中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 11 期: 1933～1954
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

概率测度间差异性度量方法与不确定性及金融经济学应用

献给严加安院士 80 华诞

张丽宏, 林海嵩, 王浩

清华大学经济管理学院, 北京 100084
E-mail: zhanglh2@sem.tsinghua.edu.cn, linhs20@mails.tsinghua.edu.cn, wanghao@sem.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2020-06-30; 接受日期: 2021-10-14; 网络出版日期: 2021-12-02; * 通信作者
清华大学自主科研计划 (批准号: 2021THZWJC28) 资助项目

摘要 针对在 Knight 不确定性下的决策问题, 本文基于非参数化的思想提出了一种新的概率模型之间差异的度量方法, 以此规避参数化不确定性模型描述金融数据特征的损失. 该度量方法对概率模型的形式没有限制, 并且易于计算. 在正态假设下, 使用该度量方法的非参数化检验方法可以退化为一种更不易犯第一类错误的参数检验方法. 本文将该度量方法应用于美国标准普尔 500 指数, 发现了不确定性指标的双波峰特征, 结果表明概率模型之间的差异捕捉到了独特的信息并且在金融市场中可能有特别的预警作用. 本文得到的不确定性指标也可以被应用于研究不确定性与资产定价的关系.

关键词 概率测度 Knight 不确定性 模糊性 金融 资产定价

MSC (2020) 主题分类 62C99, 62F99, 62G99, 62P99, 91B02, 91B82

1 引言

不确定性下的决策问题是一个常见而且重要的研究课题. Knight [1] 认为有 3 种不确定性. 这些不确定性与概率分布具有紧密联系: 第 1 种不确定性可以通过已知的真实概率分布进行描述; 第 2 种不确定性可以在真实概率分布未知的情形下通过统计方法对概率分布做出推断; 第 3 种不确定性被 Knight 称为真正的不确定性, 即真实的概率分布未知, 也无法用统计方法给出推断. 在金融市场上, 前两种不确定性与风险有关, 而第 3 种不确定性也被称为模糊性 (ambiguity) 或 Knight 不确定性 (Knightian uncertainty). 为统一起见, 未特别说明时, 下文提到的不确定性皆指模糊性, 即 Knight 不确定性.

Ellsberg [2] 提出了著名的 Ellsberg 悖论, 通过简单的罐中取球模型阐明不确定性偏好的存在及其对决策产生的影响. 他的发现对 Savage [3] 的传统主观期望效用理论造成了冲击. 对于 Ellsberg 悖论在

英文引用格式: Zhang L H, Lin H S, Wang H. A method of measuring the difference between probability models as uncertainty and its applications in financial economics (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1933–1954, doi: 10.1360/SSM-2020-0215

© 2021《中国科学》杂志社

长期演化中的特点, Reiss[4] 指出不确定性并不是统计学意义上的误差, 会在长期内一直存在并且影响决策.

针对不确定性下的决策问题, 很多学者从模糊性改变决策范式的角度展开讨论. Schmeidler[5] 对主观期望效用理论做了推广, 提出了能够解释 Ellsberg 悖论的 Choquet 期望效用模型 (Choquet expected utility model). Gilboa 和 Schmeidler[6] 提出了一套与 von Neumann 期望效用理论有所不同的公理体系, 使用最大最小期望效用函数 (max-min expected utility function) 建立多重先验模型 (multiple-priors utility model). 之后, Klibanoff 等[7] 提出了不确定性下的平滑模型 (smooth model), Epstein 和 Wang[8] 及 Chen 和 Epstein[9] 则分别给出了离散时间和连续时间的跨期多重先验模型 (intertemporal multiple-priors utility model).

在众多决策范式中, 从参考模型的角度思考不确定性是常见的方法. 在不确定性下做决策时, 决策者往往会根据历史信息提出参考模型 (reference model) 来刻画第一种不确定性, 即所说的风险, 同时决策者会担心模型概率分布可能是错的, 而他却无法用概率分布来描述潜在的错误, 于是就产生了 Knight 不确定性. 从直觉上讲, 决策者会在决策中考虑参考模型和未知的真实模型之间的差异大小, 因此表现出疑虑和保守的态度. 那么如何刻画模型之间的差异就成为了一个具有重要理论和实践意义的问题. 针对这一问题, 有学者将稳健性控制 (robust control) 理论引入到不确定性研究领域中, 其核心思想是明确备择模型 (alternative model) 的选择方式来找到准确区分参考模型和备择模型的方法. 目前, 几乎所有研究都采取参数化的研究方法, 也就是说决策者怀疑概率分布的某些特殊阶矩或参数可能有偏差, 因此在假定模型形式的基础上针对参考模型的某些参数考虑备择模型. 例如, 在假定资产价格服从几何 Brown 运动的情形下, Anderson 等[10] 及 Hansen 和 Sargent[11] 使用相对熵 (relative entropy) 来刻画均值回报率 (mean return) 上具有的不确定性. Liu 等[12] 提出了新的度量方法克服了概率分布之间等价性的限制来研究方差 (volatility) 上的不确定性. 在此基础上, 他们提出了针对任意参数的不确定性决策问题的一般解法[1)]. 但是, 这些参数不确定性的研究方法受限于参考模型的形式, 因此会损失很多参数模型所不能体现的数据特征, 例如, 正态分布的假定不能识别数据尖峰厚尾的本质特征. 为保留并识别更多数据的特征, 本文试图寻找到一种对模型概率分布限制更少的非参数化方法来度量不同概率模型之间的差异, 进而更加全面地刻画不确定性.

概率模型之间的差异既可以理解为相同的随机变量 (或随机过程) 具有不同的概率模型 (不同的人有不同的认知), 也可以理解成是在相同的概率空间下不同的随机变量 (或随机过程) 之间的差异. 本文首先总结了概率模型之间差异的度量方法, 并提出了一种新的度量方法. 该度量方法不受概率测度之间是否等价以及对应的概率测度是否存在密度函数等限制, 并且易于计算. 在假设正态分布的特殊情形下, 非参数化的检验方法可以退化为参数检验方法. 将该方法应用于美国标准普尔 500 指数, 并使用参数检验的临界值作为预警信号对金融市场进行了分析. 结果表明, 概率测度之间的差异作为不确定性指标具有双波峰特征, 并且能够捕捉到独特的信息, 对金融市场具有预警作用.

本文的研究成果也可以应用于金融经济学的资产定价领域. 资产定价的核心在于识别并定价风险和不确定性. 传统的风险 - 收益模型仅考虑之前描述的前两种不确定性, 未能考虑 Knight 不确定性. 但是 Merton[13]、French 等[14]、Mehra 和 Prescott[15]、Welch 和 Goyal[16] 等学者发现传统的风险 - 收益预测因子对收益的预测效果不佳. 这些发现表明只考虑风险对收益的影响可能是不够的. 有学者提出将不确定性和投资者对于不确定性的偏好加入到模型中 (参见文献 [17]). 从实证角度看, 由于 Knight 不确定性不像前两种不确定性那样具有直观的结构和估计方法, 寻找到一种简单易算而且与风

1) Liu Y, Wang H, Wang T, et al. A unified framework for decision-making under multi-parameters' ambiguity. Working Paper, 2020

险相对独立的不确定性指标至关重要并且充满挑战. 本文提出的度量方法简洁易算, 并且具有明确的经济意义, 其与风险相关指标相比具有明显不同的特征. 基于本文的方法, 可以进一步探讨不确定性与资产定价间的定量关系. 我们的研究也为在不确定性下研究金融衍生品定价问题提供了方法基础.

本文余下内容安排如下: 第 2 节在总结现有文献的基础上提出一种新的概率测度之间差异的度量方法并证明相关性质, 第 3 节给出概率测度之间的差异在金融经济学中的应用并对相应结果予以解释, 第 4 部分总结全文.

2 新的概率度量方法

2.1 概率度量的基本概念与常用度量方法

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{F}$ 是 Ω 上 σ- 代数, $\mathbb{P}$ 为概率测度. 令 $\mathcal{M}$ 为所有定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的实随机变量的集合. 对于 $\mathcal{M}$ 中每一个随机变量 X, 都可以找到通过 $\mathbb{P}$ 诱导出的概率测度 P_X, 特别地, 在 Euclid 空间上能够找到对应的分布函数 F_X. 通过 $\mathcal{M}$ 和概率测度 $\mathbb{P}$, 能够利用随机变量的联合分布生成一系列空间 $\mathscr{P}^1 = \{P_X\}, \mathscr{P}^2 = \{P_{XY}\}, \ldots$ 以下采用 Zolotarev [18] 对概率度量 (probability metric) 的定义方式.

定义 2.1 $\mu(X, Y)$ 是定义在 $\mathcal{M}^2$ 上并取值于广义区间 $[0, +\infty]$ 中的映射, 若 μ 满足以下性质:

(1) 规范性: 若 $\mathbb{P}(X = Y) = 1$, 则 $\mu(X, Y) = 0, \forall X, Y \in \mathcal{M}$;

(2) 对称性: $\mu(X, Y) = \mu(Y, X), \forall X, Y \in \mathcal{M}$;

(3) 三角不等式: $\mu(X, Y) \leqslant \mu(X, Z) + \mu(Z, Y), \forall X, Y, Z \in \mathcal{M}$,

则称 μ 为一个概率度量.

值得注意的是, 有很多概率测度间差异性的度量方法 $\mu(X, Y)$ 并不完全满足上述 3 条性质, 如相对熵 (Kullback-Leibler 散度). 这些度量方法虽然不是严格意义上的概率度量, 但它们具有较好的性质. 为方便起见, 称这些度量方法为概率测度间的一种差异 (difference).

当 $\mu(X, Y)$ 的取值仅仅由二者的边缘分布所决定时, 称 μ 是一个简单概率度量方法, 此时 $\mu(X, Y) = \mu(P_X, P_Y) = \mu(F_X, F_Y)$. 特别地, 当 μ 是概率度量时, 称其为简单概率度量. 对于简单概率度量方法, 讨论随机变量间的差异与讨论其对应概率测度或边缘分布函数间的差异是一致的. 在不确定性决策问题中, 一般不考虑参考模型与备择模型之间的相关性, 因此下文中讨论的所有度量方法都将是简单概率度量方法.

对于随机变量 X_1 和 X_2, 由 $\mathbb{P}$ 诱导出的概率测度为 P_1 和 P_2, 对应的分布函数为 F_1 和 F_2, 对应的密度函数 (若存在) 为 f_1 和 f_2. 下面给出一部分常用的概率度量或差异以及它们的性质.

(1) Discrepancy 度量

$$d_D(P_1, P_2) = \sup_{\text{所有闭球 } B \in \mathcal{B}} |P_1(B) - P_2(B)|,$$

其中 $\mathcal{B}$ 指实数域上的 Borel 代数. d_D 是取值于 $[0, 1]$ 的概率度量 (参见文献 [19]).

(2) Hellinger 度量

$$d_H^2(P_1, P_2) = \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{\frac{dP_1}{dm}} - \sqrt{\frac{dP_2}{dm}} \right)^2 dm.$$

d_H 是取值于 $[0,1]$ 的概率度量, 并且可以证明其取值不依赖于控制测度 m 的选取 (参见文献 [19]). 在一维连续型随机变量情形下, d_H^2 可写作

$$d_H^2(P_1,P_2)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)})^2dx.$$

对于两个正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 有更简洁的表达式 2)

$$d_H^2(P_1,P_2)=1-\sqrt{\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right].$$

(3) 相对熵 (Kullback-Leibler 散度)

$$d_I(P_1,P_2)=\int_{S(P_1)}f_1\log\left(\frac{f_1}{g_1}\right)dx,$$

其中 $S(P_1)$ 为 P_1 的支撑集. d_I 取值于 $[0,+\infty)$, 由于不满足对称性, 因此 d_I 不是概率度量. d_I 关于乘积测度有重要性质 (参见文献 [19]): 若 $P_1=\mu_1\times\mu_2, P_2=\nu_1\times\nu_2$, 则 $d_I(P_1,P_2)=d_I(\mu_1,\nu_1)+d_I(\mu_2,\nu_2)$. 相对熵在信息论里有着重要的应用.

(4) Lévy 度量

$$d_L(F_1,F_2)=\inf\{\epsilon>0:F_2(x-\epsilon)-\epsilon\leqslant F_1(x)\leqslant F_2(x+\epsilon)+\epsilon,\forall\, x\in\mathbb{R}\},$$

其中 d_L 是取值于 $[0,1]$ 的概率度量 (参见文献 [18]).

(5) Kolmogorov 度量

$$d_K(F_1,F_2)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_1(x)-F_2(x)|,$$

其中 d_K 是取值于 $[0,1]$ 的概率度量 (参见文献 [19]).

(6) Wasserstein (或 Kantorovich) 度量

$$d_W(P_1,P_2)=\int_{-\infty}^{\infty}|F_1(x)-F_2(x)|dx=\int_0^1|F_1^{-1}(t)-F_2^{-1}(t)|dt,$$

其中 d_W 是取值于 $[0,+\infty)$ 的概率度量 (参见文献 [19]).

(7) χ^2 距离

$$d_{\chi^2}(P_1,P_2)=\int_{S(P_1)\cup S(P_2)}\frac{(f_1-f_2)^2}{f_2}dx.$$

d_{χ^2} 取值于 $[0,+\infty)$, 由于不满足对称性, 因此 d_{χ^2} 不是概率度量 (参见文献 [18]).

(8) Engineer 度量

$$d_E(X_1,X_2):=|\mathbb{E}X_1-\mathbb{E}X_2|,$$

其中 d_E 是取值于 $[0,+\infty)$ 的概率度量.

下面是上述度量或差异间的部分控制关系 (参见文献 [19]), 其中 F_1 和 F_2 为分布函数.

性质 2.1 $d_K(F_1,F_2)\leqslant d_D(F_1,F_2)\leqslant 2d_K(F_1,F_2)$.

2) Fu Z C, Lu T, Zhang L H, et al. The next stock market crash: Market ambiguity since 1986. Working Paper, 2020

性质 2.2 $d_H^2(F_1,F_2)\leqslant \frac{1}{2}d_I(F_1,F_2)$.

性质 2.3 $d_H(F_1,F_2)\leqslant (d_{\chi^2}(F_1,F_2))^{\frac{1}{4}}$.

性质 2.4 若 F_2 绝对连续, 则 $d_L(F_1,F_2)\leqslant d_K(F_1,F_2)\leqslant (1+\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_2'(x)|)d_L(F_1,F_2)$.

如引言所述, 本文研究的概率测度间差异性度量希望用于不确定性下的决策参考以及资本市场不确定性及其收益之间的实证研究, 因此这样的度量应该首先满足 3 个基本要求: 第一, 简洁易于计算并且有界 (Wasserstein 度量无界, Discrepancy 度量和 Lévy 度量计算略烦琐); 第二, 普适性, 也就是不对所要度量的两个概率测度之间的关系以及概率测度自身的性质有要求 (相对熵要求度量的两个概率测度之间的等价性, Hellinger 度量以及 χ^2 距离要求密度函数存在性); 第三, 度量能够全面地反映两个概率测度之间整体上的差异 (Kolmogorov 度量反映的是极端点的差异, 而 Engineer 度量只反映二者均值的差异).

进一步, 实际中的不确定性实质上反映的是模型不确定性, 也就是说目前已有的参考模型和真实概率模型之间的差异, 这反映了信息缺失的问题, 也就是说模型不确定性与信息缺失之间紧密联系. 因此, 选取的度量方法不仅需要满足对于不确定性的认知, 还应该对概率模型里原有信息具备不变性. 如果具备这样的不变性, 则说明不能够通过一定的 "加工" 来使得数据变得更接近真实. 如果对原始的随机变量 X 与 Y 做一个相同的严格单调递增变换, 得到 $h(X)$ 和 $h(Y)$, 则这样的变换不会破坏两个随机变量原有的信息. 因此, 希望概率测度之间的度量大小不应该发生变化, 也就是满足严格单调递增变换不变性.

基于这样的要求和理念, 本文提出一种新的概率测度之间差异的度量方法, 它既满足上述的 3 条基本要求, 又具有严格单调递增变换下的不变性.

2.2 新度量 (new proxy) 方法的定义

在非参数检验中, Anderson [20] 基于 Cramér-von Mises 准则提出了下述统计量 (也可以参见文献 [21]):

$$T=\frac{NM}{(N+M)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}[F_N(x)-G_M(x)]^2d(NF_N(x)+MG_M(x)), \tag{2.1}$$

其中 F_N 和 G_M 是样本容量分别为 N 和 M 的不同样本形成的经验分布函数, 上述积分指 Lebesgue-Stieltjes 积分. 检验两组样本是否服从同一分布时, 使用上述统计量进行估计的准确性相比 Kolmogorov-Smirnov 检验要更好 (参见文献 [20]). 在上述检验的启发下, 将此离散定义推广到任意分布函数的情形.

考虑概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上两个随机变量 X_1 和 X_2, 其由 $\mathbb{P}$ 诱导出的概率测度为 P_1 和 P_2, 各自对应的分布函数分别为 F_1 和 F_2, 使用下式定义它们之间的一种差异 d_{new}:

$$\begin{aligned}d_{\text{new}}(X_1,X_2)&=d_{\text{new}}(F_1,F_2)\\&=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(F_1(x)-F_2(x))^2dF_1(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}(F_1(x)-F_2(x))^2dF_2(x)\right]},\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中积分是指 Lebesgue-Stieltjes 积分. 由于 $(F_1-F_2)^2$ 总是有界可测的, 因此上述定义方式合理. 从直观上理解, 上述积分的第一部分代表了在 P_1 视角下 F_1 和 F_2 的差异, 积分的第二部分代表了在 P_2 视角下 F_1 和 F_2 的差异. 换言之, 这是通过 P_1 和 P_2 对二者间差异进行了一种加权平均, 而 (2.1) 则

是通过等分区间的方式来进行加权, 二者是一致的. 进一步地, 根据定义可知, $d_{\text{new}}(F_1, F_2) = 0$ 等价于 F_1 和 F_2 在 P_1 意义下几乎处处相等并且在 P_2 意义下也几乎处处相等.

当 X_1 和 X_2 都是连续型随机变量时, 对应密度函数分布为 f_1 和 f_2, 则上述 Lebesgue-Stieltjes 积分可以化为

$$d_{\text{new}}(X_1, X_2) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(F_1(x) - F_2(x))^2 f_1(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}(F_1(x) - F_2(x))^2 f_2(x)dx\right]}. \tag{2.3}$$

对于离散情形, 若 X_1 的可能取值为 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, X_2 的可能取值为 $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, 则上述 Lebesgue-Stieltjes 积分可以化为

$$d_{\text{new}}(X_1, X_2) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{+\infty}(F_1(a_i) - F_2(a_i))^2 P_1(a_i) + \sum_{j=1}^{+\infty}(F_1(b_j) - F_2(b_j))^2 P_2(b_j)\right]}. \tag{2.4}$$

在上述定义下, 如果将 F_1 和 F_2 取作样本生成的经验分布函数 F_N 和 G_M, 则上式适当变换后可以归结到 (2.1), 从而进行 Anderson 提出的非参数检验.

对于非连续也非离散的其他情形, 则直接由 Lebesgue-Stieltjes 积分的定义来计算.

2.3 部分性质的讨论

沿用上文记号: 随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数为 F_1 和 F_2, 其由 $\mathbb{P}$ 诱导出的概率测度为 P_1 和 P_2. 由定义容易知 $d_{\text{new}} \in [0, 1]$. 当 $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 1$ 时, F_1 与 F_2 是相等的. 于是 $d_{\text{new}} = 0$, 即知 d_{new} 满足度量的规范性, 而 d_{new} 的对称性则是显然的. 但是 d_{new} 并不满足三角不等式, 因此 d_{new} 并不是概率度量. 本文仅为写作方便起见, 称呼这种新的度量方法为新度量 (new proxy), 也可理解为一种新的衡量概率分布间差异性的指标. 从上面分析中可以看到新度量满足上文所提到的 3 个基本要求: 简洁易算且有界, 对两个概率测度没有特别要求, 并且能够全面反映二者整体上的差异.

以下来说明这样的新度量满足严格单调递增变换不变性.

引理 2.1 F 是分布函数, h 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 上的严格单调递增映射, 且满足 $h(-\infty) = -\infty$, $h(+\infty) = +\infty$, 则对任意 Borel 可测函数 g, 都有 $\int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x) = \int_{\mathbb{R}} g(h(x))dF(h(x))$ 成立.

通过引理 2.1 和 $(F_1 - F_2)^2$ 的可测性即知新度量方法满足严格单调递增变换不变性. 下面是关于新度量与随机变量弱收敛性间的联系.

命题 2.1 对于一族连续型随机变量的分布函数 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 F, 对应密度函数分别为 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 f. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限函数处处存在, 并且存在 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可积函数 $h(x)$, 使得 $f_n(x) \leqslant h(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}, \forall n$. 则 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛到 F 等价于 $\lim_{n\to\infty} d_{\text{new}}(F_n, F) = 0$.

证明 熟知连续型随机变量的分布函数是连续函数, 因此 F_n 和 F 皆连续. 若 $\{F_n\}$ 弱收敛到 F, 则 $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \forall x \in \mathbb{R}$. 由条件知 $(F_n - F)^2(f_n + f)$ 被 $(f + h)$ 控制, 故用控制收敛定理得 $\lim_{n\to\infty} d_{\text{new}}(F_n, F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty}(F_n(x) - F(x))^2(f_n(x) + f(x))dx = 0$.

反之, 假设 $\lim_{n\to\infty} d_{\text{new}}(F_n, F) = 0$. 由于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 被 h 控制, 因此 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限函数处处存在并且 $\int_{-\infty}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt$. 令 $G(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$, $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, 则 $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$, 且 $G(x)$ 连续. 再次用控制收敛定理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty}(F_n(x) - F(x))^2(f_n(x) + f(x))dx = \lim_{n\to\infty} d_{\text{new}}(F_n, F) = 0.$$

利用上式中被积函数非负性可得 $\lim_{n\to\infty}(F_n(x)-F(x))^2(f_n(x)+f(x))=0$, a.e. $x\in\mathbb{R}$, 进一步化简得到

$$(G(x)-F(x))^2(g(x)+f(x))=0,\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}. \tag{2.5}$$

若 $\exists x_0$ s.t. $F(x_0)\neq G(x_0)$, 不失一般性, 可设 $F(x_0)>G(x_0)$.

令 $D=\{x\in\mathbb{R}:(G(x)-F(x))^2(g(x)+f(x))\neq 0\}$ 和 $E=\{x:x<x_0,F(x)=G(x)\}$, (2.5) 说明 D 是 Lebesgue 零测集. 如果 $\forall x<x_0$, 都有 $F(x)\neq G(x)$, 则在 $(-\infty,x_0]\cap D^C$ 上 $f(x)=0$, 而且 $(-\infty,x_0]\cap D$ 是 Lebesgue 零测集. 因此 $F(x_0)=F(-\infty)=0$, 与 $F(x_0)\geqslant G(x_0)$ 矛盾. 故 E 非空且可设 $e=\sup E$, 由 F 和 G 的连续性知 $e\in E$, 即 $F(e)=G(e)$. 由 E 的定义知在区间 $(e,x_0]$ 上 $G(x)\neq F(x)$, 因此 $(e,x_0]\cap D^C$ 上 $f(x)=0$, 而且 $(e,x_0]\cap D$ 是 Lebesgue 零测集, 因而 $F(e)=F(x_0)>G(x_0)\geqslant G(e)$, 得到矛盾.

基于以上分析, 得证不存在这样的 x_0, 也即 $F(x)=G(x)=\lim_{n\to\infty}F_n(x),\forall x\in\mathbb{R}$. □

以下给出新度量和部分常用概率度量方法间存在的联系.

命题 2.2 $d_{\text{new}}\leqslant d_K$.

命题 2.3 若 F_1 和 F_2 是连续型随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数, 且 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_1'(x)|=M_1<\infty$, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_2'(x)|=M_2<\infty$, 则

$$d_{\text{new}}\leqslant(1+M)d_L,\quad \text{其中 } M=\min\{M_1,M_2\}.$$

特别地, 对于两个正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 可得到 $d_{\text{new}}\leqslant(1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\min\{\frac{1}{\sigma_1},\frac{1}{\sigma_2}\})d_L$.

2.4 新度量在正态分布情形下的性质

金融经济学中常用几何 Brown 运动来描述股票价格的变动, 因此探究新度量在正态分布情形下的性质显得尤为重要. 以下总假设随机变量 X_1 服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, X_2 服从 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 其对应的概率密度函数和分布函数分别为 f_i 和 F_i $(i=1,2)$. 同时, 令 Φ 和 ϕ 为标准正态分布的分布函数和密度函数.

对于连续型随机变量, 可以用分部积分对 (2.3) 进行下述改写:

$$\begin{aligned}d_{\text{new}}(F_1,F_2)&=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(F_1(x)-F_2(x))^2f_1(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}(F_1(x)-F_2(x))^2f_2(x)dx\right]}\\&=\sqrt{\frac{4}{3}-2\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)F_2(x)(f_1(x)+f_2(x))dx}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

由 (2.6) 可知, 对于连续型随机变量, 研究新度量只需要研究积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)F_2(x)(f_1(x)+f_2(x))dx$ 的性质即可. 在正态性假设下继续改写上述积分 I,

$$\begin{aligned}I&=\sigma_1\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\sigma_1t+\mu_1)F_2(\sigma_1t+\mu_1)[f_1(\sigma_1t+\mu_1)+f_2(\sigma_1t+\mu_1)]dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\Phi\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}t+\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_2}\right)\left[\phi(t)+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\phi\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}t+\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}t+\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\Phi\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}t-\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_1}\right)\right]dt.\end{aligned} \tag{2.7}$$

(2.7) 说明, 如果将 F_1 和 F_2 同时平移相同的单位, 则新度量的值不会改变, 也即具有平移不变性, 是前文论证过的严格单调变换不变性的特例.

特别地, 如果在 (2.7) 中取 $\mu_1=\mu_2=\mu$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x)F_2(x)[f_1(x)+f_2(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}t\right)+\Phi\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}t\right)\right]dt. \tag{2.8}$$

于是 I 化为一个仅关于 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ 的函数. 这说明, 当两个正态分布具有共同均值时, 二者的方差之比将直接确定二者间的差异.

如果在 (2.7) 中取 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x)F_2(x)[f_1(x)+f_2(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(t+\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma}\right)+\Phi\left(t-\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma}\right)\right]dt. \tag{2.9}$$

于是 I 化为一个仅关于 $\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma}$ 的函数. 这说明, 当两个正态分布具有共同方差时, 二者的均值之差不能直接确定二者间的差异, 需要用共同方差 σ 作标准化后才能决定新度量的值.

在 (2.8) 中, 令 $c=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}>0$, 则 I 化为关于 c 的函数:

$$I(c)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi(ct)+\Phi\left(\frac{t}{c}\right)\right]dt.$$

命题 2.4 当 $c>1$ 时, $I(c)$ 关于 c 递减; 当 $0<c<1$ 时, $I(c)$ 关于 c 递增.

证明 考虑 $I(c)$ 对 c 的导数, 由于其满足积分号下求导换序的条件, 可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{dI}{dc}=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[t\phi(ct)-\frac{t}{c^2}\phi\left(\frac{t}{c}\right)\right]dt=A_1-A_2,\\
&A_1=\int_{-\infty}^{+\infty}t\Phi(t)\phi(t)\phi(ct)dt=\frac{1}{2\pi(c^2+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(c^2+1)t^2}{2}}\phi(t)dt=\frac{1}{2\pi(c^2+1)}\sqrt{\frac{1}{c^2+2}},\\
&A_2=\frac{1}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}t\Phi(t)\phi(t)\phi\left(\frac{t}{c}\right)dt=\frac{1}{2\pi(c^2+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}(1+\frac{1}{c^2})}\phi(t)dt=\frac{1}{2\pi(c^2+1)}\sqrt{\frac{c^2}{2c^2+1}},\\
&I=A_1-A_2=\frac{1}{2\pi(c^2+1)}\left[\sqrt{\frac{1}{c^2+2}}-\sqrt{\frac{c^2}{2c^2+1}}\right],
\end{aligned}$$

而 $\sqrt{\frac{1}{c^2+2}}-\sqrt{\frac{c^2}{2c^2+1}}$ 在 $c>1$ 时小于 0, 在 $c<1$ 时大于 0. 因此得到上述有关 $I(c)$ 的单调性结论. □

上述单调性结论说明, 对于两个均值相同的正态分布, 其方差之比越偏离 1, 则 $I(c)$ 越小, 新度量越大. 当 $c=0$ 时, 可计算得 $I(c)=\frac{5}{8}$; 当 $c=+\infty$ 时, 也可计算得 $I(c)=\frac{5}{8}$. 因此根据单调性可知, 均值相同的正态分布间新度量的最大值为 $\sqrt{\frac{4}{3}-2I(c)}=\sqrt{\frac{1}{12}}$.

在 (2.9) 中, 令 $b=\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma}$, 则 I 化为关于 b 的函数:

$$I(b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)[\Phi(t+b)+\Phi(t-b)]dt.$$

命题 2.5 当 $b>0$ 时, $I(b)$ 关于 b 递减; 当 $b<0$ 时, $I(b)$ 关于 b 递增.

证明 考虑 $I(b)$ 对 b 的导数, 由于其满足积分号下求导换序的条件, 可以得到

$$\frac{dI}{db}=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)[\phi(t+b)-\phi(t-b)]dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\phi(t+b)[\Phi(t)-\Phi(t+b)]dt.$$

容易看出, 当 $b>0$ 时, $\frac{dI}{db}<0$; 当 $b<0$ 时, $\frac{dI}{db}>0$. 由此得证 $I(b)$ 的单调性. □

上述单调性结论说明, 对于两个方差相同的正态分布, 经共同方差标准化过的均值的差越偏离 0, 则 $I(b)$ 越小, 新度量越大. 当 $b=+\infty$ 时, 可计算得 $I(b)=\frac{1}{2}$; 当 $b=-\infty$ 时, 也可计算得 $I(b)=\frac{1}{2}$. 因此根据单调性可知, 方差相同的正态分布间新度量的最大值为 $\sqrt{\frac{4}{3}-2I(b)}=\sqrt{\frac{1}{3}}$.

在 (2.7) 中, 令 $b=\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_2}$ 和 $c=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}>0$, 则 $\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_1}=\frac{b}{c}$, 于是 I 化为关于 b 与 c 的函数:

$$I(c,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi(ct+b)+\Phi\left(\frac{t-b}{c}\right)\right]dt.$$

命题 2.6 $I(c,b)=I(c,-b)$, 即关于 b 对称.

证明 直接作差得到

$$I(c,b)-I(c,-b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi(ct+b)+\Phi\left(\frac{t-b}{c}\right)-\Phi(ct-b)-\Phi\left(\frac{t+b}{c}\right)\right]dt.$$

记 $H(t)=\Phi(ct+b)+\Phi(\frac{t-b}{c})-\Phi(ct-b)-\Phi(\frac{t+b}{c})$, 则由正态分布对称性易证 $H(t)=H(-t)$, 因此

$$\begin{aligned}
I(c,b)-I(c,-b)&=\int_{0}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)H(t)dt+\int_{0}^{+\infty}(1-\Phi(t))\phi(t)H(t)dt\\
&=\int_{0}^{+\infty}\phi(t)H(t)dt\\
&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)H(t)dt,\\
\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)H(t)dt&=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\left[\Phi(ct+b)+\Phi\left(\frac{t-b}{c}\right)-\Phi(ct-b)-\Phi\left(\frac{t+b}{c}\right)\right]dt\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\left[c\phi(ct-b)-c\phi(ct+b)+\frac{1}{c}\phi\left(\frac{t+b}{c}\right)-\frac{1}{c}\phi\left(\frac{t-b}{c}\right)\right]dt,\\
\int_{-\infty}^{+\infty}c\Phi(t)\phi(ct-b)dt&=\int_{-\infty}^{+\infty}c\Phi(-t)\phi(ct+b)dt\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi\left(-\frac{t-b}{c}\right)\phi(t)dt\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{c}\phi\left(\frac{t-b}{c}\right)\Phi(t)dt.
\end{aligned}$$

同理可证 $\int_{-\infty}^{+\infty}c\Phi(t)\phi(ct+b)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{c}\phi(\frac{t+b}{c})\Phi(t)dt$.

于是 $I(c,b)-I(c,-b)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)H(t)dt=0$, 即证 I 关于 b 对称. □

关于 $I(c,b)$ 的单调性, 可以取 $b=1$ 观察 $I(c,1)$ 关于 c 的图像, 并取 $c=2$ 观察 $I(2,b)$ 关于 b 的图像. 从图 1 能够发现, 固定 $b=1$ 时, $I(c,b)$ 关于 c 先增后减; 固定 $c=2$ 时, $I(c,b)$ 关于 b 在原点右侧递减, 在原点左侧递增. 改变 b 和 c 的取值, 当其处于合适范围内时, 这一单调性的结论仍然成立.

2.5 正态分布情形下假设检验

本文所提到的市场不确定性大小由参考模型与真实模型间差异的大小决定. 考虑对两组样本是否服从同一分布或单样本是否服从特定总体的显著性水平为 α 的假设检验, 有拒绝区域 $R=\{d_{\text{new}}>d_0\}$. 在使用正态参考模型的情形下, 若参考模型和真实模型间的新度量大小超过事先选定的临界值 d_0, 则将拒绝真实模型是特定正态参考模型的假设. 这表明参考模型和真实模型间出现较大的偏离, 因此这样的 d_0 就可以作为衡量市场不确定性程度的临界值.

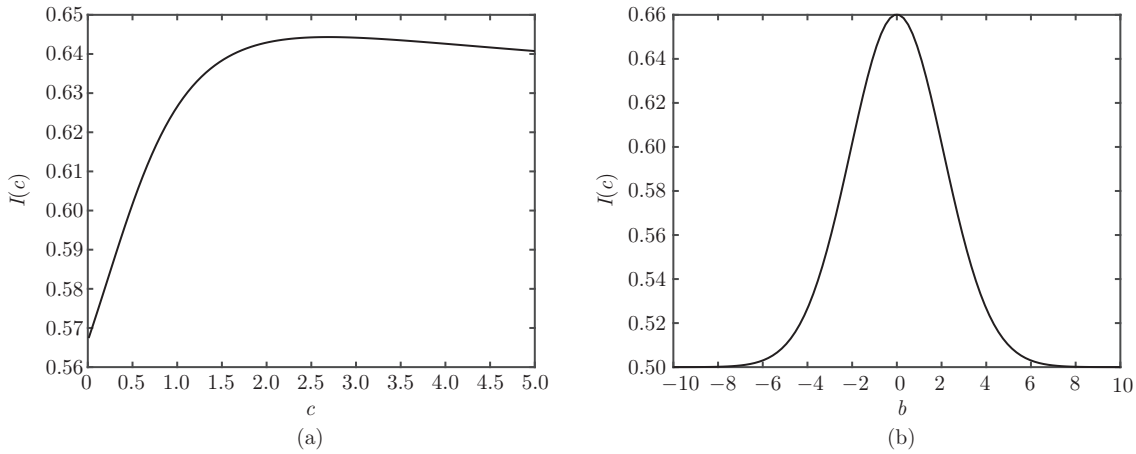

图 1　I 关于 b 和 c 的单调性. (a) $b=1$ 时 I 关于 c 的图像; (b) $c=2$ 时 I 关于 b 的图像

由于正态分布的常见性, 将针对正态分布下的假设检验考虑以下 4 种情形: 双样本均值相同时对方差的检验, 双样本方差相同时对均值的检验, 双样本对均值和方差同时进行检验, 单个正态样本是否来自特定正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的检验.

假设样本 $X=\{X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}\}$ 来自总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, 样本 $Y=\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2}\}$ 来自总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 特定的正态总体为 $N(\mu,\sigma^2)$. 以下给出所需估计量:

$$\begin{cases}\text{样本均值: } \bar{X}=\dfrac{1}{n_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}X_i, \quad \bar{Y}=\dfrac{1}{n_2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_2}Y_i,\\ \text{样本方差: } S_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2, \quad S_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2.\end{cases} \tag{2.10}$$

在下面讨论中, $F_\alpha(n,m)$ 代表 $F(n,m)$ 分布的下 α 分位数, $t_\alpha(n)$ 代表 $t(n)$ 分布的下 α 分位数, u_α 代表 $N(0,1)$ 分布的下 α 分位数, $\chi_\alpha^2(n)$ 代表 $\chi^2(n)$ 分布的下 α 分位数.

(1) 当 $\mu_1=\mu_2=\mu$ 时, 检验 $H_0:\sigma_1=\sigma_2, H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$.

当正态分布均值相同时, I 的取值由 (2.8) 决定. 使用样本方差 S_1^2 和 S_2^2 作为 σ_1^2 和 σ_2^2 的估计, 使用下式计算两个样本间新度量:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\frac{S_1}{S_2}t\right)+\Phi\left(\frac{S_2}{S_1}t\right)\right]dt. \tag{2.11}$$

熟知 $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$. 故在原假设成立时, $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$.

对水平 α, 计算出 $(\frac{S_1}{S_2})_m=\sqrt{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}$ 和 $(\frac{S_1}{S_2})_M=\sqrt{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}$. 令

$$\begin{aligned}I_0=\min\Bigg\{&\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_m t\right)+\Phi\left(t\Big/\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_m\right)\right]dt,\\ &\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_M t\right)+\Phi\left(t\Big/\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_M\right)\right]dt\Bigg\},\end{aligned} \tag{2.12}$$

以及 $d_0=\sqrt{\frac{4}{3}-2I_0}$ 和拒绝域 $R=\{d_{\text{new}}>d_0\}$.

由 $I(c)$ 关于 c 的单调性知 $\mathbb{P}_{H_0}(d_{\text{new}}>d_0)\leqslant\alpha$. 特别地, 当 $n_1=n_2$ 时, 由 F 分布的对称性知 $(\frac{S_1}{S_2})_m(\frac{S_1}{S_2})_M=1$, 故 $\mathbb{P}_{H_0}(d_{\text{new}}>d_0)=\alpha$. 这说明利用上述方法进行的检验相比直接对 $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 进行 F 检验要更加保守, 更不容易拒绝原假设.

(2) 当 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 时, 检验 $H_0:\mu_1=\mu_2, H_1:\mu_1\neq\mu_2$.

当正态分布方差相同时, I 的取值由 (2.9) 决定. 使用样本均值 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 作为 μ_1 和 μ_2 的估计; 由于方差相同, 故可使用加权样本方差 $S^2_{\text{pooled}}=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ 作为 σ^2 的估计. 使用下式计算两个样本间新度量:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(t+\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\text{pooled}}}\right)+\Phi\left(t-\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\text{pooled}}}\right)\right]dt. \tag{2.13}$$

熟知 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})\sigma^2)$, $\frac{(n_1+n_2-2)S^2_{\text{pooled}}}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n_1+n_2-2}$. 故当原假设成立时, 有

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\text{pooled}}}\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}}\sim t(n_1+n_2-2). \tag{2.14}$$

对水平 α, 计算出 $(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\text{pooled}}})_m=\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$. 令

$$I_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(t+\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\text{pooled}}}\right)_m\right)+\Phi\left(t-\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\text{pooled}}}\right)_m\right)\right]dt \tag{2.15}$$

以及 $d_0=\sqrt{\frac{4}{3}-2I_0}$ 和拒绝区域 $R=\{d_{\text{new}}>d_0\}$.

由 $I(b)$ 关于 b 的单调性知 $\mathbb{P}_{H_0}(d_{\text{new}}>d_0)=\alpha$, 这说明这样的检验与直接对 $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\text{pooled}}}$ 进行 t 检验具有相同的功效.

(3) 检验 $H_0:\mu_1=\mu_2,\sigma_1=\sigma_2, H_1:\mu_1\neq\mu_2$ 或 $\sigma_1\neq\sigma_2$.

在一般的正态分布假设下, I 的取值由 (2.7) 决定. 事实上还可以将其改写为

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}t+\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\Phi\left(\frac{1}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}\left(t-\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)\right]dt.$$

使用样本均值 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 作为 μ_1 和 μ_2 的估计, 使用样本方差 S_2^2 作为 σ_2^2 的估计. 使用下式计算两个样本间新度量:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\frac{S_1}{S_2}t+\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_2}\right)+\Phi\left(\frac{S_2}{S_1}\left(t-\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_2}\right)\right)\right]dt. \tag{2.16}$$

熟知 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{1}{n_1}\sigma_1^2+\frac{1}{n_2}\sigma_2^2)$, $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2_{n_2-1}$, $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$. 当原假设成立时, 有

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_2}\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}}\sim t(n_2-1)\quad\text{以及}\quad\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1). \tag{2.17}$$

对水平 α, 计算出

$$\begin{aligned}&\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_m=\sqrt{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\\&\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_M=\sqrt{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\\&\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_2}\right)_m=\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1).\end{aligned}$$

令

$$I_1=\min\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_m t+\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_2}\right)_m\right)+\Phi\left(\left(t-\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_2}\right)_m\right)\Big/\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_m\right)\right]dt,\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_M t+\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_2}\right)_m\right)+\Phi\left(\left(t-\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_2}\right)_m\right)\Big/\left(\frac{S_1}{S_2}\right)_M\right)\right]dt\right\}. \quad (2.18)$$

完全类似地, 可把距离表达式中的 $\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_2}$ 对称地更改为 $\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_1}$, 重新进行估计. 令

$$I_2=\min\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\left(\frac{S_2}{S_1}\right)_m t-\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_1}\right)_m\right)+\Phi\left(\left(t+\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_1}\right)_m\right)\Big/\left(\frac{S_2}{S_1}\right)_m\right)\right]dt,\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\left(\frac{S_2}{S_1}\right)_M t-\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_1}\right)_m\right)+\Phi\left(\left(t+\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_1}\right)_m\right)\Big/\left(\frac{S_2}{S_1}\right)_M\right)\right]dt\right\}. \quad (2.19)$$

最后令 $I_0=\min\{I_1,I_2\}$ 以及 $d_0=\sqrt{\frac{4}{3}-2I_0}$ 和拒绝区域 $R=\{d_{\text{new}}>d_0\}$.

由于检验中涉及 3 个统计量, 故由 Bonferroni 不等式和上一节中对于 $I(c,b)$ 单调性的猜测, 得到的显著性水平应为 3α. 实际上, 由于这 3 个统计量相互不独立, 而且检验过程涉及了很多取最大值的计算, 所以这一检验相较于分别检验这 3 个统计量而言是非常保守的, 更不容易拒绝原假设.

(4) 检验 $H_0:\mu_1=\mu,\sigma_1=\sigma$, $H_1:\mu_1\neq\mu$ 或 $\sigma_1\neq\sigma$.

检验单样本是否来自特定总体的方法类似于上一种检验在 n_2 趋向于 ∞ 时的情形. 在原假设下, I 由下式决定:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}t+\frac{\mu_1-\mu}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{1}{\frac{\sigma_1}{\sigma}}\left(t-\frac{\mu_1-\mu}{\sigma}\right)\right)\right]dt.$$

使用样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S_1^2 作为 μ_1 和 σ_1^2 的估计, 使用下式计算两个样本间新度量:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\frac{S_1}{\sigma}t+\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\sigma}{S_1}\left(t-\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)\right)\right]dt. \quad (2.20)$$

当原假设成立时, 有 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sim N(0,\frac{1}{n_1})$, $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n_1-1}$.

对水平 α, 计算出 $(\frac{S_1}{\sigma})_m=\sqrt{\frac{1}{n_1-1}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1)}$ 和 $(\frac{S_1}{\sigma})_M=\sqrt{\frac{1}{n_1-1}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1)}$, $(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma})_m=\sqrt{\frac{1}{n_1}}u_{\frac{\alpha}{2}}$. 令

$$I_0=\min\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\left(\frac{S_1}{\sigma}\right)_m t+\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)_m\right)+\Phi\left(\left(t-\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)_m\right)\Big/\left(\frac{S_1}{\sigma}\right)_m\right)\right]dt,\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)\phi(t)\left[\Phi\left(\left(\frac{S_1}{\sigma}\right)_M t+\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)_m\right)+\Phi\left(\left(t-\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)_m\right)\Big/\left(\frac{S_1}{\sigma}\right)_M\right)\right]dt\right\}. \quad (2.21)$$

最后令 $d_0=\sqrt{\frac{4}{3}-2I_0}$ 和拒绝区域 $R=\{d_{\text{new}}>d_0\}$.

由于检验中涉及两个统计量, 故由 Bonferroni 不等式和上一节中对于 $I(c,b)$ 单调性的猜测, 得到的显著性水平应为 2α. 实际上, 检验过程涉及了很多取最大值的计算, 所以这一检验过程相较于分别检验这两个统计量而言是较为保守的, 不容易拒绝原假设.

由于后文应用研究中涉及检验一个样本容量为 250 的样本是否来自某一正态分布, 所以取 $n_1=250$, 表 1 给出不同显著性水平下的临界值.

表 1 $n_1 = 250$ 时各显著性水平下临界值

显著性水平	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001	0.0001
临界值	0.0354	0.0424	0.0487	0.0563	0.0616	0.0774	0.0910

上述 4 部分阐述了如何通过一些常见的统计量得到新度量临界值的方法. 值得注意的是, 当检验单样本是否来自某个正态总体时, 上述使用 Bonferroni 不等式构建的检验方法非常保守, 意味着犯第一类错误的可能性很低. 因此在实际应用中, 若发现计算出的新度量取值拒绝了原假设, 则说明参考模型和真实模型间存在非常大的差距, 真实模型是参考模型的可能性很低.

3 概率度量方法在金融经济学中的应用

Fu 等[2)] 将 Hellinger 度量运用于金融市场, 给出了数值预警机制, 用于预测金融市场的大跌. 本节研究新度量在金融经济学中的应用, 并比较它与 Hellinger 度量、Kolmogorov 度量和 Wasserstein 度量在金融应用中的差别.

3.1 数据来源与计算方法

本文选取的数据如下:

(1) 美国标准普尔 500 指数: 2006 年 1 月 4 日至 2020 年 4 月 30 日期间所有交易日 (共 3,604 日) 的收盘数据 P_t;

(2) 芝加哥期权交易所波动率指数 (volatility index, VIX): 2007 年 1 月 3 日至 2020 年 4 月 30 日期间所有交易日 (共 3,354 日) 的收盘数据 VIX_t.

使用 3,604 天的美国标准普尔 500 收盘数据 P_t, 计算出每一日的收益率 $r_t = \ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})$. 由于时间较短, 所以不再考虑时间折现带来的影响.

本文将每 250 天的数据作为一个窗口, 对美国标准普尔 500 指数在 2007 年 1 月 3 日至 2020 年 4 月 30 日期间每一个交易日, 选取这一日及之前 249 天的日收益率数据形成一个经验分布集 (empirical distribution), 也即真实表现模型. 同时计算出这 250 天数据的均值 μ_t 和标准差 σ_t, 在股票价格变动服从几何 Brown 运动的假设下, 构造出正态分布 $N(\mu_t, \sigma_t^2)$ 作为参考模型.

由于本文选取的部分度量方法涉及概率密度函数的存在性, 因此对于每一个经验分布集, 需要对此离散数据进行连续化处理. 本文采用核密度估计方法 (kernel density estimation), 对于离散数据集 $\{x_i, i = 1, \ldots, n\}$, 定义下列密度函数作为其连续分布的密度函数:

$$\widehat{f}_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - x_i) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

上述 $K(x)$ 为满足一定条件的核函数 (kernel function), h 为估计的带宽 (bandwidth). 为方便起见, 选取核函数为标准正态分布的概率密度函数. 为了极小化估计的均方误差, 这种核密度估计的最优带宽选择可以由下述估计确定 (参见文献 [22]):

$$h = \left(\frac{4\hat{\sigma}^5}{3n}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1.06\hat{\sigma}n^{-1/5}.$$

2) Fu Z C, Lu T, Zhang L H, et al. The next stock market crash: Market ambiguity since 1986. Working Paper, 2020

对于连续化后的经验分布集和参考模型, 本文分别采用新度量、Hellinger 度量、Kolmogorov 度量和 Wasserstein 度量计算两个模型间的异同, 以此测量美国股票市场在当个交易日 t 的市场不确定性.

3.2 使用新度量计算的市场不确定性

将波动率定义为经验分布数据集的标准差, 依照上面的程序利用新度量计算出美国标准普尔 500 指数在 2007–2020 年间的市场不确定性和相关数据. 其中市场不确定性和波动率的变化趋势如图 2 所示, 表 2 则展示了部分统计数据.

为了便于比较, 图 2 对年化波动率和收益率进行了一定比例的放缩, 下同. 从图 2 和表 2 中可以总结出不确定性趋势变化的部分特征.

(1) 使用新度量计算出的美国股票市场不确定性不是一条平缓且平滑的曲线, 震荡幅度较波动率曲线 (紫线) 要更大;

(2) 在日收益率剧烈震荡的阶段, 也即波动率出现明显上升时, 市场不确定性也会经历快速的上升, 形成一个波峰;

(3) 市场不确定性经历快速上升的次数相较波动率要更多, 在部分快速上升时期, 波动率的上升幅

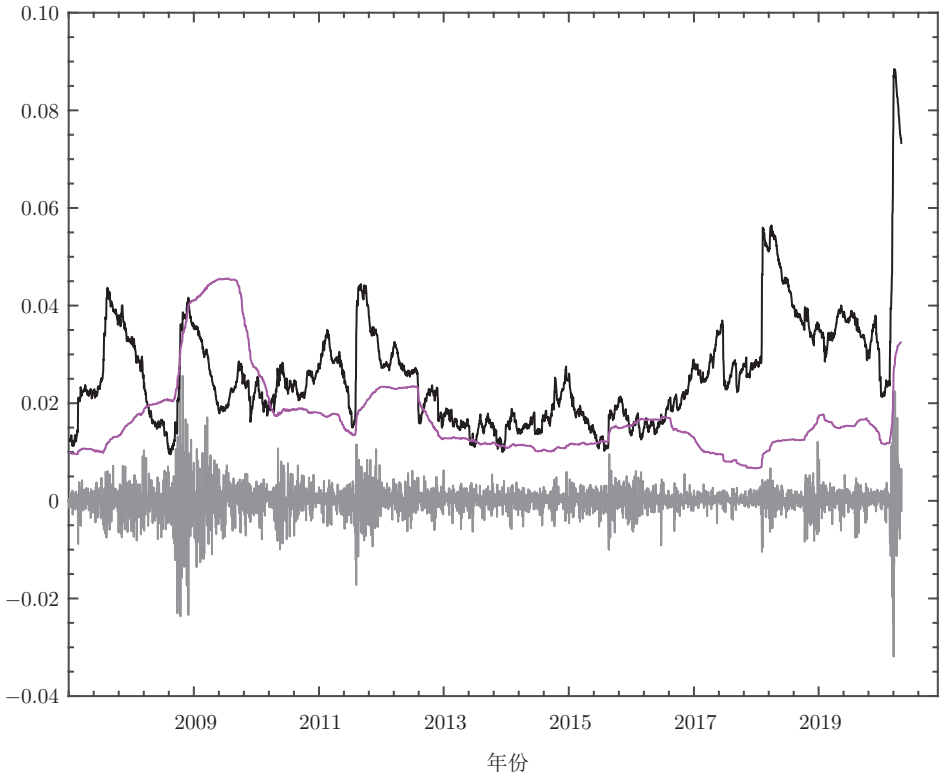

图 2 由新度量计算出的美国股票市场不确定性与波动率 (2007–2020 年). 黑线: 不确定性; 紫线: 波动率 (年化%)/1,000; 灰线: 收益率 (年化)/1,000

表 2 使用新度量计算市场不确定性的部分统计数据

平均不确定性	平均 VIX	平均波动率 (年化%)
0.0257	19.62	17.39

度并不大. 例如, 在 2007 年年中至 2008 年年初, 市场不确定性经历了一个明显的波峰, 顶点不确定性为 0.043, 接近历史平均值的两倍, 而波动率在同时期 80% 以上的时间内都低于历史平均水平, 这表明收益率变化较稳定的时期也可能会出现较高的市场不确定性.

市场指数的波动率常被用来描述市场风险, 因此上述结果表明市场风险与市场不确定性通过历史数据捕捉到的信息是不完全一致的. 本文得到的市场不确定性指标对市场风险急剧增大的历史阶段同样敏感, 同时比常用的波动率指标能捕捉到更多信息.

除了波动率指标, VIX 也是一项金融市场上的常用指标. VIX 计算的是指数期权的隐含波动率, 因此 VIX 可以反映投资者对于市场未来不确定性的预期. 不妨将不确定性指标与 VIX 的变化趋势进行对比, 如图 3 所示.

从图 3 和表 2 中, 可以得到以下结论:

(1) 当 VIX 达到短时期内顶点时, 会较快地回落至平均水平. 然而市场不确定性指标在达到波峰后却需要较漫长的时间才能回到历史平均水平. 正因为上述现象, VIX 的变化趋势不会出现明显的波谷特征, 而市场不确定性指标有时会在波峰间形成尖锐的波谷.

(2) 与波动率指标相仿, 每当 VIX 经历快速上升的阶段, 市场不确定性同样也会快速上升, 而市场不确定性能捕捉到 VIX 未能捕捉到的信息. 在 2018–2019 年间, 虽然 VIX 出现了两次小规模的快速上升, 但整体上仍处于历史平均水平. 但在同时期, 市场的平均不确定性达到了 0.0383, 每一日的不确定性大小均超过历史平均水平 0.0257, 最高值超过了历史平均水平的 2 倍, 相较 2015–2017 年间不确定性水平有了较大程度的升高, 形成了显著的波峰形状. 这说明此期间内 VIX 未能反映出市场上的不

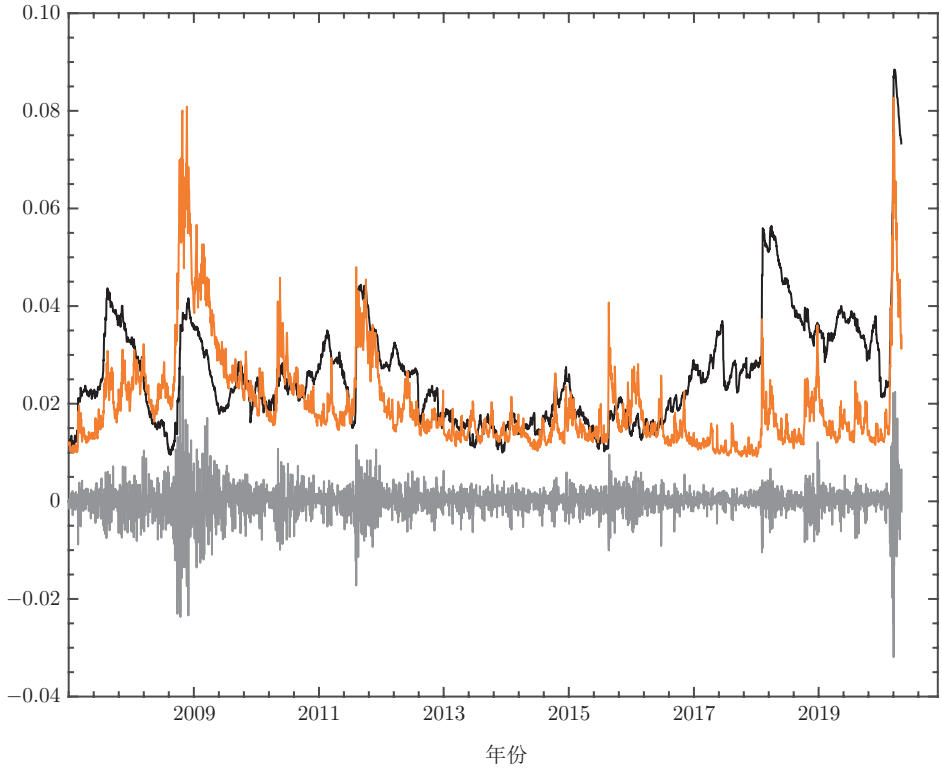

图 3 由新度量计算出的美国股票市场不确定性与 VIX (2007–2020 年). 黑线: 不确定性; 橙线: VIX/1,000; 灰线: 收益率 (年化)/1,000

确定性.

(3) 在每一次日收益率大幅震荡时期的附近, VIX 只能观察到由股灾引起的一个波峰, 而不确定性指标则可以观察到股灾前后的双波峰特征. 因此不确定性指标先行于 VIX, 具有预警作用.

通过上面的分析, 可以认识到本文得到的市场不确定性指标可能包含比波动率和 VIX 更丰富的信息. 在波动率和 VIX 并没有显著高过历史平均水平的时期中, 市场不确定性有时却远超历史平均水平, 显示出前两种指标未能反映出市场不确定性. 以下分时期来具体分析市场不确定性的变化趋势, 并解释其成因.

在 2007–2020 年间, 美国股票市场一共出现 3 次较大的大跌. 第一次是 2008 年的金融危机, 以 2008 年 9 月 15 日雷曼兄弟申请破产保护作为高点; 第二次是 2011 年 8 月 8 日的黑色星期一; 第三次则是 2020 年新型冠状病毒疫情 (简称新冠疫情) 和沙特下调油价引发的美股多次熔断. 在 2007–2009、2010–2012 和 2017–2020 年这 3 个时间段内, 从图 4 能够观察到新度量计算出不确定性的部分特征.

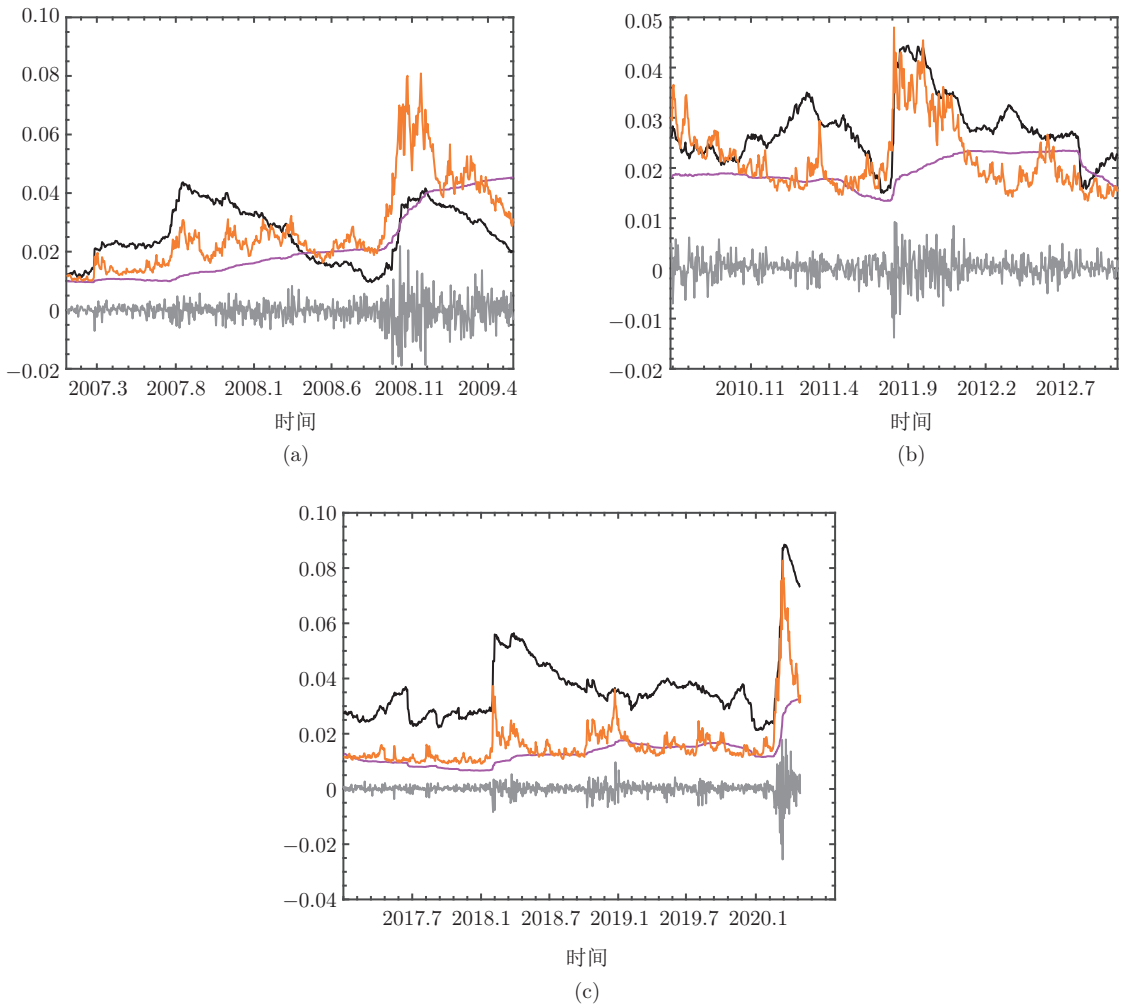

图 4 由新度量计算出的美国股票市场不确定性 (2007–2009、2010–2012 和 2017–2020 年). 黑线: 不确定性; 橙线: VIX/1,000; 紫线: 波动率 (年化%)/1,000; 灰线: 收益率 (年化)/1,000. (a) 2007–2009 年; (b) 2010–2012 年; (c) 2017–2020 年

在上述 3 个市场指数暴跌阶段附近, 与 VIX 只经历暴跌期间一个波峰不同, 不确定性指标都各自经历了两个波峰和一个波谷. 为了方便起见, 本文称上述两个波峰为首波峰和次波峰. 在 2008 年金融危机中, 不仅看到 2008 年底到 2009 年初的波峰, 还看到了处于 2007 年的首波峰. 在两个波峰之间不确定性经历了一个明显的波谷, 并且波谷时期没有在底部停留很长时间; 在 2011 年附近, 能够看到来自 2011 年初和 2011 年底的两个波峰以及波峰之间非常陡峭的一个波谷; 在 2017–2020 年附近, 市场在 2018 年和 2019 年经历了较为漫长的高不确定性阶段, 并在 2018 年上半年达到了首波峰, 而刚刚经过的 2020 年 3 月份则迎来了次波峰, 在两个波峰之间则是 2020 年年初一个非常短暂的波谷. 经过比较可以发现首波峰与次波峰的性质是不同的, 在首波峰处日收益率的波动相对不大, 出现极端涨幅或跌幅的情形较少, 例如, 2007 年的首波峰的平均波动率仅有 15.8%, 而 2008 年底的次波峰的平均波动率则达到了 37.9%. 不妨对三段时期分别进行具体分析.

2007 年 4 月 2 日美国第二大次级抵押贷款公司新世纪金融申请破产保护, 2007 年 8 月 6 日美国住宅抵押贷款投资公司申请破产保护. 与之相呼应, 不确定性首波峰从 2007 年 7 月初开始激增, 并且在 2007 年 8 月 15 日达到顶点. 在整整一年后, 2008 年 9 月 15 日雷曼兄弟公司宣布申请破产保护, 2008 年金融危机彻底爆发, 不确定性也在当年 12 月 1 日达到顶峰.

2011 年的黑色星期一源自当月的美国债务上限危机爆发, 2011 年 8 月 5 日美国标准普尔 500 指数宣布下调美国 AAA 主权信用评级至 AA+, 此后不确定性次波峰在 8 月 31 日达到顶点. 但当年 2 月的不确定性首波峰已经预示着经济环境的恶化. 事实上, 在 2011 年 2 月初, 随着利比亚政局动荡的逐步升级及大幅上涨的油价和多项疲软的房地产数据, 美股在 2 月中旬便遭遇下跌, 首波峰也在 2 月 18 日达到顶点.

2020 年新冠疫情的暴发使得美股暴跌和不确定性增加能被很多人预料到, 但美股熔断次数之多和不确定性上升幅度之大不仅仅是疫情的作用结果, 其与此前爆发的中美贸易战有直接的关联. 在 2018 年的 2 月至 3 月间, 不确定性经历了此时期内的首波峰, 增长幅度超过 100%. 事实上, 在 2017 年下半年, 中美便已进行了多次高层间贸易谈判, 美国更是在 2018 年 3 月 8 日和 22 日分别宣布将对进口钢铁及铝产品征收高关税和对从中国进口商品征收高关税. 中美贸易争端加剧了此时期内美国股市的波动, 更造成市场不确定性的首波峰. 由于中美贸易战一直未能得到有效化解, 因此可以观察到在 2018–2019 年间市场不确定性一直处于历史高位, 而这是 VIX 没有捕捉到的信息.

根据上面的具体分析, 本文认为市场不确定性的双波峰特征来源于市场自身短暂而不够彻底的修复. 在首波峰处, 尽管 VIX 和波动率上升幅度不大或处于高位时间较短, 但是市场不确定性却达到局部顶点和历史高位, 并且可以在高位延续较长时间, 这意味着此时的市场已经积累了一部分问题. 短期内政府的调控和市场情绪的稳定使得市场不确定性开始下降, 但并没有完全修复市场, 市场中遗存的不确定性被延后到了第二个波峰处, 在特定事件的刺激下彻底释放. 在三次股灾前后, 从首波峰到波谷的降幅分别为 76.7%、54.3% 和 62.5%, 市场在波谷的底部停留的时间非常短暂, 并在股灾真正到来之前不确定性就会从波谷开始回升. 这样的现象就提示投资者可以将市场不确定性自上一个波峰顶点下降超过 50% 后快速回升的现象作为市场上一个负面的信号. 这些发现与 Fu 等[2)] 使用 Hellinger 度量得到的结果是一致的.

同时, 选择显著性水平 $\alpha = 0.05$ 并使用 Kolmogorov-Smirnov 检验来检验真实模型的正态性, 则该非参数检验在 61% 的时间里都会拒绝真实模型来自特定正态分布的假设. 而根据第 2.5 小节中新度量在正态分布情形下假设检验的相关结论, 我们构建的检验方法是一个很保守的参数检验, 因此其具有较好的预警作用. 显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下新度量对应的临界值为 0.0487, 结果表明仅有不到 4% 的时间里不确定性超过了临界值. 在这一时期内, 即使该检验非常不容易拒绝原假设, 真实模型与参考

模型间巨大的差异仍然能拒绝真实模型是特定正态分布的假设, 这意味着市场里有很大的可能性出现异常, 因此可被视为一种预警.

3.3 4 种度量方法的比较

由于已经对经验分布集进行了核密度估计, 因此可以采取与新度量完全相同的计算办法, 得到分别由 Hellinger 度量、Kolmogorov 度量和 Wasserstein 度量计算出的市场不确定性大小. 为了更好地比较 4 种度量计算出的不确定性大小的变化趋势, 定义 4 种度量计算结果的归一化: 每一天 t 的结果除以这段时期 T 内的最大值. 因此可以得到在 2007–2020 年间 4 种度量方法的归一化计算结果 (如图 5 所示).

从图 5 中可以观察到在归一化后, 4 种度量方法的趋势共同性非常明显, 有以下结论:

(1) 4 种度量计算出的不确定性变化趋势相似程度较高, 都显示出双波峰特征. 事实上, 四者在达到波峰顶点的时间上几乎完全一致, 如在 2008 年 12 月 31 日四者同时达到次波峰的顶点.

(2) Kolmogorov 度量和新度量在归一化后整体趋势相似程度非常高, 部分区域甚至完全重合在一起. 造成这个现象的一个可能原因在于新度量和 Kolmogorov 度量都是直接计算两个分布函数的差异, 前者是一种加权平均, 后者是以最大值代表差异. 对经验分布集做核密度估计时已对数据极端值做了平滑化处理, 所以计算 Kolmogorov 度量不易受到极端值影响, 在分布函数较为平滑并且接近正态分布的情形下新度量和 Kolmogorov 度量的计算结果在趋势上会比较接近.

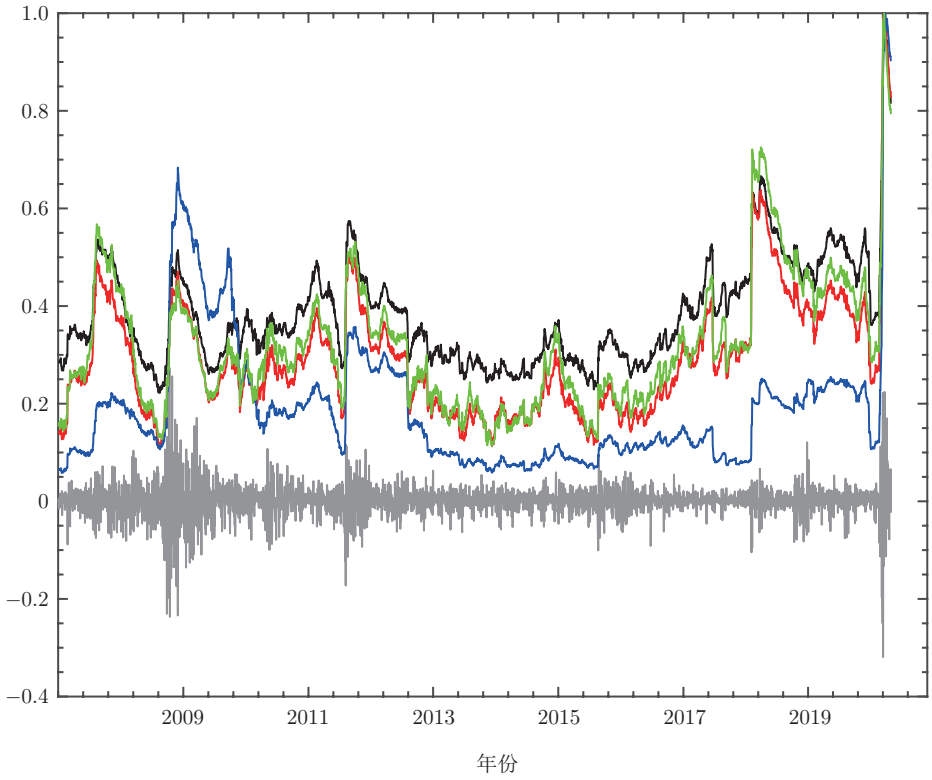

图 5 美国股票市场不确定性 (4 种度量归一化后的结果, 2007–2020 年). 黑线: Hellinger; 红线: New; 蓝线: Wasserstein; 绿线: Kolmogorov; 灰线: 收益率 (年化)/100

(3) Wasserstein 度量的变化趋势与另外三者存在一定不同. 在 2008 年金融危机时, 它的上升幅度要比另外 3 种度量高出很多. 但在 2013 年之后, 归一化后的 Wasserstein 度量计算出的不确定性大小显著低于其他 3 种度量结果, 震荡幅度也比其他 3 种度量相对要更小. 同时, 它在 2018 年附近漫长的 "高原" 状态 (长期高不确定性) 也与其他 3 种度量明显的波峰状态有所不同. 这样两极化的结果源于 Wasserstein 度量的无界性, 导致其更容易出现极端值, 同时这一现象也表明 Wasserstein 度量对于股灾来临后的敏感度很高, 但是对于首波峰的敏感度相较次波峰而言差距较大.

(4) 归一化后的 Hellinger 度量在大部分时间内都比其他 3 种度量方法得到的不确定性指标要更大, 尤其是在 2011–2018 年间. 在遇到股灾时, 它上升的幅度却是 4 种度量方法中较小的.

通过上述分析, 可以发现有界度量方法的结果会比如 Wasserstein 度量这样的无界度量方法更加稳定, 不容易出现极端值. 同时以分布函数定义的度量方法与以密度函数定义的度量方法趋势相近, 而前者的计算不需要存在或已知密度函数, 适用面更广. 因此新度量和 Kolmogorov 度量在计算市场不确定性指标上既能保证稳定性, 又具备更高适应性. 而在二者的比较中, 如果不使用核密度估计做平滑化, 则 Kolmogorov 度量的结果相较新度量更易受到极端值影响, 此时新度量将是更优的选择.

3.4 其他市场结果

使用与对美国股票市场相同的计算办法, 本文计算了中国内地股市、中国香港股市、日本股市和德国股市的市场不确定性. 其中选取的市场数据如下:

(1) 中国内地股市 (上证指数 SSEC): 2001 年 1 月 2 日至 2020 年 4 月 30 日的所有交易日收盘价;

(2) 中国香港股市 (恒生指数 HSI): 2001 年 1 月 2 日至 2020 年 4 月 29 日的所有交易日收盘价;

(3) 日本股市 (日经 225 指数 N225): 2001 年 1 月 5 日至 2020 年 4 月 30 日的所有交易日收盘价;

(4) 德国股市 (DAX30 指数): 2001 年 1 月 3 日至 2020 年 4 月 30 日的所有交易日收盘价.

实际计算得到的是 4 个国家或地区的市场在 2002–2020 年的市场不确定性大小, 归一化后结果如图 6 所示, 归一化前的部分统计数据如表 3 所示.

从图 6 和表 3 中可以得到以下结论:

(1) 在 2002–2020 年期间, 中国内地市场的平均日收益率最低并且波动程度最大, 而中国香港市场和德国市场平均日收益率最高并且波动程度最小.

(2) 无论使用哪一种度量来计算市场不确定性, 中国内地市场的平均市场不确定性都是四者中最高的, 而中国香港市场的平均市场不确定性则是四者中最低的.

(3) 中国香港市场、日本市场和德国市场的市场不确定性都在 2007–2008 年中出现了双波峰特征, 与美国股票市场不确定性的结论相符. 同时期上证指数在漫长的震荡中暴跌, 但市场不确定性却在 2008 年初达到首波峰的顶点后开始下降, 直到 2010 年才出现次波峰, 这是中国内地股市不确定性所独有的特征. 事实上, 这一独特特征与中国采取四万亿经济刺激并在 2010 年快速收回市场流动性的时间是一致的. 在 2020 年新冠疫情造成的股市动荡中, 中国香港、日本、德国和美国市场都出现了不确定性的剧烈增长, 以新度量及 Kolmogorov 度量和 Hellinger 度量计算出的市场不确定性均创造了历史新高. 然而同时期中国内地市场虽然也遭遇了下跌和市场不确定性的增大, 但市场不确定性的增长幅度远不如其他国家或地区, 并未超过 2008 和 2016 年的两次历史高位. 这一现象说明中国内地市场不确定性的变化规律受全球化影响较少, 其主要取决于国内市场监管政策和国内市场环境的变化. 而港股由于其金融体系与美国等发达国家市场联系更紧密, 其不确定性变化趋势也就更加相似.

(4) 4 个国家或地区归一化后的变化趋势进一步验证了第 3.3 小节的结论: Hellinger 度量在大多数时间内都能得到最高的市场不确定性, 而 Wasserstein 度量则得到最低的市场不确定性; Kolmogorov 度量和新度量在整体趋势上非常相似; Wasserstein 度量对于股灾发生后的次波峰较为敏感, 容易从较低的水平上升到一个很高的水平 (如 2008 年金融危机), 这与它的无界性有紧密联系.

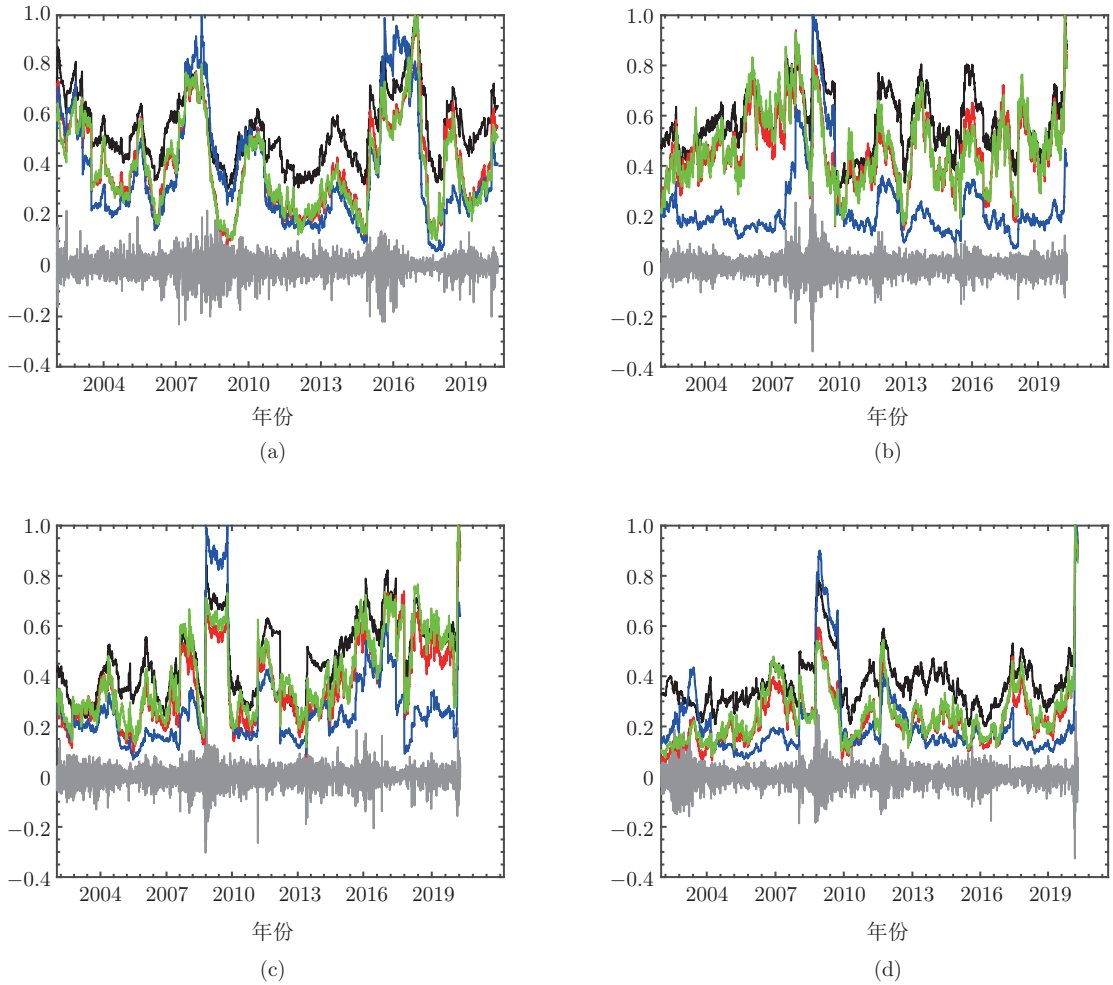

图 6 中国内地、中国香港、日本和德国的市场不确定性 (4 种度量归一化后的结果, 2002–2020 年). 黑线: Hellinger 度量; 红线: 新度量; 蓝线: Wasserstein 度量; 绿线: Kolmogorov 度量; 灰线: 收益率 (年化)/100. (a) 中国内地; (b) 中国香港; (c) 日本; (d) 德国

表 3 4 个国家或地区市场不确定性大小的平均数据 (未归一化)

	平均收益率 (年化%)	平均波动率 (年化%)	平均不确定性			
			Hellinger	Kolmogorov	新度量	Wasserstein
中国内地	1.65	23.6	0.0927	0.0415	0.0236	0.0015
中国香港	2.75	20.6	0.0719	0.0271	0.0153	0.0009
日本	1.98	22.1	0.0770	0.0315	0.0184	0.0012
德国	2.75	21.3	0.0758	0.0292	0.0167	0.0010

4 结论

为了进一步研究模型不确定性下的决策问题和资产定价问题, 本文研究不确定性度量方法及其在金融市场中应用:

(1) 在总结一些常用概率测度间差异性度量方法的性质和控制关系的基础上, 提出了一种新的度量方法. 该度量方法简洁易算, 对概率测度的形式没有限制, 具有非参数化方法的优点;

(2) 将 4 种度量方法: 新度量、Hellinger 度量、Kolmogorov 度量和 Wasserstein 度量应用于标准普尔 500 指数、上证指数、恒生指数、日经 225 指数和 DAX30 指数, 计算出相应的市场不确定性并对其现象做了分析和解释.

在具体应用中, 观察到市场不确定性指标比 VIX 具有更好的前瞻性, 更能显示市场负面信号: 在市场经历收益率快速下滑的时间段, 我们的不确定性指标能够显示两个明显的波峰和一个陡峭的波谷, 而 VIX 只经历快速单调增长, 没有明显的双波峰特征. 根据实证结果发现, 如果能观察到市场不确定性从上一个波峰回落超过 50% 之后迅速反弹并且出现陡峭的波谷时, 则很有可能发生股灾.

上述特征能直接体现在 2018 年中美贸易战带来的影响中. 2018 年 3 月, 美国对中国部分商品增加巨额关税, 造成中美贸易战的爆发. 这造成了 2018 年上半年第一个不确定性波峰的到来, 以及之后一直居高不下的市场不确定性. 这一影响延续到了 2020 年 3 月, 并在新冠疫情激化下彻底爆发. 虽然 VIX 在 2018–2019 年间经历过快速上升和下降, 但是其在大多数时间内都保持在相对较低的位置, 没能直接反映中美贸易战给市场环境带来的恶化.

本文还对比了通过归一化后的 4 种度量方法计算出的不确定性大小, 发现新度量、Hellinger 度量和 Kolmogorov 度量的趋势非常相似, 其中新度量和 Kolmogorov 度量的趋势极为相似, 甚至出现部分重合, 这是源于核密度估计已对极端值做了平滑化处理. 同时 Wasserstein 度量的变化趋势与前三者有所不同, 在大部分时间内处于较低的水平, 但因其无界性, 在股灾发生时对次波峰敏感度较高. 对四者结果做综合分析后, 本文认为新度量是计算市场不确定性指标的最优选择.

在中国内地、中国香港、德国和日本市场中, 本文也发现了类似的特征. 其中中国香港、德国和日本市场的不确定性指标在 2008 和 2020 年附近都出现了相同的双波峰特征, 与美国股票市场的结果相近, 但与中国出现的多次不确定性高峰时期不同. 这说明中国内地市场不确定性受到内部市场环境变化和政策监管的影响相对较大, 而如中国香港、德国和日本这类高度开放的金融市场, 其不确定性更易受到来自国际因素的影响.

致谢 非常感谢审稿人对本文提出的宝贵意见, 使本文更加严谨.

参考文献

1 Knight F H. Risk, Uncertainty and Profit. Boston: Houghton Mifflin, 1921
2 Ellsberg D. Risk, ambiguity, and the savage axioms. Q J Econometrics, 1961, 75: 643–669
3 Savage L J. The Foundations of Statistics. New York: John Wiley & Sons, 1954
4 Reiss J A. The impact of expected return uncertainty on long horizon risk and allocation decisions. Analytical Synthesis Working Paper No. 2, available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=761104, 2006
5 Schmeidler D. Subjective probability and expected utility without additivity. Econometrica, 1989, 57: 571–587
6 Gilboa I, Schmeidler D. Maxmin expected utility with non-unique prior. J Math Econom, 1989, 18: 141–153
7 Klibanoff P, Marinacci M, Mukerji S. A smooth model of decision making under ambiguity. Econometrica, 2005, 73: 1849–1892
8 Epstein L G, Wang T. Intertemporal asset pricing under Knightian uncertainty. Econometrica, 1994, 62: 283–322
9 Chen Z J, Epstein L. Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time. Econometrica, 2002, 70: 1403–1443

10 Anderson E W, Hansen L P, Sargent T J. A quartet of semigroups for model specification, robustness, prices of risk, and model detection. J Eur Econ Assoc, 2003, 1: 68–123
11 Hansen L P, Sargent T J. Robust control and model uncertainty. Am Economic Rev, 2001, 91: 60–66
12 Liu Y, Wang H, Wang T, et al. Volatility ambiguity, consumption and asset prices. Working Paper, available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3521872, 2020
13 Merton R C. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. J Financial Economics, 1980, 8: 323–361
14 French K R, Schwert G W, Stambaugh R F. Expected stock returns and volatility. J Financial Economics, 1987, 19: 3–29
15 Mehra R, Prescott E C. The equity premium: A puzzle. J Monetary Economics, 1985, 15: 145–161
16 Welch I, Goyal A. A comprehensive look at the empirical performance of equity premium prediction. Rev Financ Stud, 2008, 21: 1455–1508
17 Brenner M, Izhakian Y. Asset pricing and ambiguity: Empirical evidence. J Financial Economics, 2018, 130: 503–531
18 Zolotarev V M. Probability metrics. Theory Probab Appl, 1984, 28: 278–302
19 Gibbs A L, Su F E. On choosing and bounding probability metrics. Internat Statist Rev, 2002, 70: 419–435
20 Anderson T W. On the distribution of the two-sample Cramer-von Mises criterion. Ann Math Statist, 1962, 33: 1148–1159
21 Darling D A. The Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises tests. Ann Math Statist, 1957, 28: 823–838
22 Silverman B W. Density Estimation for Statistics and Data Analysis. London: Chapman and Hall, 1986

A method of measuring the difference between probability models as uncertainty and its applications in financial economics

Lihong Zhang, Haisong Lin & Hao Wang

Abstract We develop a novel methodology to measure the difference between probability models. Unlike the parametric approach, this non-parametric approach can describe complex financial data without being limited to the uncertainty about specific moments or parameters. It can be applied to various probability distributions and is easy to use. For the special case of normal distributions, our method can be simplified to a parametric method which is less likely to make the type I error. Applying the technique to the S&P500 index, we find that our uncertainty measure displays a dual-peak feature and conveys distinct information to play a significant alarming role. The measure can also be applied to study the relationship between uncertainty and asset pricing.

Keywords **probability measure, Knightian uncertainty, ambiguity, finance, asset pricing**

MSC(2020) **62C99, 62F99, 62G99, 62P99, 91B02, 91B82**

doi: 10.1360/SSM-2020-0215