Schwarzschild 黑洞时空中带导数非线性项半线性波动方程解的生命跨度估计

献给陈恕行教授 80 华诞

赖宁安¹, 周忆^{2*}

1. 丽水学院非线性分析研究所, 数学系, 丽水 323000;

2. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: ninganlai@lsu.edu.cn, yizhou@fudan.edu.cn

收稿日期: 2020-07-23; 接受日期: 2020-08-20; 网络出版日期: 2020-11-30; * 通信作者

浙江省自然科学基金 (批准号: LY18A010008)、国家自然科学基金 (批准号: 11771194 和 11421061)、非线性数学模型与方法教育部重点实验室 (复旦大学)、上海市现代应用数学重点实验室 (复旦大学数学科学学院) 资助项目

摘要 本文研究 Schwarzschild 黑洞时空中带导数非线性项的半线性波动方程小初值 Cauchy 问题 $\square_{g_S}\phi = |\partial_t\phi|^p$, 其中 $\square_{g_S}$ 表示 Schwarzschild 度量下的波动算子; 证明当 $1 < p \leq 2$ 时径向小初值解将在有限时间内爆破, 并且建立生命跨度上界估计. 这里比较有意义的是不需要假设初值的支集远离黑洞视界, 与平坦 Minkowski 时空中相应问题相比, 证明有限时间爆破结果需要克服靠近黑洞时带来的困难.

关键词 Schwarzschild 黑洞 波动方程 生命跨度

MSC (2020) 主题分类 35L70, 58J45

1 引言

本文研究 Schwarzschild 黑洞时空中如下半线性波动方程:

$$\square_{g_S} u = |u_t|^p, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_t^+ \times \Sigma, \quad (1.1)$$

其中 g_S 表示 Schwarzschild 度量,

$$g_S = F(r)dt^2 - F(r)^{-1}dr^2 - r^2d\omega^2, \quad (1.2)$$

$F(r) = 1 - \frac{2M}{r}$, 常数 $M > 0$ 表示黑洞质量, 而 $d\omega^2$ 为单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的标准度量, 则 Schwarzschild 度量下的 d'Alembert 算子可以表示为

$$\square_{g_S} = \frac{1}{F(r)} \left(\partial_t^2 - \frac{F}{r^2} \partial_r (r^2 F) \partial_r - \frac{F}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^2} \right), \quad (1.3)$$

英文引用格式: Lai N A, Zhou Y. Lifespan estimate for the semilinear wave equation with a derivative nonlinear term in Schwarzschild spacetime (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 957–970, doi: 10.1360/SSM-2020-0233

其中 Δ_{S^2} 表示 S^2 上的标准 Laplace-Beltrami 算子,

$$\mathbb{R}_t^+ \times \Sigma = \mathbb{R}_t^+ \times (2M, \infty) \times S^2$$

称为黑洞的外部区域.

若考虑平坦 Minkowski 时空中相应方程, 则该小初值 Cauchy 问题被称为 “Glassey 猜想”: 当 $n = 1, p > 1$ 时, 该小初值问题没有整体解; 而当 $n \geq 2$ 时, 存在一个临界指标 $p_c(n) = \frac{n+1}{n-1}$, 即当 $p > p_c(n)$ 时解整体存在, 当 $1 < p \leq p_c(n)$ 时解将会在有限时间内爆破 (参见文献 [1]). John^[2] 首先研究了 $\mathbb{R}^3$ 中如下方程的 Cauchy 问题:

$$\partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x) = \partial_t |au(t, x) + b\partial_t u(t, x)|^p \quad (1.4)$$

并证明了当 $p = 2$ 时的有限时间爆破结果. 他的方法也可以用来证明 $1 < p \leq 2$ 时方程

$$\partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x) = |u_t|^p \quad (1.5)$$

的有限时间爆破结果. Sideris^[3] 则证明了 $\mathbb{R}^3$ 中 Cauchy 问题 (1.5) 当 $p > 2$ 时径向解的整体存在性. Schaeffer^[4] 证明了 $\mathbb{R}^2$ 中问题 (1.5) 在 $p = 3$ 时没有整体解并猜测它就是临界指标 (参见文献 [5]). Agemi^[6] 将该结果推广到 $1 < p \leq 3$. Masuda^[7] 研究了 $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) 中 $p = 2$ 的情形并证明了有限时间爆破结果. Hidano 和 Tsutaya^[8] 及 Tzvetkov^[9] 独立证明了 $p > p_c(n)$ 且 $n = 2, 3$ 时具非径向小初值的问题 (1.5) 的整体存在性. Zhou^[10] 用一种简单的方法证明了 $\mathbb{R}^n$ 中问题 (1.5) 在 $1 < p \leq \frac{n+1}{n-1}$ 情形的有限时间爆破结果. 最近, Hidano 等^[11] 建立了 $p > p_c(n)$ 且 $n \geq 4$ 时径向解的整体存在性. 更多关于 Glassey 猜想的介绍可以参见文献 [12, 13].

其他各种流形上的 Glassey 猜想也逐渐引起了关注. Zhou 和 Han^[14] 研究了外区域上方程 (1.5) 的初边值问题, 用试探函数方法建立了 $1 < p \leq \frac{n+1}{n-1}$ ($n \geq 1$) 情形的有限时间爆破结果及生命跨度上界估计. Wang^[15] 证明了 3 维渐近 Euclid 平坦外区域中 $p > 2$ 时的整体存在性 (若考虑径向解, 则结论对 $n \geq 3$ 且 $p > \frac{n+1}{n-1}$ 也成立).

对于 Schwarzschild 黑洞时空中波动方程, 研究比较多的是如下半线性波动方程:

$$\square_{g_S} u = |u|^p. \quad (1.6)$$

Catania 和 Georgiev^[16] 在 Regge-Wheeler 坐标下, 通过选取特殊的初值证明了两种爆破结果: (i) $1 < p < 1 + \sqrt{2}$ 且小初值的支集远离黑洞视界; (ii) $2 < p < 1 + \sqrt{2}$ 且大初值的支集靠近黑洞视界. Lai^[17] 证明了大初值且 $p = 5$ 时的爆破结果. 另一方面, Lindblad 等^[18] 证明了 $p > 1 + \sqrt{2}$ 时的整体存在性, 且该结果对于带紧支初值的慢速旋转 Kerr 黑洞时空也成立. 不久, 该整体存在性结果被 Metcalfe 和 Wang^[19] 推广到带非紧支初值的慢速旋转黑洞时空中. 方程 (1.6) 小初值 Cauchy 问题的整体存在性, 也可参见文献 [20] 关于 $p > 3$ 和文献 [21] 关于 $p = 5$ 的结果. Wang^[22] 建立了如下生命跨度下界估计:

$$T(\varepsilon) \geq \begin{cases} C\varepsilon^{-\frac{p(p-1)}{1+2p-p^2}}, & 2 \leq p < 1 + \sqrt{2}, \\ \exp(C\varepsilon^{-2\sqrt{2}}), & p = 1 + \sqrt{2}. \end{cases} \quad (1.7)$$

最近, 不需要假设小初值的支集远离视界黑洞, Lin 等^[23] 建立了 $p \in [\frac{3}{2}, 2]$ (实际上可以推广到 $(1, 2]$) 情形的有限时间爆破结果. 更多关于 Cauchy 问题 (1.6) 的介绍可参见文献 [24, 25].

对于真空 Einstein 方程的黑洞解 g , 证明其渐近稳定性的关键步骤之一是理解如下问题解的大时间行为:

$$\square_g \phi = (\partial \phi)^2, \quad (1.8)$$

尤其是当二次非线性项满足一些特殊结构 (如零条件) 时. 这是因为在研究平坦 Minkowski 时空的稳定性过程中发现零条件是一个重要的模型问题. Luk^[26] 研究了慢速旋转 ($a \ll M$) Kerr 黑洞时空中非线性波动方程

$$\square_{g_K} \phi = F(\phi, \partial \phi),$$

其中 g_K 表示 Kerr 度量, 它有两个参数 M 和 a , 分别代表黑洞质量和角速度. 假定 F 中二次非线性项满足零条件, 则他证明了小初值解的整体存在性. 受此启发, 本文的目的之一是考虑 Schwarzschild 时空中半线性波动方程二次非线性项不满足零条件时解的大时间行为, 而 Schwarzschild 度量是 Kerr 度量角速度 $a = 0$ 的特殊情形. 我们将证明此时解至多是几乎整体存在的 (解的生命跨度上界估计关于初值小性参数是指数形式). 另外, 当 $1 < p < 2$ 时, 我们将证明该问题也不存在整体解, 且建立了多项式形式的生命跨度上界估计.

证明的思路如下: 首先考虑 Regge-Wheeler 坐标下的径向解, 并对变系数的渐近行为作精细分析; 其次借助文献 [14] 中的思想, 利用非线性项构造一个满足 Riccati 类型微分不等式的泛函, 并由此得出生命跨度上界估计. 需要指出的是, 文献 [16] 中建立的有限时间爆破结果的主要思想是利用解构造泛函并应用 Kato 型引理.

注 1.1 本文中结论不要求小初值的支集远离黑洞视界 $r = 2M$, 故与平坦 Minkowski 时空中相应问题比较, 需要克服黑洞带来的困难. 数学上, 非线性项前面会出现一个快速趋于 0 (当靠近黑洞视界时) 的因子. 这会导致非线性项导致解爆破的现象互相竞争. 本文通过精细估计该多余系数的渐近行为克服了该困难.

注 1.2 确定 $p = 2$ 是否为小初值 Cauchy 问题 (1.1) 的临界指标是一个很有意义的问题, 即证明当 $p > 2$ 时存在整体解.

在 Regge-Wheeler 坐标

$$s(r) = r + 2M \ln(r - 2M) \quad (1.9)$$

下, 方程 (1.1) 可以写成

$$\partial_t^2 u - \partial_s^2 u - \frac{2F}{r} \partial_s u - \frac{F}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^2} u = F|u_t|^p, \quad (1.10)$$

其中

$$F = F(s) = 1 - \frac{2M}{r(s)},$$

而 $r = r(s)$ 为 (1.9) 的反函数. 为方便起见, 考虑径向解 $u = u(t, s)$, 则方程 (1.10) 可以简化为

$$\partial_t^2 u - \partial_s^2 u - \frac{2F}{r} \partial_s u = F|u_t|^p. \quad (1.11)$$

令 $v(t, s) = r(s)u(t, s)$, 则方程 (1.11) 变为

$$\partial_t^2 v(t, s) - \partial_s^2 v(t, s) + \frac{2MF}{r^3} v(t, s) = Fr^{1-p}|v_t|^p. \quad (1.12)$$

注意到, 当 r 从 $2M$ 变到 $+\infty$ 时, s 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$, 因此可以考虑如下等价问题:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v(t, s) - \partial_s^2 v(t, s) + W(s)v(t, s) = h(s)|v_t|^p, & (t, s) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0, s) = \varepsilon f(s), \quad v_t(0, s) = \varepsilon g(s), & s \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.13)$$

其中

$$h(s) = F(s)r(s)^{1-p}, \quad W(s) = \frac{2MF(s)}{r(s)^3}, \quad F(s) = 1 - \frac{2M}{r(s)},$$

$\varepsilon > 0$ 为描述初值小性的参数. 假定初值 $f(s)$ 和 $g(s)$ 非负, $g(s)$ 不恒为 0, 且对某一固定常数 $R > 0$, 其支集满足

$$\text{supp} f, g \subset \{s : |s| \leq R\}.$$

本文主要定理如下:

定理 1.1 假定 $1 < p \leq 2$, 若问题 (1.13) 存在一个解

$$u \in C^0([0, T(\varepsilon)); H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T(\varepsilon)); L^2(\mathbb{R})),$$

则 $T(\varepsilon) < +\infty$ 且满足:

(i) 若 $1 < p < 2$, 则存在一个与 ε 无关的正常数 C_1 , 使得

$$T(\varepsilon) \leq C_1 \varepsilon^{-\frac{p-1}{2-p}}; \quad (1.14)$$

(ii) 若 $p = 2$, 则存在一个与 ε 无关的正常数 C_2 , 使得

$$T(\varepsilon) \leq \exp(C_2 \varepsilon^{-1}). \quad (1.15)$$

本文余下内容的安排如下: 第 2 节给出问题 (1.13) 能量解的局部存在性, 第 3 节给出一些准备引理, 第 4 节给出定理 1.1 的证明.

2 局部存在性

本节证明问题 (1.13) 的局部存在性.

引理 2.1 设 $f(s), g(s) \in H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$, 则对任一固定的常数 $E > 0$, 存在 $T = T(E)$, 使得若 $\|f\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|g\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq E^p$, 则问题 (1.13) 存在唯一解 $v(t, s)$ 满足

$$v(t, s) \in C^0([0, T(E)); H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T(E)); L^2(\mathbb{R})).$$

证明 因为 $h(s)$ 有上界, 为了方便起见, 本文将证明如下问题:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v(t, s) + Qv(t, s) = |v_t|^p, & (t, s) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0, s) = v_0(s), \quad v_t(0, s) = v_1(s), & s \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

的局部存在性, 其中 $Q = -\partial_s^2 + W(s)$. 正如文献 [27] 中所述, Q 为 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R}, ds)$ 中非负对称算子, 而 $H^2(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R}, ds)$ 中稠密, 故 Q 是非负自伴算子. 记

$$\|Q^{\leq \frac{1}{2}} v\|_X = \|v\|_X + \|Q^{\frac{1}{2}} v\|_X.$$

定义 Banach 空间的一个闭子集

$$E_T = \left\{ v(t, s) : \|v\|_{E_T} := \sup_{0 \leq t \leq T} \|\partial_t Q^{\leq \frac{1}{2}} v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2C_1 E \right\}$$

和映射

$$\wedge : w(t, s) \rightarrow v(t, s),$$

使得

$$\begin{cases} \partial_t^2 v(t, s) + Qv(t, s) = |w_t|^p, & (t, s) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0, s) = v_0(s), \quad v_t(0, s) = v_1(s), & s \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.2)$$

首先证明映射 $\wedge$ 是到上的. 注意到 (2.2) 的解可以表示为

$$v(t, s) = \cos(t\sqrt{Q})v_0 + \frac{\sin(t\sqrt{Q})}{\sqrt{Q}}v_1 + \int_0^t \frac{\sin((t-\tau)\sqrt{Q})}{\sqrt{Q}}|w_\tau|^p d\tau, \quad (2.3)$$

则易得

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R})} + t\|v_1\|_{L^2(\mathbb{R})} + \int_0^t (t-\tau)\| |w_\tau|^p \|_{L^2(\mathbb{R})} d\tau, \quad (2.4)$$

$$\|\partial_t v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\sqrt{Q}v_0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{R})} + \int_0^t \| |w_\tau|^p \|_{L^2(\mathbb{R})} d\tau, \quad (2.5)$$

$$\|\sqrt{Q}v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\sqrt{Q}v_0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|v_1\|_{L^2(\mathbb{R})} + \int_0^t \| |w_\tau|^p \|_{L^2(\mathbb{R})} d\tau \quad (2.6)$$

以及

$$\|\partial_t \sqrt{Q}v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|Qv_0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\sqrt{Q}v_1\|_{L^2(\mathbb{R})} + \int_0^t \|\sqrt{Q}|w_\tau|^p\|_{L^2(\mathbb{R})} d\tau. \quad (2.7)$$

由此可得

$$\begin{aligned} \|\partial_t Q^{\leq \frac{1}{2}} v\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|v_0\|_{H^2(\mathbb{R})} + (1+t)\|v_1\|_{H^1(\mathbb{R})} + \int_0^t (1+t-\tau)\| |w_\tau|^p \|_{L^2(\mathbb{R})} d\tau \\ &\quad + \int_0^t \|\sqrt{Q}|w_\tau|^p\|_{L^2(\mathbb{R})} d\tau, \end{aligned} \quad (2.8)$$

这里用到了如下等价性 (参见文献 [27, 第 62 页]):

$$\|\sqrt{Q}v\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|v\|_{L^2(\mathbb{R})} \sim \|v\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

由 Sobolev 嵌入定理可以估计非线性项

$$\| |w_\tau|^p \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|w_\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{p-1} \|w_\tau\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|\partial_\tau Q^{\leq \frac{1}{2}} w\|_{L^2(\mathbb{R})}^p \quad (2.9)$$

和

$$\|\sqrt{Q}|w_\tau|^p\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|w_\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{p-1} \|\sqrt{Q}w_\tau\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|\partial_\tau Q^{\leq \frac{1}{2}} w\|_{L^2(\mathbb{R})}^p, \quad (2.10)$$

则对任意 $t \in (0, T(E))$, 由 (2.8) 可推出

$$\begin{aligned} \|\partial_t Q^{\leq \frac{1}{2}} v\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C(1+T)E^p + C \int_0^t (1+t-\tau)(2C_1 E)^p d\tau \\ &\leq C(1+T)E^p + CT(1+T)(2C_1 E)^p. \end{aligned} \quad (2.11)$$

若

$$\left(\frac{C(1+T)E^{p-1}}{2C_1} + CT(1+T)(2C_1 E)^{p-1} \right) \leq 1,$$

则可推出

$$\|\partial_t Q^{\leq \frac{1}{2}} v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2C_1 E,$$

这就证明了映射 $\wedge$ 在 E_T 上是到上的.

下面证明 $\wedge$ 是压缩映射. 对任意 $v, w \in E_T$, $v - w$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 \wedge(v-w) + Q \wedge(v-w) = |v_t|^p - |w_t|^p, & (t, s) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \wedge(v-w)(0, s) = 0, \quad \partial_t \wedge(v-w)(0, s) = 0, & s \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.12)$$

用上述类似的方法可得

$$\begin{aligned} \|\partial_t Q^{\leq \frac{1}{2}} \wedge(v-w)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \int_0^t (1+t-\tau) \| |v_\tau|^p - |w_\tau|^p \|_{L^2(\mathbb{R})} d\tau \\ &\quad + \int_0^t \|\sqrt{Q}(|v_\tau|^p - |w_\tau|^p)\|_{L^2(\mathbb{R})} d\tau. \end{aligned} \quad (2.13)$$

此时非线性项可估计为 (另一项可类似估计)

$$\begin{aligned} \| |v_\tau|^p - |w_\tau|^p \|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|v_\tau - w_\tau\|_{L^2(\mathbb{R})} (\|\partial_\tau v\|_{L^\infty}^{p-1} + \|\partial_\tau w\|_{L^\infty}^{p-1}) \\ &\leq 2(2C_1 E)^{p-1} \|v - w\|_{E_T}, \end{aligned}$$

这里用到了 Sobolev 嵌入 $\|\partial_\tau v\|_{H^1(\mathbb{R})} \hookrightarrow \|\partial_\tau v\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. 结合 (2.13) 可得

$$\|\wedge(v-w)\|_{E_T} \leq 2(2C_1 E)^{p-1} T(1+T) \|v - w\|_{E_T}. \quad (2.14)$$

若 $2(2C_1 E)^{p-1} T(1+T) \leq \frac{1}{2}$, 则有

$$\|\wedge(v-w)\|_{E_T} \leq \frac{1}{2} \|v - w\|_{E_T}, \quad (2.15)$$

压缩映射得证. $\square$

3 准备引理

本节给出 3 个准备引理. 下面出现的正常数 C 与 ε 无关, 在不同的地方其值不一样. 令

$$h(s) = F(s)r(s)^{1-p}, \quad (3.1)$$

则由定义 (1.9) 可得如下引理:

引理 3.1 $h(s)$ 满足

$$h(s) \sim \begin{cases} s^{1-p}, & s \geq 4M + e, \\ e^{\frac{s}{2M}}, & -\infty < s \leq 4M + e, \end{cases} \quad (3.2)$$

这里 $X \sim Y$ 是指存在正常数 C 使得 $C^{-1}Y \leq X \leq CY$ 成立, e 则表示 Euler 数.

证明 由定义 (1.9) 易知,

$$s \geq 4M + e \Leftrightarrow r \geq 2M + e,$$

这又可推出

$$\frac{e}{4M + e} \leq 1 - \frac{2M}{r} \leq 1. \quad (3.3)$$

另外, 若 $r \geq 2M + e$, 则存在正常数 C 使得

$$r \leq s \leq Cr. \quad (3.4)$$

故由 (3.3) 和 (3.4) 可得 (3.2) 第一部分.

另一方面, 易知

$$s \leq 4M + e \Leftrightarrow 2M \leq r \leq 2M + e,$$

这意味着

$$h(s) = (r - 2M)r^{-p} \sim C(r - 2M). \quad (3.5)$$

由 (1.9) 可知, 存在正常数 C 使得

$$2M \ln(r - 2M) = s - r,$$

因此可得

$$r - 2M \sim e^{\frac{s-r}{2M}} = e^{-\frac{r}{2M}} e^{\frac{s}{2M}} \sim C e^{\frac{s}{2M}}. \quad (3.6)$$

由 (3.5) 和 (3.6) 可推出 (3.2) 的第二部分. $\square$

引理 3.2 (参见文献 [16, 引理 5.4]) 令 $W(s) = \frac{2MF(s)}{r(s)^3}$, $F(s) = 1 - \frac{2M}{r(s)}$, 则对任意 $A > 0$, 方程

$$(-\partial_s^2 + W(s) + A^2)\varphi(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

存在一个非负解 $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ 满足

$$\varphi(s) \sim e^{As}, \quad |s| \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

注 3.1 注意到, 若方程 (3.7) 中没有 $W(s)$ 这一项, 则 e^{As} 为其精确解.

引理 3.3 对任意 $\alpha \geq 0, \beta > 0, L > 0$, 存在一个正常数 C 使得

$$\int_{0 < s \leq t+L} (1+s)^\alpha e^{-\beta(t-s)} ds \leq C(t+L)^\alpha \quad (3.9)$$

成立.

证明 把 (3.9) 中的积分分成两部分:

$$\begin{aligned}
 & \int_{0 < s \leq t+L} (1+s)^\alpha e^{-\beta(t-s)} ds \\
 &= \int_0^{\frac{t+L}{2}} (1+s)^\alpha e^{-\beta(t-s)} ds + \int_{\frac{t+L}{2}}^{t+L} (1+s)^\alpha e^{-\beta(t-s)} ds \\
 &\leq C e^{-\beta \cdot \frac{t-L}{2}} \int_0^{\frac{t+L}{2}} (1+s)^\alpha ds + C(t+L)^\alpha \int_{\frac{t+L}{2}}^{t+L} e^{-\beta(t-s)} ds \\
 &\leq C(t+L)^\alpha,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

不等式 (3.9) 得证. $\square$

4 定理 1.1 的证明

本节给出定理 1.1 的证明. 根据引理 3.1 可知, 方程

$$\left(-\partial_s^2 + W(s) + \frac{1}{4M^2} \right) \phi(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

存在一个非负解 $\phi(s)$ 满足

$$\phi(s) \sim e^{\frac{s}{2M}}, \quad |s| \rightarrow \infty. \tag{4.2}$$

令 $\psi(t, s) = e^{-\frac{t}{2M}} \phi(s)$, 则有

$$\begin{aligned}
 \psi_t(t, s) &= -\frac{1}{2M} \psi(t, s), \\
 \partial_s^2 \psi(t, s) - W(s) \psi(t, s) &= \frac{1}{4M^2} \psi(t, s).
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

方程 (1.13) 两端同时乘以 $\psi(t, s)$, 分部积分后得

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} \psi(t, s) (\partial_t^2 v - \partial_s^2 v + W(s)v) ds \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \psi \partial_t^2 v - (\partial_s^2 \psi - W(s)\psi) v ds \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\psi \partial_t^2 v - \frac{1}{4M^2} \psi v \right) ds \\
 &= \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_t|^p \psi ds,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

这里用到了 (4.3) 中的第二个等式.

直接计算可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds = \int_{\mathbb{R}} \psi v_{tt} ds + \int_{\mathbb{R}} \psi_t v_t ds = \int_{\mathbb{R}} \left(\psi v_{tt} - \frac{1}{2M} \psi v_t \right) ds \tag{4.5}$$

和

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \psi v ds = \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds + \int_{\mathbb{R}} \psi_t v ds = \int_{\mathbb{R}} \left(\psi v_t - \frac{1}{2M} \psi v \right) ds. \tag{4.6}$$

在 (4.6) 两端乘以 $\frac{1}{2M}$, 与 (4.5) 相加后结合 (4.3) 和 (4.4) 可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds + \frac{1}{2M} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \psi v ds = \int_{\mathbb{R}} \left(\psi v_{tt} - \frac{1}{4M^2} \psi v \right) ds = \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_t|^p \psi ds. \quad (4.7)$$

在 $[0, t]$ 上对 (4.7) 积分, 结合初值的非负性得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\psi v_t + \frac{1}{2M} \psi v \right) ds &= \int_{\mathbb{R}} \phi(s) g(s) ds + \frac{1}{2M} \int_{\mathbb{R}} \phi(s) f(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_\tau|^p \psi ds d\tau \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} \phi(s) g(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_\tau|^p \psi ds d\tau. \end{aligned} \quad (4.8)$$

在 (4.8) 两端乘以 $\frac{1}{2M}$ 后与 (4.4) 相加得

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\psi v_{tt} + \frac{1}{2M} \psi v_t \right) ds \geq \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_t|^p \psi ds + \frac{1}{2M} \int_{\mathbb{R}} \phi(s) g(s) ds + \frac{1}{2M} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_\tau|^p \psi ds d\tau. \quad (4.9)$$

由此进一步可得

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds + \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi v_{tt} ds - \frac{1}{2M} \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds + \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\psi v_{tt} + \frac{1}{2M} \psi v_t \right) ds \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_t|^p \psi ds + \frac{1}{2M} \int_{\mathbb{R}} \phi(s) g(s) ds + \frac{1}{2M} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_\tau|^p \psi ds d\tau. \end{aligned} \quad (4.10)$$

令

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_\tau|^p \psi ds d\tau - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(s) g(s) ds, \quad (4.11)$$

则有

$$G(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(s) g(s) ds \geq 0 \quad (4.12)$$

和

$$\frac{dG(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}} \left(\psi v_{tt} - \frac{1}{2M} \psi v_t \right) ds - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_t|^p \psi ds. \quad (4.13)$$

结合 (4.10)、(4.11) 和 (4.13) 可得

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} + \frac{1}{M} G(t) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\psi v_{tt} + \frac{1}{2M} \psi v_t \right) ds - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_t|^p \psi ds \\ &\quad - \frac{1}{2M} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_\tau|^p \psi ds d\tau - \frac{1}{2M} \int_{\mathbb{R}} \phi(s) g(s) ds \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_t|^p \psi ds + \frac{1}{2M} \int_{\mathbb{R}} \phi(s) g(s) ds + \frac{1}{2M} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_\tau|^p \psi ds d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_t|^p \psi ds - \frac{1}{2M} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_\tau|^p \psi ds d\tau - \frac{1}{2M} \int_{\mathbb{R}} \phi(s) g(s) ds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_t|^p \psi ds, \quad (4.14)$$

这又可以推出

$$\frac{d}{dt} (e^{\frac{t}{M}} G(t)) \geq 0, \quad (4.15)$$

上式结合 $G(0) \geq 0$ 可得

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_\tau|^p \psi ds d\tau - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(s) g(s) ds \geq 0. \quad (4.16)$$

令

$$F(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) |v_\tau|^p \psi ds d\tau + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(s) g(s) ds \geq 0, \quad (4.17)$$

则由 (4.16) 可得

$$F(t) \leq \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds. \quad (4.18)$$

结合有限传播速度、Hölder 不等式和 (4.2) 可得

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds \right|^p &= \left| \int_{|s| \leq t+R} \psi v_t ds \right|^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} h |v_t|^p \psi ds \left(\int_{|s| \leq t+R} h^{-\frac{1}{p-1}} \psi ds \right)^{p-1} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} h |v_t|^p \psi ds \left(\int_{|s| \leq t+R} h^{-\frac{1}{p-1}} e^{\frac{s-t}{2M}} ds \right)^{p-1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

令

$$I \triangleq \int_{|s| \leq t+R} h^{-\frac{1}{p-1}} e^{\frac{s-t}{2M}} ds,$$

利用渐近行为 (3.2) 可以估计

$$\begin{aligned} I &= \int_{-t-R}^{4M+e} h^{-\frac{1}{p-1}} e^{\frac{s-t}{2M}} ds + \int_{4M+e}^{t+R} h^{-\frac{1}{p-1}} e^{\frac{s-t}{2M}} ds \\ &\leq C \int_{-t-R}^{4M+e} e^{-\frac{s}{2M} \frac{1}{p-1}} e^{\frac{s-t}{2M}} ds + C \int_{4M+e}^{t+R} (1+s) e^{\frac{s-t}{2M}} ds \\ &\leq II + C(t+R), \end{aligned} \quad (4.20)$$

这里用到了引理 3.3 中 $\alpha = 1$ 、 $\beta = \frac{1}{2M}$ 的情形. 另外

$$II = C \int_{-t-R}^{4M+e} e^{-\frac{s}{2M} \frac{1}{p-1}} e^{\frac{s-t}{2M}} ds.$$

下面分 $p = 2$ 、 $\frac{3}{2} \leq p < 2$ 和 $1 < p < \frac{3}{2}$ 三种情形估计 II .

4.1 $p = 2$

此时易得

$$II = Ce^{-\frac{t}{2M}} \int_{-t-R}^{4M+e} ds \leq C(t+R). \quad (4.21)$$

4.2 $\frac{3}{2} \leq p < 2$

直接计算得

$$II = Ce^{-\frac{t}{2M}} \int_{-t-R}^{4M+e} e^{\frac{s}{2M} \frac{p-2}{p-1}} ds \leq Ce^{-\frac{t}{2M} \frac{2p-3}{p-1}} \leq C(t+R). \quad (4.22)$$

结合 (4.20)、(4.21) 和 (4.22) 可知, 当 $\frac{3}{2} \leq p \leq 2$ 时, 有

$$I < C(t+R). \quad (4.23)$$

4.3 $1 < p < \frac{3}{2}$

本小节的估计方法与上述两种情形类似, 唯一的不同点是在使用引理 3.2 中的 (3.7) 时先不固定常数 A , 而是在后面根据计算再定. 利用试探函数 $\psi(t, s) = e^{-At}\phi(s)$, 则易知

$$\begin{aligned} \psi_t(t, s) &= -A\psi(t, s), \\ \psi_{tt}(t, s) &= A^2\psi(t, s), \\ \partial_s^2 \psi(t, s) - W(s)\psi(t, s) &= A^2\psi(t, s). \end{aligned} \quad (4.24)$$

重复上面的步骤, 只需用 A 代替 $\frac{1}{2M}$ 仍然可得

$$F(t) \leq \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds, \quad (4.25)$$

且 (4.19) 变为

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds \right|^p = \left| \int_{|s| \leq t+R} \psi v_t ds \right|^p \leq C \int_{\mathbb{R}} h|v_t|^p \psi ds \left(\int_{|s| \leq t+R} h^{-\frac{1}{p-1}} e^{A(s-t)} ds \right)^{p-1}. \quad (4.26)$$

令 $I_1 \triangleq \int_{|s| \leq t+R} h^{-\frac{1}{p-1}} e^{A(s-t)} ds$, 则有

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-t-R}^{4M+e} h^{-\frac{1}{p-1}} e^{A(s-t)} ds + \int_{4M+e}^{t+R} h^{-\frac{1}{p-1}} e^{A(s-t)} ds \\ &\leq C \int_{-t-R}^{4M+e} e^{-\frac{s}{2M} \frac{1}{p-1}} e^{A(s-t)} ds + C \int_{4M+e}^{t+R} (1+s) e^{A(s-t)} ds \\ &\leq II_1 + C(t+R), \end{aligned} \quad (4.27)$$

这里用到了引理 3.3 中 $\alpha = 1$ 、 $\beta = A > 0$ 的情形. 若选择常数 A 满足

$$\frac{1}{4M(p-1)} \leq A < \frac{1}{2M(p-1)},$$

则可以估计 II_1 如下:

$$\begin{aligned}
 II_1 &= C \int_{-t-R}^{4M+e} e^{-\frac{s}{2M} \frac{1}{p-1}} e^{A(s-t)} ds \\
 &\leq C e^{-At} \int_{-t-R}^{4M+e} e^{(A-\frac{1}{2M(p-1)})s} ds \\
 &\leq C e^{(-2A+\frac{1}{2M(p-1)})t} (t+R) \\
 &\leq C(t+R).
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

结合 (4.17)–(4.19)、(4.23)、(4.27) 和 (4.28) 可知, 对 $1 < p \leq 2$, 成立

$$F'(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} h|v_t|^p \psi ds \geq \frac{C |\int_{\mathbb{R}} \psi v_t ds|^p}{(t+R)^{p-1}} \geq \frac{C|F(t)|^p}{(t+R)^{p-1}}, \tag{4.29}$$

则易知当 $0 < p-1 \leq 1$ 即 $1 < p \leq 2$ 时 $F(t)$ 将在有限时间内爆破, 定理 1.1 中的爆破部分结论得证.

接下来研究生命跨度上界估计. 易知 $F(t)$ 满足

$$\begin{cases} F'(t) \geq \frac{C|F(t)|^p}{(t+R)^{p-1}}, \\ F(0) = N\varepsilon, \end{cases} \tag{4.30}$$

其中 $N = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(s)g(s)ds > 0$. 若考虑

$$\begin{cases} H'(t) = \frac{C|H(t)|^p}{(t+R)^{p-1}}, \\ H(0) = N\varepsilon, \end{cases} \tag{4.31}$$

则 $F(t)$ 将在 $H(t)$ 爆破之前爆破, 故只需要估计 $H(t)$ 的生命跨度.

若 $1 < p < 2$, 则求解 (4.31) 可得

$$H(t) = ((N\varepsilon)^{1-p} + \tilde{C}R^{2-p} - \tilde{C}(t+R)^{2-p})^{-\frac{1}{p-1}}, \tag{4.32}$$

其中 $\tilde{C} = \frac{C(p-1)}{2-p}$. 则 $F(t)$ 的生命跨度上界满足

$$T(\varepsilon) \leq C_2 \varepsilon^{-\frac{p-1}{2-p}}, \tag{4.33}$$

其中 $C_2 = (\frac{2-p}{C(p-1)} N^{1-p})^{\frac{1}{2-p}} > 0$, 与 ε 无关.

若 $p = 2$, 则求解 (4.31) 可得

$$H(t) = \left((N\varepsilon)^{-1} - C \ln \frac{t+R}{R} \right)^{-1}, \tag{4.34}$$

由此可得 $F(t)$ 的生命跨度上界估计

$$T(\varepsilon) \leq C \exp(C_3 \varepsilon^{-1}), \tag{4.35}$$

其中

$$C_3 = \frac{1}{CN} > 0,$$

与 ε 无关. 定理 1.1 得证.

致谢 作者感谢浙江大学王成波教授和浙江理工大学刘梦云博士关于本文中 $1 < p < \frac{3}{2}$ 部分的讨论. 另外, 作者感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Glassey R T. Mathematical reviews to “Global behavior of solutions to nonlinear wave equations in three dimensions” of Sideris. https://mathscinet.ams.org/mathscinet/pdf/711440.pdf?arg3=&co4=AND&co5=AND&co6=AND&co7=AND&dr=all&pg4=AUCN&pg5=ALLF&pg6=PC&pg7=ALLF&pg8=ET&review_format=html&s4=&s5=Global%20behavior%20of%20solutions%20to%20nonlinear%20wave%20equations%20in%20three%20space%20dimensions&s6=&s7=&s8=All&sort=Newest&vfpref=html&yearRangeFirst=&yearRangeSecond=&yrop=eq&r=41
- 2 John F. Blow-up for quasi-linear wave equations in three space dimensions. *Comm Pure Appl Math*, 1981, 34: 29–51
- 3 Sideris T C. Global behavior of solutions to nonlinear wave equations in three dimensions. *Comm Partial Differential Equations*, 1983, 8: 1291–1323
- 4 Schaeffer J. Finite-time blow-up for $u_{tt} - \Delta u = H(u_r, u_t)$ in two space dimensions. *Comm Partial Differential Equations*, 1986, 11: 513–543
- 5 John F. Non-existence of global solutions of $\square u = \frac{\partial}{\partial t} F(u_t)$ in two and three space dimensions. *Rend Circ Mat Palermo* (2) Suppl, 1985, 8: 229–249
- 6 Agemi R. Blow-up of solutions to nonlinear wave equations in two space dimensions. *Manuscripta Math*, 1991, 73: 153–162
- 7 Masuda K. Blow-up of solutions for quasi-linear wave equations in two space dimensions. *North-Holland Math Stud*, 1984, 98: 87–91
- 8 Hidano K, Tsutaya K. Global existence and asymptotic behavior of solutions for nonlinear wave equations. *Indiana Univ Math J*, 1995, 44: 1273–1305
- 9 Tzvetkov N. Existence of global solutions to nonlinear massless Dirac system and wave equation with small data. *Tsukuba J Math*, 1998, 22: 193–211
- 10 Zhou Y. Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations. *Chin Ann Math Ser B*, 2001, 22: 275–280
- 11 Hidano K, Wang C B, Yokoyama K. The Glassey conjecture with radially symmetric data. *J Math Pures Appl* (9), 2012, 98: 518–541
- 12 Lai N A, Takamura H. Nonexistence of global solutions of nonlinear wave equations with weak time-dependent damping related to Glassey’s conjecture. *Differential Integral Equations*, 2019, 32: 37–48
- 13 Wang C B. The Glassey conjecture on asymptotically flat manifolds. *Trans Amer Math Soc*, 2015, 367: 7429–7451
- 14 Zhou Y, Han W. Blow-up of solutions to semilinear wave equations with variable coefficients and boundary. *J Math Anal Appl*, 2011, 374: 585–601
- 15 Wang C B. The Glassey conjecture for nontrapping obstacles. *J Differential Equations*, 2015, 259: 510–530
- 16 Catania D, Georgiev V. Blow-up for the semilinear wave equation in the Schwarzschild metric. *Differential Integral Equations*, 2006, 19: 799–830
- 17 Lai N A. Blow up of critical semilinear wave equations on Schwarzschild spacetime. *J Math Anal Appl*, 2014, 409: 716–721
- 18 Lindblad H, Metcalfe J, Sogge C D, et al. The Strauss conjecture on Kerr black hole backgrounds. *Math Ann*, 2014, 359: 637–661
- 19 Metcalfe J, Wang C B. The Strauss conjecture on asymptotically flat space-times. *SIAM J Math Anal*, 2017, 49: 4579–4594
- 20 Blue P, Sterbenz J. Uniform decay of local energy and the semi-linear wave equation on Schwarzschild space. *Comm Math Phys*, 2006, 268: 481–504
- 21 Marzuola J, Metcalfe J, Tataru D, et al. Strichartz estimates on Schwarzschild black hole backgrounds. *Comm Math Phys*, 2010, 293: 37–83
- 22 Wang C B. Long-time existence for semilinear wave equations on asymptotically flat space-times. *Comm Partial Differential Equations*, 2017, 42: 1150–1174
- 23 Lin Y H, Lai N A, Ming S. Lifespan estimate for semilinear wave equation in Schwarzschild spacetime. *Appl Math Lett*, 2020, 99: 105997
- 24 Lai N A, Chen L, Ma Z Y. Finite time blow up for a wave equation with nonlinear memory in Schwarzschild spacetime (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2015, 45: 117–128 [赖宁安, 陈立, 马正义. Schwarzschild 时空中带非线性记忆项的波动]

- 方程解的破裂. 中国科学: 数学, 2015, 45: 117–128]
- 25 Wang C B. Recent progress on the Strauss conjecture and related problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 111–130 [王成波. Strauss 猜测相关问题与进展. 中国科学: 数学, 2018, 48: 111–130]
- 26 Luk J. The null condition and global existence for nonlinear wave equations on slowly rotating Kerr spacetimes. J Eur Math Soc (JEMS), 2013, 15: 1629–1700
- 27 Catania D. Linear and nonlinear perturbed wave equations. PhD Thesis. Pisa: Pisa University, 2008

Lifespan estimate for the semilinear wave equation with a derivative nonlinear term in Schwarzschild spacetime

Ning'an Lai & Yi Zhou

Abstract In this paper, we study the Cauchy problem of the semilinear wave equation with a derivative nonlinear term and small initial data $\square_{g_S}\phi = |\partial_t\phi|^p$, where $\square_{g_S}$ denotes the wave operator with the Schwarzschild metric. We show the blow-up result for the radial solution if $p \in (1, 2]$, and furthermore the lifespan estimate from above is established. The interesting thing is that we do not have to assume that the support of the initial data should be far away from the event horizon, which means that we have to overcome the difficulty caused by the black hole, compared with the corresponding problem in flat Minkowski spacetime.

Keywords Schwarzschild black hole, wave equation, lifespan

MSC(2020) 35L70, 58J45

doi: 10.1360/SSM-2020-0233