, -\cos\theta)^T \quad (13)$$

其中 θ 是 X_1 轴与波阵面的夹角,“ T ”表示转置。而

$$V_a = C / \sin \theta \quad (14)$$

是波阵面与 X_1 轴交点沿 X_1 轴的视速度。

对中心简单波解, 有

$$g(\phi) = 0, \quad V'_a(\phi) = 0 \quad (15)$$

选取 $\phi=\theta$, 则由(14)式、(15)式和(12)式可推出

$$\omega = 2 \left(C \operatorname{ctg} \theta - \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) / \left\{ \frac{\partial C}{\partial \varepsilon_{ia}} (n_i r_o + n_a r_i) \right\} \quad (16)$$

当(16)式中的分母为零时,不存在中心简单波解。

本文考虑一种例证性的材料：

$$\left. \begin{aligned} W &= -2\mu q + \frac{1}{2}ap^2 + \frac{1}{3}dp^3 \\ \sigma_{11} &= p(a+dp) - 2\mu\epsilon_{22} \\ \sigma_{22} &= p(a+dp) - 2\mu\epsilon_{11} \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = 2\mu\epsilon_{12} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中 μ 、 a 、 d 为材料常数。与线性介质比较可知 a 和 μ 与Lam'e常数 λ 和 μ 的关系是 $a = \lambda + 2\mu > \mu$ ，而 d 则是拉压下的二阶效应。对此种材料容易得出两族简单波速和相应的右特征矢量如下

$$\rho C_1^2 = W_{pp} = a + 2dp, \quad \rho C_2^2 = -\frac{1}{2} W_q = \mu \quad (18)$$

$$(r_1/r_2)_1 = \frac{n_1}{n_2} = -\operatorname{tg}\theta, \quad (r_1/r_2)_2 = -\frac{n_2}{n_1} = \operatorname{ctg}\theta \quad (19)$$

$r = r_{1,2}$ 时，(16)式中的分母为零，不存在与 C_2 对应的中心简单波解。下一节将指出与 C_2 对应的为一冲击波解。 $r = r_{11}$ 时，有

$$\omega = -2 \cos^2 \theta W_{pp} / (W_{ppp} r_2 n_1) \quad (20)$$

将此式代入(12)式中可以解出：

$$\left. \begin{aligned} W_{pp} &= a + 2dp = A^2 \sin^2 \theta \\ \epsilon_{11} &= B_0 + (A^2/4d) \sin^4 \theta \\ \epsilon_{22} &= -(a/2d + B_0) + (A^2/4d) \sin^2 \theta (2 - \sin^2 \theta) \\ \epsilon_{12} &= (A^2/32d) (\sin 4\theta - 4\theta + D_0) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -8v^* (\sin^4 \theta - \beta_1) \\ v_2 &= v^* (4\theta - \sin 4\theta + \beta_2) \\ v^* &\equiv \frac{A^2}{32d} \sqrt{A^2/\rho} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中 A 、 B_0 、 D_0 及 β_1 、 β_2 均为待定常数。由(21)式和(17)式得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{A^2}{4d} \sin^2 \theta \left\{ (A^2 + 2\mu) \sin^2 \theta - 4\mu \right\} - \left(\frac{a^2}{4d} - \frac{a\mu}{d} - 2\mu B_0 \right) \\ \sigma_{22} &= (A^2/4d) (A^2 - 2\mu) \sin^4 \theta - a^2/4d - 2\mu B_0 \\ \sigma_{12} &= (\mu A^2/16d) (\sin 4\theta - 4\theta + D_0) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

四、平面冲击波解

以 V 表示冲击波的法向波速， f^+ 和 f^- 分别表示量 f 在冲击波前、后方的值， $[f] \equiv f^+ - f^-$

表示量 f 跨过冲击波时的跳跃量, 则三维固体中冲击波的跳跃条件可写为

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{ij}]n_j + \rho V' [v_i] &= 0 \\ [v_i]n_i + [v_n]n_n + 2V' [\varepsilon_{in}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

如图 1 所示, 取冲击波阵面法线 $\underline{n}$ 为 $\bar{X}_1$ 轴的方向, 则有 $\bar{n} = (1, 0)^T$, (26) 式成为

$$\left. \begin{aligned} [\bar{\sigma}_{11}] &= \rho \bar{V}^2 [\bar{\varepsilon}_{11}] \\ [\bar{\sigma}_{12}] &= 2\rho \bar{V}^2 [\bar{\varepsilon}_{12}] \\ [\bar{\varepsilon}_{22}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中 $\bar{f}$ 表示 f 在 $\bar{X}_1 O \bar{X}_2$ 系中的值。将本构关系 (17) 代入 (25) 式中, 得到

$$\left. \begin{aligned} \{a + d(p^- + p^+) - \rho \bar{V}^2\} [\bar{\varepsilon}_{11}] &= 0 \\ \{W_q + 2\rho \bar{V}^2\} [\bar{\varepsilon}_{12}] &= 0 \\ [\bar{\varepsilon}_{22}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

(26) 式说明, 可存在两族冲击波, 分别由 (27) 和 (28) 式表示

$$[\bar{\varepsilon}_{11}] \neq 0, \quad [\bar{\varepsilon}_{12}] = [\bar{\varepsilon}_{22}] = 0, \quad \rho \bar{V}_1^2 = a + d(p^+ + p^-), \quad (27)$$

$$[\bar{\varepsilon}_{12}] \neq 0, \quad [\bar{\varepsilon}_{11}] = [\bar{\varepsilon}_{22}] = 0, \quad \rho \bar{V}_2^2 = -\frac{1}{2} W_q = \mu \quad (28)$$

(27) 和 (28) 式分别表示纵向 (拉伸或压缩) 冲击波和剪切冲击波, 并分别称之为快冲击波和慢冲击波。冲击波稳定的 Lax 条件要求^[5]

$$C_1^+ \leq V_1 \leq C_1^- \quad (29)$$

对快冲击波 V_1 , (29) 式要求

$$d(p) \geq 0 \quad (30)$$

因此 $d > 0$ 时必须 $[p] > 0$, 只存在拉伸的快冲击波; $d < 0$ 时必须 $[p] < 0$, 只存在压缩的快冲击波。大多数材料满足 $d < 0$, 本文只讨论这种情况。慢冲击波 V_2 满足

$$C_2^+ = C_2^- = V_2 = \text{const.} \quad (31)$$

所以慢冲击波总是稳定的, 其波速为相应的简单波速。故慢中心简单波事实上是剪切冲击波。

五、斜入射冲击波在自由面的反射

规则反射时反射波由一族快波和一族慢波组成。前已证明对我们的材料慢波永远是冲击波, 而快波则可能是一族中心简单波或冲击波, 分别如图 1 和图 2 所示。

本文只讨论入射快冲击波 (压缩波) 的问题, 入射波前设为自然静止状态。计算中取 $a/\mu = 2.5$, $d/\mu = -10$ 。设入射波强度为 $[\bar{\varepsilon}_{11}]^{(0)} = \varepsilon_0 < 0$, 入射角为 $\alpha = \alpha_0$, 则有

$$\rho \bar{V}_1^2 = a + d\varepsilon_0, \quad \left. \right\}$$

$$\underline{\varepsilon}^{(0)} = \varepsilon_0 \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \\ -\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 & \cos^2 \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

(I) 先设反射波解如图 1 所示, 即反射快波为中心简单波, 则由简单波解的 (21) 式, 得

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \rho V_a^2 = (a + d\varepsilon_0) / \sin^2 \alpha_1 \\ \sin^2 \theta_0 &= (a + 2d\varepsilon_0) \sin^2 \alpha_1 / (a + d\varepsilon_0) \\ \varepsilon_{11}^{(0)} &= \varepsilon_{11} \big|_{\theta=\theta_0} = B_0 + (A^2/4d) \sin^4 \theta_0 = \varepsilon_0 \sin^2 \alpha_1 \\ \varepsilon_{12}^{(0)} &= \varepsilon_{12} \big|_{\theta=\theta_0} = (A^2/32d) (\sin 4\theta_0 - 4\theta_0 + D_0) = -\varepsilon_0 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

(33) 给出了 θ_0 、 A 、 B_0 和 D_0 , 其中 θ_0 为第一道反射波与 X_1 轴的夹角。以下, θ_1 和 θ_2 的意义见图 1 和图 2。跨过反射波 V_2 , 设有 $[\underline{\varepsilon}_{12}]^{(2)} = \gamma_2$ (X_2 轴取阵面法线 η_2 方向), 则有

$$\rho V_2^2 = \mu, \quad [\underline{\varepsilon}]^{(2)} = \gamma_2 \begin{Bmatrix} \sin 2\theta_2 & -\cos 2\theta_2 \\ -\cos 2\theta_2 & -\sin 2\theta_2 \end{Bmatrix} \quad \underline{\varepsilon}^{(2)} = \underline{\varepsilon} \big|_{\theta=\theta_1} + [\underline{\varepsilon}]^{(2)} \quad (34)$$

将 (34) 式的第三式代入 (17) 式并利用自由面边界条件

$$\sigma_{ii}^{(2)} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (35)$$

得

$$\left. \begin{aligned} (A^2/32d) (\sin 4\theta_1 - 4\theta_1 + D_0) &= \gamma_2 \cos 2\theta_2 \\ (A^4 \sin^4 \theta_1 - a^2)/8d\mu - (A^2/4d) \sin^4 \theta_1 - B_0 &= \gamma_2 \sin 2\theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

(36) 式连同各族波有共同的视速度的条件, 即

$$\rho V_a^2 = (a + d\varepsilon_0) / \sin^2 \alpha_1 = \mu / \sin^2 \theta_2 \quad (37)$$

即可求出 θ_1 、 θ_2 和 γ_2 , 得到反射波解。对 $\varepsilon_0 = -1.0\%$ 的计算结果, 如图 4~图 6 的虚线所示。

上述反射图案成立要求

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi \quad (38)$$

对不同的入射波强度 ε_0 和入射角 α_1 进行计算, 发现当入射波的 $(\varepsilon_0, \alpha_1)$ 落在图 3 的 AB 线以左时为上述反射图案; 当 $(\varepsilon_0, \alpha_1)$ 落在 AB 线以右时得不到此种图案的反射波解, 将为图 2 的反射图案或为不规则反射; 而对 AB 线上的 $(\varepsilon_0, \alpha_1)$ 将只反射冲击波 V_2 。对 AB 线的分析法将在后面给出。

(II) 设反射图案如图 2 所示。此时的讨论与 (I) 类似, 故只给出结果

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 \sin 2\alpha_1 + \varepsilon_1 \sin 2\theta_1 + 2\gamma_2 \cos 2\theta_2 &= 0 \\ (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \{ a + d(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \} &= \\ = 2\mu (\varepsilon_0 \sin^2 \alpha_1 + \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1 + \gamma_2 \sin 2\theta_2) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho V_a^2 &= \frac{\rho \bar{V}_1^2}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{\rho V_1^2}{\sin^2 \theta_1} = \frac{\rho V_2^2}{\sin^2 \theta_2} \\ \rho V_1^2 &= a + d(2\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

其中 ε_1 表示反射波 V_1 的强度, 即 $[p]^{(1)} = \varepsilon_1 < 0$ 。由(39)即可解出 ε_1 、 θ_1 、 γ_2 和 θ_2 , 得到反射波解。对 $\varepsilon_0 = -1.0\%$ 的计算结果如图 4~图 6 的实线所示。

当 $(\varepsilon_0, \alpha_1)$ 位于图 3 中的 CD 线以左 AB 线以右时反射波解为图 2 图案, 当 $(\varepsilon_0, \alpha_1)$ 位于 CD 线以右时不再存在如图 1 和图 2 所示的规则反射图案, 故 CD 线便给出临界入射角 α_{1c} 与入射波强度 ε_0 的关系曲线。非规则反射是一个有趣而复杂的问题, 正在探讨之中。

当反射波 V_1 的强度 $\varepsilon_1 = 0$ 时, 可以认为反射 V_1 波退化为简单波了, 所以前面提到的区分 (I) (II) 两种图案分界线 AB 的方程, 可由 $\varepsilon_1 = 0$ 的条件得出。利用 (39) 式和 $\varepsilon_1 = 0$ 的条件, 得 AB 线方程为

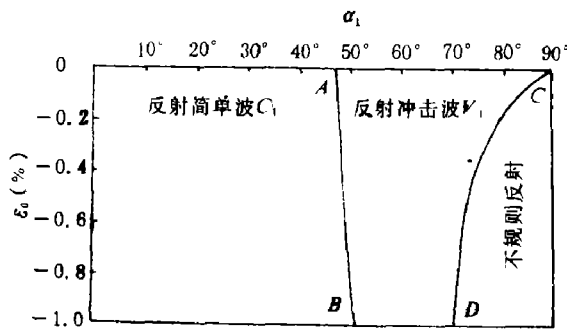


图 3 决定反射图案的 $\alpha_1 \sim \varepsilon_0$ 曲线

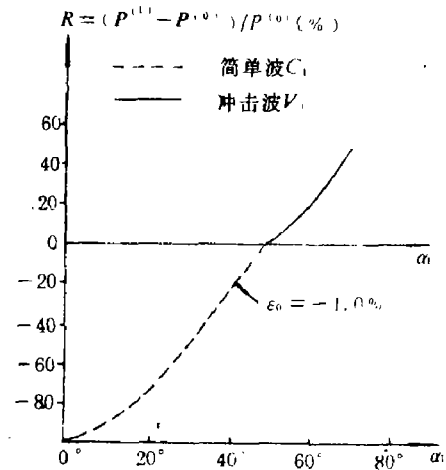


图 4 反射波与入射波的强度比

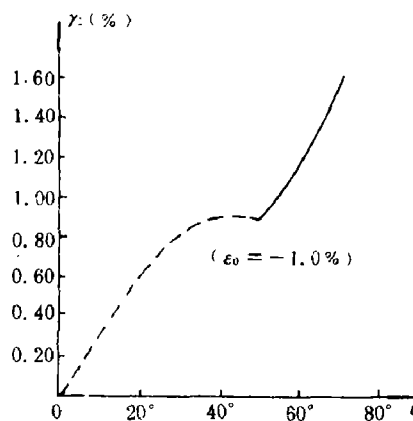


图 5 反射波 V_2 的强度

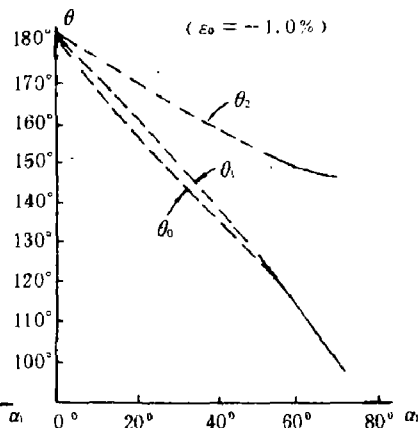


图 6 反射角 θ_0 , θ_1 , θ_2

$$\left(\frac{a + d\epsilon_0}{\mu} - 2\sin^2 \alpha_i \right)^4 = 4 \sin^2 \alpha_i \sin^2 2\alpha_i \left(\frac{a + d\epsilon_0}{\mu} - \sin^2 \alpha_i \right) \quad (40)$$

实践表明, 这和数值尝试的结果完全一致。对应 AB 线上各点的入射条件将只反射慢波 V_2 。

本研究工作是在中国科学院科学基金数学物理字83-62号的资助下完成的, 特此感谢。

参 考 文 献

- [1] Wright T.W., Reflection of Oblique Shock Waves in Elastic Solids, *Int. J. Solids Structures*, 7 (1971), 161.
- [2] Wright T.W., Critical Angles and Grazing Incidence: The Breakdown of Regular Shock Reflection in Solids, *J. Elasticity*, 11 (1981), 81.
- [3] Reid S. R., The Influence of Non-Linearity upon the Reflection of Finite Amplitude Shock Waves in Elastodynamics, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 25 (1972), 185.
- [4] Li Yongchi, Ting T.C.T., Simple Waves and Shock Waves Generated by an Incident Shock Wave in Two-Dimensional Hyperelastic Materials, *J. A. M.*, 51 (1984), 586.
- [5] Lax P.D., Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, *Comm. Pure & Appl. Math.*, 10 (1957), 537.
- [6] Varley E., Simple Waves in General Elastic Materials, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 20 (1965), 309.

STUDIES ON OBLIQUE REFLECTION OF SHOCK WAVE IN NONLINEAR ELASTIC MEDIA

Li Yongchi Liu Lufeng Tang Zhijing

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT In this paper, the problem of oblique reflection of shock waves in isotropic hyperelastic media and plane strain condition is discussed by using small deformation theory. The constitutive equation of materials and the solutions for simple waves and shock waves are presented. An solution for oblique reflection of a longitudinal shock wave impinging onto a free surface is given as an example.

KEY WORDS nonlinear elastic media, simple wave, shock wave, oblique reflection.