

力边界法向量在套管应力数值分析中的应用^{*}

郑传奎 覃成锦 高德利

(中国石油大学·北京)

郑传奎等.力边界法向量在套管应力数值分析中的应用.天然气工业,2006,26(9):87-89.

摘要 传统法向量求解方法仅适用于简单几何边界问题。国际上大型有限元软件(如 ABAQUS)虽然能给出一般边界法向量,但非专业人员无法了解其内核理论。因此,深入研究任意边界法向量数值理论十分必要。等参元边界法向量的数值计算方法,是基于石油套管复杂力边界法向量理论研究和工程需要提出的。自然坐标和物理坐标之间映射关系的建立,便于应用等参单元对任意几何形状求解域进行有限元离散。依此将多元函数微分方程求解方法与有限元等参变换方法相结合,建立起等参元边界法向量数学计算模型,并编制出相应的计算软件。该理论的应用,能够更加准确模拟石油套管管内流体、地层蠕变等复杂地质条件下,套管壁上的力边界法向量问题。从而能彻底解决复杂套管力边界法向量问题;能够提高套管强度计算精度、优化套管设计程序。所得等参元力边界法向量数值理论及计算软件,普遍适用于一般边界法向量问题。算例给出两类力边界法向量数值方法,套管外壁法向量数值解与解析解对比分析表明,该方法简单,精度高。

主题词 法向量 切向量 套管设计 套管强度 套管应力 数值分析

一、建立坐标变换

如图1所示,设 $D \subseteq R^2$ 是 $\xi\zeta$ (ξ, ζ 为自然坐标)平面上一个区域,直角坐标下空间曲面 (Σ) 上点 p 的

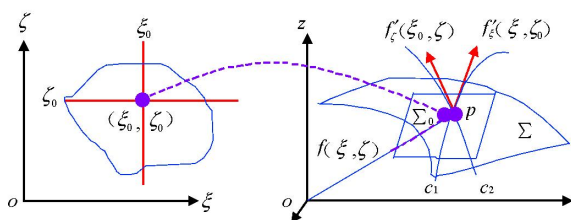


图1 自然坐标和物理坐标之间映射关系图

参数方程: $x = x(\xi, -1, \zeta)$, $y = y(\xi, -1, \zeta)$, $z = z(\xi, -1, \zeta)$, 其中 $(\xi, \zeta) \in D$ 若记 $p = (x, y, z)$, $f(\xi, \zeta) = (x, y, z)$ 则 $p(x, y, z) = f(\xi, \zeta) = p(x(\xi, -1, \zeta), y(\xi, -1, \zeta), z(\xi, -1, \zeta))$ 。其中,如果固定 ζ 则变为 $p = f(\xi, \zeta)$ 。它表示的是 D 中的一条直线映射在空间曲面 (Σ) 中的一条空间的曲线,称为 ξ 曲线;同理有 ζ 曲线 $p = f(\xi, \zeta)$ 。

二、用偏导数表示切向量

曲面 (Σ) 参数方程 (p) 坐标分量,均是以自然坐

标 ξ, ζ 为参变量的函数。因此,对任一定点 $p_0(\xi, \zeta)$, 通过曲面方程即在物理坐标中映射出空间点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 。再由式(1)、(2)获得该点切向量。当 ξ 固定, ζ 在 $(-1, 1)$ 中变化;或 ζ 固定, ξ 在 $(-1, 1)$ 内变化时,根据 ζ 曲线、 ξ 曲线方程,点 p 就描画出空间曲线 C_1, C_2 (见图1)。曲面方程对自然坐标偏导数为:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = f'_{\xi}(\xi, \zeta); \frac{\partial p}{\partial \zeta} = f'_{\zeta}(\xi, \zeta) \quad (1)$$

式中: ξ 为曲线、 ζ 为曲线在点 p_0 的切向量;分别为:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_{(\xi_0, \zeta_0)} = f'_{\xi}(\xi_0, \zeta_0) \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} \Big|_{(\xi_0, \zeta_0)} = f'_{\zeta}(\xi_0, \zeta_0) \quad (3)$$

三、法向量表示方法

假定按照上述原理已经获取某点切向量,当此二切向量均不为0时,夹角 $\theta \in (0 \sim 180^\circ)$, 则二向量构成的平面 (Σ_0) 就是 Σ 在点 p_0 的切平面,这正是全微分方程的几何意义。两向量叉乘积所得新向量垂直于二者构成的切平面 (Σ_0), 且方向符合右手定则,该向量是空间曲面 (Σ) 上点 p_0 的法向量 (n):

$$n = f'_{\xi}(\xi, \zeta) \times f'_{\zeta}(\xi, \zeta) \quad (4)$$

^{*} 本文受到国家自然科学基金项目(编号:50234030 和 90410006)及“长江学者和创新团队发展计划”(IRT0411)资助。

作者简介: 郑传奎, 1980年生, 博士研究生; 从事套管损坏方面的研究工作。地址: (102249) 北京市昌平中国石油大学 273 信箱。电话: (010) 89733702, 13241802966。E-mail: zckzmzmzck@sina.com

四、空间等参元边界法向量数值方法

用空间 20 节点有限元法,单元内任意点物理坐标由各节点形函数及物理坐标表示,用张量形式:

$$x_i = N_j x_{ij}, (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 20) \quad (5)$$

式中: $x_i (i = 1, 2, 3)$ 分别表示坐标分量 x, y, z ; j 表示节点号。

由于采用等参变换方法,坐标变换和函数插值采用相同节点,并且采用相同插值函数,所以 N 既是坐标插值的插值函数,也是函数插值的插值函数。

(1) 角节点形函数为:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \zeta \zeta_i) (1 - \xi \xi_i - \zeta \zeta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (6)$$

(2) 边中点形函数为:

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_i + \zeta \zeta_i) (1 - \xi^2 - \zeta^2) \quad (i = 9, 10, \dots, 20) \quad (7)$$

将式(6)代入式(5)并分别对 ξ, ζ 进行求偏导数,张量形式为:

$$x_{k,j} = 0.25 R_{ij} x_i \quad (8)$$

式中: $R_{11} = \xi(1 + \zeta \zeta_i)(\zeta \zeta_i + 2 \xi \xi_i)$

$$R_{22} = \zeta(1 + \xi \xi_i)(1 + \zeta \zeta_i)$$

$$(i = 1, 2, \dots, 20; j = 1, 2; k = 1, 2, 3)$$

将式(7)代入式(5)可作相似处理。因为 ξ, ζ 是求解域上点的自然坐标,只要给出求解域上某点物理坐标对应的自然坐标 (ξ, ζ) ,即可方便依上述理论获取该点物理坐标对自然坐标的导数,将该导数带入式(4),获取该点法向量 (n) 。

五、平面几何边界法向量数值方法

Hermite 矩形单元角节点和边中点形状函数通过划线法理论计算得到。将单元中各个节点自然坐标代入相应形状函数表达式,继而导出形状函数对自然坐标的导数,以及物理坐标对自然坐标的导数。依式(4)计算法向量 (n) ,如图 2,假设在自然坐标系中以 2、6、3 局部节点号所在的边 $(\xi = 1)$ 映射在物理坐标系中是点节点 2、6、3 所在的曲线边界。在曲线上取实验点 M ,按式(2)、(3)计算 M 点切向量 $f'_\xi(1, \zeta)$ 或者 $f'_\xi(1, \zeta)$,根据向量积定理^[7]或切向量与法向量之间的关系,确定法向量 (n) 垂直上述切向量。因偏导数 $f'_\xi(1, \zeta)$ 和 $f'_\xi(1, \zeta)$ 正是实验曲

线在实验点 (M) 的切向量。因此,向量 (n) 是节点 2、6、3 所在的曲线边界在 M 点法向量。同理可得 $\xi = C, \zeta = C$ 映射在物理坐标中相应曲线上任一点法向量。

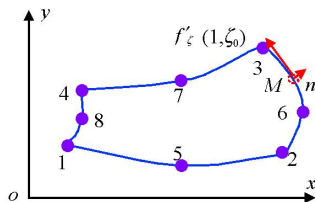


图 2 物理坐标中曲线边界点切、法向量图

六、算例分析

1. 计算石油套管力边界点法向量

石油套管类型为 P-110,取模型外径 $2R$ 为 139.7 mm,内径 $2r$ 为 124.3 mm,轴向长度为 L 为 500.0 mm。计算外边界上 $(\xi = 1)$ 点的法向量。有限元网格共 300 个。径向网格数为 1,周向网格数为 15,轴向网格数为 20。采用空间 20 节点有限单元法,计算自然坐标系中母单元 2×2 高斯积分点,映射在套管外边界上点处法向量。仅给出一个单元外边界上目标点法向量数值计算结果(其他从略)。图 3 中,1, 2, 3, 4 为自然坐标系中求解域上 2×2 高斯积分点,通过坐标插值函数映射在石油套管外边界上的物理坐标点。 n_1, n_2, n_3, n_4 分别是相应点的法向量。因此,通过本文研究能够方便获取目标点法向量,尤其在复杂力边界问题上更能体现其优越性。

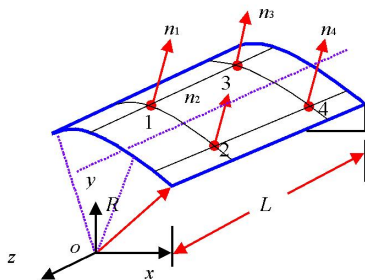


图 3 物理坐标中高斯点处的法向量图

由表 1 可知:对所研究力边界法向量问题,本文数值解和经典解析解基本吻合,最大误差小于 0.2%,在一般工程问题误差范围内。该方法是基于离散元所得的数值解法,能模拟一般边界法向量问题,具有普遍工程意义。

2. 平面力边界法向量在套管强度中的应用

为阐明力边界法向量理论在套管强度中的应

表 1 石油套管力边界点法向量数值解与经典解析解对照表

高斯积分点号 及相应自然坐标		数 值 解			积分点法向量方向与 X 轴 正方向之间夹角	
		与 X 轴夹角余弦	与 Y 轴夹角余弦	与 Z 轴夹角余弦	数值解	解析解
1	(-0.57735026918926 , -0.57735026918926)	0.98639184	0.16441147	-1.312×10^{-16}	9.463047°	9.470°
2	(-0.57735026918926 , +0.57735026918926)	0.99901988	0.04426371	-6.665×10^{-16}	2.536952°	2.531°
3	(+0.57735026918926 , -0.57735026918926)	0.98639184	0.16441147	1.5965×10^{-16}	9.463047°	9.470°
4	(0.57735026918926 , +0.57735026918926)	0.99901988	0.04026371	4.4107×10^{-16}	2.536952°	2.531°

用,采用平面有限元模型。局部坐标系下边界 $\xi = -1$ (图 2),在物理坐标系中映射形成曲边界,其上任意点法向量可通过平面边界法向量理论获取。因内压直接作用在内壁法线方向上,依此计算内壁各节点载荷分向量,形成总体节点载荷向量,最后形成有限元基本方程,本文采用逐步超松弛迭代(SOR)方法求解大型线性方程组。由于应用迭代格式求解 $AX = b$ 的收敛速度和迭代矩阵谱半径有关,而迭代矩阵 B_ω 是松弛因子 ω 的函数,故优选松弛因子十分重要,采用增量法 $\omega_{+1} = \omega + \Delta\omega_0$ 。

迅速从 0~2 之间搜索出最佳松弛因子 ω_{pt} ,与下式: $\omega'_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B_1)}}$ (B_1 是 Jacobi 迭代法迭代矩阵) ω'_{opt} 对比,若绝对差值在误差控制精度范围内,则 ω_{pt} 是最佳松弛因子,否则重新优选。

P-110 套管外径为 139.7 mm,内径为 121.4 mm,含磨损有限元模型及荷载状况见文献[1-6]。现仅给出套管抗内压强度数值模拟结果:SOR 逐步超松弛迭代最优步数:121 步;最佳松弛因子: $\omega_{pt} = 1.4321$;迭代误差控制精度:ERROR=0.00000001。由图4知,平面应变与平面应力问题数值解,均能够

准确模拟石油套管抗内压强度问题,按照平面应变所得数值解比平面应力数值解约大 9%。能够充分满足工程需要,不仅具有重要理论价值,而且具有重要的工程意义。

七、结 论

(1)将多元函数微分方程求解方法与有限元等参变换方法相结合,导出复杂力边界法向量数值方法,可推广应用模拟一般边界法向量问题。根据力边界法向量数值计算模型,编写计算软件,并建立了 P-110 石油套管力边界点法向量数据库。

(2)本文法向量数值方法,有助于解决含磨损缺陷套管强度问题,表明具有重要的工程意义。当 ξ 和 ζ 在 (-1,1) 中任意变化时,点 (ξ, ζ) 在物理坐标系中映射点的法向量数值方法及应用需进一步研究。

参 考 文 献

[1] 赵显增.微积分教程(下册)[M].南京:东南大学出版社,2002:137-139.

[2] 华中理工大学数学系编.高等数学(下册)[M].北京:高等教育出版社,1997.

[3] 覃成锦,高德利,徐秉业.含磨损缺陷套管强度分析的数值方法[J].工程力学,2001,18(2):9-13.

[4] 王勖成,邵敏.有限单元法基本原理和数值方法[M].2版.北京:清华大学出版社,1995.

[5] 同济大学数学教研室主编.高等数学[M].北京:高等教育出版社,1988.

[6] 郑传奎,覃成锦,高德利.含磨损缺陷套管抗内压强度数值计算研究[J].天然气工业,2006,26(1):76-79.

(收稿日期 2006-01-19 编辑 钟水清)

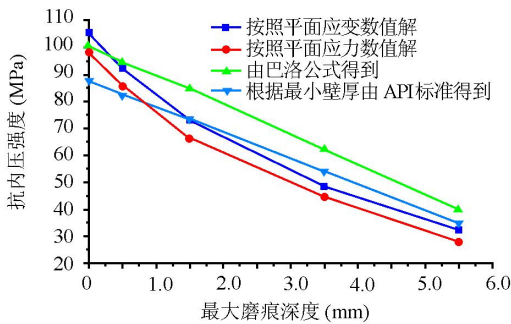


图 4 套管抗内压强度与最大磨痕深度关系图