

4度1-正则图的一点注记

徐明曜

(北京大学数学研究所, 北京 100871)

摘要 一个图叫做1-正则的, 如果它的自同构群在它的弧集上作用正则. 给出了4度1-正则循环图的分类, 并且给出了 n 阶4度1-正则循环图的同构类的个数.

关键词 1-正则图 循环图 正规 Cayley 图

对于有限无向简单图 X , 用 $V(X)$, $E(X)$, $A(X)$ 和 $\text{Aut}(X)$ 分别表示它的顶点集合、边集合、弧集合和全自同构群. 如果 $\text{Aut}(X)$ 在 $V(X)$, $E(X)$ 或 $A(X)$ 上作用传递, 则 X 称为是点传递、边传递或弧传递的. 如果 $|\text{Aut}(X)| = |A(X)|$, 则弧传递图 X 叫做1-正则的. 显然, 1-正则图必连通.

给定群 G (写成加法形式)和它的一个满足 $S = -S$ 和 $0 \notin S$ 的生成子集 S . G 关于 S 的Cayley图 $\text{Cay}(G, S)$ 定义为具有顶点集合 G 和边集合 $\{\{g, s+g\} | g \in G, s \in S\}$ 的图. 循环群的Cayley图叫做循环图.

对于未加定义的群论概念, 可参看文献[1].

本文考虑小度数的1-正则图. 明显地, 2度1-正则图是圈, 因此, 最小度数的非平凡1-正则图是3度的. 第1个3度1-正则图的例子是由Frucht^[2]给出的. 其后, 在文献[3, 4]中又给出了若干新的例子. 有理由相信, 3度1-正则图是很稀少的. 至于4度1-正则图, 目前还很少被人研究. 就作者所知, 在文献上只能找到两个这类图的无限族. 它们是赵中云^[5]发现的素数 p 阶的4度1-正则循环图, 其中 $p \equiv 1 \pmod{4}$; 以及Marušič^[6]发现的交错群 A_n 的4度1-正则Cayley图. 因此, 4度1-正则图也应该是比较稀少的. 本文给出一种新的4度1-正则图的构造方法, 决定了所有4度1-正则的循环图, 这大大推广了赵中云的结果, 并且给出了一大批新的4度1-正则图.

首先给出关于Cayley图和循环图的进一步的概念和结果.

设 $X = \text{Cay}(G, S)$ 是 G 关于 S 的Cayley图, $R(G)$ 是 G 的右正则表示. 又设

$$\text{Aut}(G, S) = \{a \in \text{Aut}(G) \mid S^a = S\}.$$

明显地, $\text{Aut}(X) \geq R(G)\text{Aut}(G, S)$. 令 $A = \text{Aut}(X)$. 容易证明 $N_A(R(G)) = R(G)\text{Aut}(G, S)$, 因此有 $A = R(G)\text{Aut}(G, S)$ 和 $R(G) \trianglelefteq A$ 等价(见文献[7]). 如果 $R(G) \trianglelefteq A$, 则称Cayley图 $X = \text{Cay}(G, S)$ 是对于 G 正规的, 或称正规的. 这样, 对正规Cayley图 $\text{Cay}(G, S)$, 其全自同构群可被群 G 和子集 S 所完全决定, 不依赖于该图的性质.

对于小度数循环图的正规性, 有(见文献[8]推论2.3(2))

定理A 除了下述例外, 所有度数至多为4的循环图是正规的. 这些例外是: (i) $G = Z_4$, $X = K_4$; (ii) $G = Z_6$, $X = K_{3,3}$; (iii) $G = Z_5$, $X = K_5$; (iv) $G = Z_{2m}$, $X = C_m[2K_1]$ ($m \geq 3$); (v) $G = Z_{10}$, $X = K_2[5K_1] - 5K_2$.

下面的概念是关于群 G 的Cayley图的同构的. 群 G 的子集 S 称为CI-子集, 如果对 G 的任意子集 T , 只要 $\text{Cay}(G, T) \cong \text{Cay}(G, S)$, 就有 G 的自同构 a , 使得 $S^a = T$.

设 m 是正整数. 如果 G 的任意满足 $-S = S$ 的势至多为 m 的子集都是CI-子集, 则群 G 称

为 m -CI-群.

定理 B^[9] 任意有限循环群是 4-CI 群.

在叙述本文的主要结果之前, 需要下面的概念和引理:

设 H 是一个抽象群. 如果 G 的任意截断都不同构于 H (群 G 的截断是 G 的子群的商群), 则群 G 称为与 H 无关.

引理 1 设 $X = \text{Cay}(G, S)$ 是 G 关于 S 的正规 Cayley 图. 如果 $|S| = 3$ 且 $\text{Aut}(G)$ 与 S_3 无关, 或者 $|S| = 4$ 且 $\text{Aut}(G)$ 与 D_8 和 A_4 都无关, 则 X 是弧传递图当且仅当 X 是 1-正则图.

证 X 弧传递与 $A_0^{X_1(0)}$ 传递等价, 这里 $A = \text{Aut}(X)$ 且 A_0 是 0 在 A 中的稳定子群, $X_1(0)$ 是 0 在图 X 中的邻域. 因为对 3 度情形 A 与 S_3 无关, 而对 4 度情形 A 与 D_8 和 A_4 均无关, 所以必有 $A_0^{X_1(0)}$ 是正则的, 由此立得结论.

现在叙述本文的主要结果.

定理 1 (1) 不存在 3 度 1-正则循环图.

(2) 除下述例外, 所有连通 4 度弧传递循环图均为 1-正则的. 这些例外是:

(i) $X = \text{Cay}(Z_5, S) = K_5, S = \{1, 2, 3, 4\}$;

(ii) $X = \text{Cay}(Z_{10}, S) = K_2[5K_1] - 5K_2, S = \{1, 3, 7, 9\}$;

(iii) $X = \text{Cay}(Z_{2m}, S) = C_m[2K_1] (m \geq 3), S = \{1, m-1, m+1, 2m-1\}$.

证 (1) 设 $X = \text{Cay}(Z_n, S)$ 是 3 度 1-正则循环图, 则 S 必包含 2 阶元. 若 X 正规, 因 $\text{Aut}(Z_n, S)$ 在 S 上传递, S 中的 3 个元素均为 2 阶. 但因循环群 Z_n 只有 1 个 2 阶元, 这是不可能的. 若 X 不正规, 则由定理 1 有 $n = 4, X = K_4$, 或者 $n = 6, X = K_{3,3}$. 但这两个图都不是 1-正则的.

(2) 定理 A 中 (iii) ~ (v) 列出了仅有的非正规 4 度循环图, 它们皆弧传递, 但非 1-正则. 因此只需证明任意的正规连通 4 度弧传递循环图 $X = \text{Cay}(Z_n, S)$ 是 1-正则的即可. 因 $\text{Aut}(G)$ 是交换群, 由引理 1 立得结论. 证毕.

为决定弧传递的 4 度正规循环图, 设 $G = Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, 则 $\text{Aut}(G) = Z_n^*$, 即为 Z_n 中与 n 互素的元素的集合. Z_n^* 中元素在 Z_n 上的作用为右乘, 所有运算由模 n 进行.

定理 2 (1) 设 $X = \text{Cay}(Z_n, S)$ 是 4 度 1-正则循环图, 则 $S = sH$, 其中 $s \in Z_n^*$ 且 H 是 Z_n^* 的一个包含 -1 的 4 阶子群. 为排除定理 1 中列出的例外, 又有 $n \neq 5$ 或 10, 且若 $n = 4m$, 有 $H \neq \{1, 2m-1, 2m+1, 4m-1\}$. 并且有 $X \cong \text{Cay}(Z_n, H)$.

(2) 设 H_1 和 H_2 是 Z_n^* 的两个不同的包含 -1 的 4 阶子群, 则 $X_1 = \text{Cay}(Z_n, H_1)$ 和 $X_2 = \text{Cay}(Z_n, H_2)$ 不同构.

证 (1) 因 X 1-正则, 它必弧传递并且连通. 又因所有非正规的 4 度循环图均非 1-正则, X 必正规. 这样 S 包含 Z_n^* 中元素, 并且 $H := \text{Aut}(Z_n, S)$ 在 S 上传递, 于是 $SH = S$. 这推出 $S = sH$ 对某个 $s \in S$ 成立. 因为 $-S = S$, 有 $-1 \in H$. 进一步, 由 X 的 1-正则性, 定理 3 中列出的例外被排除. 最后, 显然有 $\text{Cay}(Z_n, sH) \cong \text{Cay}(Z_n, H)$.

(2) 由定理 2, 若 $X_1 \cong X_2$, 则存在 $t \in Z_n^*$, 使得 $tH_1 = H_2$. 这推出 $H_1 = H_2$.

下面的定理给出了 4 度 1-正则循环图的精确个数. 在叙述它之前, 首先注意: (1) 若 $(m, k) = 1$, 则 $\text{Aut}(Z_{mk}) \cong \text{Aut}(Z_m) \times \text{Aut}(Z_k)$; (2) $\text{Aut}(Z_2) = 1$, $\text{Aut}(Z_4) \cong Z_2$, 并且对 $a \geq 3$ 有 $\text{Aut}(Z_{2^a}) \cong Z_2 \times$

$Z_{2^{a-2}}$; (3) 对奇素数 p 和 $\alpha \geq 1$, 有 $\text{Aut}(Z_{p^\alpha}) \cong Z_{(p-1)p^{\alpha-1}}$.

定理 3 设 $n = 2^{a_0} p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} p_{s+1}^{a_{s+1}} \cdots p_{s+t}^{a_{s+t}}$, 其中对 $1 \leq i \leq s$, 有 $p_i \equiv 1 \pmod{4}$; 对 $1 \leq i \leq t$, 有 $p_{s+i} \equiv 3 \pmod{4}$; 而 $a_0 \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$; 对 $1 \leq i \leq s+t$, 有 $a_i \geq 1$. 设 $f(n)$ 为互不同构的 n 阶 4 度 1-正则循环图的个数, 则

- (1) $f(n) = 0$, 如果 $n \leq 5$, 或者 $n = 10$, 或者 $n = p^a$ 或 $2p^a$, 其中 $p = 2$ 或 $p \equiv 3 \pmod{4}$.
- (2) $f(n) = 2^s - 1$, 如果 $a_0 \leq 1, s \geq 1$ 且 $t = 0$.
- (3) 如果 $a_0 \geq 2$ 或者 $t \geq 1$, 则

$$f(n) = \begin{cases} 2^{s+t-1} - 1, & \text{如果 } a_0 < 2, \\ 2^{s+t} - 2, & \text{如果 } a_0 = 2, \\ 2^{s+t+1} - 2, & \text{如果 } a_0 \geq 3. \end{cases}$$

证 (1) $n \leq 4$ 的情形是显然的. 如果 $n = p^a$ 或 $2p^a$, 其中 $p \equiv 3 \pmod{4}$, 则 $Z_n^* \cong Z_{(p-1)p^{a-1}}$ 没有 4 阶子群, 因此 $f(n) = 0$. 如果 $n = 5$, 或者 $n = 10$, 或者 $n = 2^a (a \geq 3)$, 则 Z_n^* 有惟一的包含 -1 的 4 阶子群, 它分别对应于定理 1 中列出的 3 个非正规循环图, 于是结论成立.

(2) 此时 -1 是 $\text{mod } n$ 的平方剩余, 由初等数论知 $x^2 \equiv -1 \pmod{n}$ 有 2^s 个解. 因此 Z_n^* 有 2^{s-1} 个包含 -1 的 4 阶循环子群. 又由本定理前面的注, Z_n^* 有 2^s 个对合, 因此有 $2^{s-1} - 1$ 个包含 -1 的 4 阶初等交换子群. 结论立得.

(3) 此时 -1 是 $\text{mod } n$ 的非平方剩余, 因此 Z_n^* 没有包含 -1 的 4 阶循环子群. 另一方面, Z_n^* 有 $2^{s+t} - 1$, 或 $2^{s+t+1} - 1$, 或 $2^{s+t+2} - 1$ 个对合, 依赖于 $a_0 < 2$, 或 $a_0 = 2$, 或 $a_0 \geq 3$. 于是 Z_n^* 有 $2^{s+t-1} - 1$, 或 $2^{s+t} - 1$, 或 $2^{s+t+1} - 1$ 个包含 -1 的 4 阶初等交换子群. 但当 $a_0 \geq 2$ 时, 有一个 4 阶初等交换子群对应于定理 1 中列出的非正规循环图(iii), 于是结论成立.

致谢 本工作为国家自然科学基金(批准号: 19831050)和国家教育委员会博士点基金资助项目.

参 考 文 献

- 1 Dixon J D, Mortimer B. Permutation Groups. New York: Springer-Verlag, 1996
- 2 Frucht R. A one-regular graph of degree three. Canad J Math, 1952, 4: 240~247
- 3 Conder M D E, Praeger C E. Remarks on path-transitivity in finite graphs. European J Combin, 1996, 17: 371~378
- 4 Miller R C. The trivalent symmetric graphs of girth at most six. J Combin Theory, 1971, 10: 163~182
- 5 Chao C Y. On the classification of symmetric graphs with a prime number of vertices. Trans Amer Math Soc, 1971, 158: 247~256
- 6 Marušič D. A family of one regular graphs of valency 4. Europ J Combin, 1997, 18: 59~64
- 7 Xu M Y. Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs. Discrete Math, 1998, 182: 309~319
- 8 Baik Y G, Feng Y Q, Sim H S, et al. On the normality of Cayley graphs of abelian groups. Algebra Colloq, 1998, 5: 297~304
- 9 Fang X G, Xu M Y. On isomorphisms of Cayley graphs of small valency. Algebra Colloq, 1994, 1: 67~76

(2000-04-20 收稿)