中国科学: 数学 2024 年 第 54 卷 第 10 期: 1723 ～ 1734
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

综 述

球面中极小超曲面的陈省身猜想及其相关问题

献给沈一兵教授 85 寿辰

许洪伟[1], 许智源[2*]

1. 浙江大学数学科学研究中心, 杭州 310027;
2. 杭州师范大学数学学院, 杭州 311121
E-mail: xuhw@zju.edu.cn, xuzy@hznu.edu.cn

收稿日期: 2023-06-30; 接受日期: 2023-09-25; 网络出版日期: 2024-01-02; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12071424, 11531012 和 11601478) 资助项目

摘要 本文介绍关于球面中极小超曲面的陈省身猜想及其相关问题. 首先, 本文扼要地回顾陈省身猜想的问题背景. 其次, 本文着重介绍关于球面中常数量曲率极小超曲面的陈省身猜想以及关于球面中极小超曲面的陈省身猜想的研究成果. 最后, 本文进一步讨论关于球面中常平均曲率超曲面和球面中高余维极小子流形的两类广义陈省身猜想的进展.

关键词 极小超曲面的陈省身猜想 数量曲率空隙 拼挤定理 第二基本形式

MSC (2020) 主题分类 53C24, 53C42

1 引言

1968 年, Simons [38] 证明了关于单位球面中紧致极小子流形的著名刚性定理.

定理 1.1 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$ 中 n 维紧致极小子流形. 记 S 为 M 的第二基本形式模长平方, 则下述不等式成立:

$$\int_M S\left[\left(2-\frac{1}{q}\right)S-n\right]dM \geqslant 0.$$

进一步地, 若 $0 \leqslant S \leqslant n/(2-\frac{1}{q})$, 则 $S \equiv 0$, 即 M 必为全测地的大球面; 或者 $S \equiv n/(2-\frac{1}{q})$.

Chern 等 [13] 进一步证明了当 $S \equiv n/(2-\frac{1}{q})$ 时, M 必为 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的 n 维 Clifford 环面 $\mathbb{S}^k(\sqrt{\frac{k}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{\frac{n-k}{n}})$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 或者 $\mathbb{S}^4$ 中的 Veronese 曲面. 对于球面中的极小超曲面情形, Lawson [23] 也独立地获得了同样的结果. 基于上述工作, 陈省身于 1968 年提出了关于球面中紧致极小超曲面的如下著名猜想 [12,13].

陈省身猜想 A (标准版) 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n 维紧致极小超曲面. 若 M 具有常数量曲率, 则 M 的数量曲率的所有可能取值构成 $\mathbb{R}$ 上的一个离散集.

英文引用格式: Xu H W, Xu Z Y. The Chern conjecture for minimal hypersurfaces in a sphere and its related problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1723–1734, doi: 10.1360/SSM-2023-0195

1982 年, Yau [59] 将上述陈省身猜想列为 120 个未解决的世界著名几何难题之一. 此外, 陈省身猜想的重要意义在文献 [46,47] 等一系列著名文献中也得到了高度认可. 目前已知的球面中具有常数量曲率的紧致极小超曲面都是等参极小超曲面, 即所有主曲率均为常数的极小超曲面. 1986 年, Verstraelen 等提出了下述改良版陈省身猜想 (参见文献 [35,44]).

陈省身猜想 B (改良版) 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n 维紧致极小超曲面. 若 M 具有常数量曲率, 则 M 必为等参极小超曲面.

根据 Tang 和 Yan [42] 的研究工作可知, 如果陈省身猜想 B 成立, 那么单位球面中具有常数量曲率的 n 维闭的嵌入极小超曲面第一特征值必为 n. 1980 年, Münzner [31] 证明了关于球面中等参极小超曲面的分类定理.

定理 1.2 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中紧致的 n 维等参极小超曲面. 设 g 和 S 分别为不同主曲率的个数和第二基本形式模长平方, 则有 $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $S = (g-1)n$.

Ge 和 Tang [18] 围绕陈省身猜想与等参超曲面介绍了一些重要进展. 2017 年, Xu 和 Xu [53] 提出了关于球面中紧致极小超曲面的加强版陈省身猜想.

陈省身猜想 C (加强版) 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n 维紧致极小超曲面. 记 S 为 M 的第二基本形式模长平方.

(1) 对于固定的正整数 $k \in [1, 4]$, 如果 S 满足 $a_k \leqslant S \leqslant a_{k+1}$, 则 M 必为等参极小超曲面, 且 $S \equiv a_k$ 或 $S \equiv a_{k+1}$;

(2) 如果 S 满足 $S \geqslant a_5$, 则 M 必为等参极小超曲面, 且 $S \equiv a_5$.

这里 $a_k = (k - \mathrm{sgn}(5-k))n$, $k \in \{m \in \mathbb{Z}^+; 1 \leqslant m \leqslant 5\}$.

注 1.1 上述陈省身猜想 A、B 和 C 难度依次递增.

陈省身猜想可分解成若干个关于单位球面中紧致极小超曲面的数量曲率拼挤 (pinching) 问题. 需要解决的第一个难题是回答下述公开问题.

公开问题 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n $(\geqslant 3)$ 维紧致极小超曲面.

(1) (第二空隙问题) 如果 S 为常数, 且满足 $n \leqslant S \leqslant 2n$, 则 $S = n$ 或 $S = 2n$.

(2) (第二拼挤问题) 如果满足 $n \leqslant S \leqslant 2n$, 则 $S \equiv n$ 或 $S \equiv 2n$.

注 1.2 根据文献 [24] 可知, $\mathbb{S}^3$ 中不存在 Gauss 曲率处处非正且亏格大于 1 的紧致极小曲面. 由 Gauss 方程和 Gauss-Bonnet 定理推得, $\mathbb{S}^3$ 中满足 $S \geqslant 2$ 的紧致极小曲面必为 Clifford 环面.

2 准备工作

设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的 n 维超曲面. 记 $\overline{\nabla}$ 为 $\mathbb{S}^{n+1}$ 上的 Levi-Civita 联络, ∇ 为 $\overline{\nabla}$ 在 M 上的诱导联络. 对于 M 上的切向量场 X 和 Y, 有 Gauss 公式 $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$, 其中 h 为 M 的第二基本形式. 对本文的指标取值范围作如下约定:

$$1 \leqslant i, j, k, \ldots \leqslant n.$$

记 S、H 和 R 分别为 M 的第二基本形式模长平方、平均曲率和数量曲率. 任意给定一点 $p \in M$, 在 p 点邻近选取 $\mathbb{S}^{n+1}$ 的一组局部单位正交标架场 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$, 使得限制在 M 上时, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 与 M 相切. 记 $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}\}$ 为其对偶标架场, 则 h、S 和 H 可表示为

$$h = h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j, \quad h_{ij} = h_{ji}, \quad S = |h|^2 = \sum_{i,j} h_{ij}^2, \quad H = \frac{1}{n}\,\mathrm{Trace}\, h = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}.$$

由 Gauss 方程得 $R = n(n-1) + n^2H^2 - S$. 对常平均曲率超曲面, S 为常数的充要条件是 R 为常数. 设 h 的一阶共变微分为

$$\nabla h = \sum_{i,j,k} h_{ijk}\omega_i \otimes \omega_j \otimes \omega_k,$$

其中 h_{ijk} 为 h_{ij} 的一阶共变导数. 由 Codazzi 方程得 $h_{ijk} = h_{ikj}$. 选取适当的标架, 有 $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$, 其中 λ_i 为 M 的主曲率, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. 对于正整数 m, 令 $f_m = \sum_i \lambda_i^m$, 则 $f_1 = nH$, $f_2 = S$.

设 M 为 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的紧致极小超曲面. 1968 年, Simons [38] 获得了下述公式:

$$\frac{1}{2}\Delta S = |\nabla h|^2 + S(n-S). \tag{2.1}$$

由此即得

$$\frac{1}{4}\Delta S^2 = \frac{1}{2}|\nabla S|^2 + S|\nabla h|^2 + S^2(n-S).$$

对上式积分得到

$$\frac{1}{2}\int_M |\nabla S|^2 dM = \int_M [(n-S)|\nabla h|^2 + S(S-n)^2] dM. \tag{2.2}$$

通过对 (2.1) 积分得到

$$\int_M |\nabla h|^2 dM = \int_M S(S-n) dM. \tag{2.3}$$

Peng 和 Terng [33, 34] 证明了下述公式:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2 = |\nabla^2 h|^2 + (2n+3-S)|\nabla h|^2 - 3(A-2B) - \frac{3}{2}|\nabla S|^2, \tag{2.4}$$

$$\int_M (A-2B) dM = \int_M \left(\frac{1}{2}F + |\nabla h|^2 - \frac{1}{4}|\nabla S|^2\right) dM, \tag{2.5}$$

其中,

$$A = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2\lambda_i^2, \quad B = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2\lambda_i\lambda_j,$$

$$F = \sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2(1+\lambda_i\lambda_j)^2 = \frac{2}{S}\sum_i (S\lambda_i^2 - \lambda_i f_3 - S)^2 = 2[Sf_4 - f_3^2 - S^2 - S(S-n)].$$

定义 2.1 [25]　称 $A - 2B$ 为极小超曲面 M 的 Peng-Terng 不变量.

记 $u_{ijkl} = \frac{1}{4}(h_{ijkl} + h_{lijk} + h_{klij} + h_{jkli})$. Peng 和 Terng [33] 给出了 $A - 2B$ 的上界和 $|\nabla^2 h|^2$ 的下界:

$$3(A-2B) \leqslant \frac{\sqrt{17}+1}{2}S|\nabla h|^2, \tag{2.6}$$

$$|\nabla^2 h|^2 \geqslant \sum_{i,j,k,l} u_{ijkl}^2 + \frac{3}{4}F \geqslant \frac{3}{4}F. \tag{2.7}$$

在此基础上, Cheng 和 Ishikawa [10] 获得了下述估计:

$$|\nabla^2 h|^2 \geqslant \frac{3}{4}F + \frac{3S(S-n)^2}{2(n+4)}. \tag{2.8}$$

3 具有常数量曲率的极小超曲面

1983 年, Peng 和 Terng [34] 首次研究了关于极小超曲面的陈省身猜想 A. 他们证明: 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中具有常数量曲率的 n 维紧致极小超曲面. 当 $S>n$ 时, M 上必存在一点 p 以及某个主曲率 λ_i, 使得在 p 点处满足 $f_3\lambda_i-S\lambda_i^2\geqslant-\frac{2}{3n}S^2$. 结合 (2.7) 可得下述不等式在 p 点处成立:

$$|\nabla^2h|^2\geqslant\frac{3S}{2}\left(1-\frac{2S}{3n}\right)^2. \tag{3.1}$$

结合 (2.4)、(2.6) 和 (3.1), 得到下述定理.

定理 3.1 [34] 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n 维具有常数量曲率的紧致极小超曲面. 如果 M 的第二基本形式模长平方 S 满足 $0\leqslant S-n\leqslant\frac{1}{12n}$, 则 $S=n$, 且 M 为 Clifford 环面.

Peng 和 Terng [34] 还完全解决了 3 维情形的第二空隙问题: 若 M 为 $\mathbb{S}^4$ 中具有常数量曲率的紧致极小超曲面, 且 $3\leqslant S\leqslant6$, 则 $S=3$, 且 M 为 Clifford 环面; 或者 $S=6$, 且 M 为 Cartan 极小超曲面. 1993 年, Chang [9] 证明了 3 维情形的陈省身猜想 B.

定理 3.2 [9] 如果 M 为单位球面 $\mathbb{S}^4$ 中具有常数量曲率的紧致极小超曲面, 则 $S\in\{0,3,6\}$, 且 M 为全测地球面、Clifford 环面和 Cartan 极小超曲面之一.

20 世纪 90 年代, Yang 和 Cheng [54–56] 沿用了 Peng 和 Terng [34] 在特殊点上进行曲率计算的想法, 多次优化了取点方式与曲率估计. 记

$$\begin{aligned}&t=S-n>0,\\&G=\sum_{i,j,k}\lambda_ih_{ijk}^2,\quad G_j=\left(\sum_i\lambda_i^2h_{iij}\right)^2,\\&f=f_4-\frac{1}{S}f_3^2-\frac{S^2}{n}=\frac{F}{2S}-\frac{(S-n)^2}{n}.\end{aligned}$$

Yang 和 Cheng [56] 证明了在任意固定点 $p\in M$ 上, 若主曲率记为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$, $\alpha=\frac{\sum_ih_{iii}^2}{|\nabla h|^2}$, 则有下述估计:

$$f\geqslant\frac{(\lambda_1-\lambda_n)^2}{\lambda_1^2+\lambda_n^2}\left(\frac{S}{n}+\lambda_1\lambda_n\right)^2, \tag{3.2}$$

$$A-B\leqslant\frac{1-\alpha}{3}(\lambda_1-\lambda_n)^2tS^2, \tag{3.3}$$

$$\sum_jG_j\leqslant\frac{1+2\alpha}{3}tS^2f, \tag{3.4}$$

$$G^2\leqslant\left(\frac{A+2B}{3}-\frac{4}{3}\sum_j\frac{G_j}{S+2\lambda_j^2}\right)tS^2, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l}u_{ijkl}^2\geqslant{}&\frac{9}{4tS^2}\sum_i\lambda_i^2G_i+\frac{G^2}{S^2}+\frac{t^2S^2}{2(1-t)}+2\left(Sf-\frac{1}{2tS^2}\sum_i\lambda_i^2G_i\right)^{-1}\\&\times\left(\frac{3}{2tS^2}\sum_i\lambda_i^2G_i+Sf+\frac{tS^2}{1-t}+\frac{f_3}{S}G-2A\right)^2.\end{aligned} \tag{3.6}$$

通过计算可得

$$2Sf+\frac{2f_3}{S}G+\frac{G^2}{S^2}+\frac{4}{tS^2}\sum_i\lambda_i^2G_i\leqslant tS^2\left(2tS-S-5-\frac{4t}{1-t}\right)+5A-6B. \tag{3.7}$$

他们还证明了对于任意常数 c, 存在 $x_c \in M$, 使得在 x_c 上成立

$$(S-n)(cf_3^2 - Sf_4) = 2cf_3G - (2A+B)S + 3c\sum_j G_j. \tag{3.8}$$

取 $c = 1 + c_0$, 其中 c_0 满足

$$\frac{1}{3c_0}\left(1 + c_0 - \frac{3}{13}\right)^2 = \frac{14+t}{13}.$$

通过在 x_c 上进行曲率估计, Yang 和 Cheng [56] 证明了 $t \geqslant \frac{26}{87} - \frac{16}{87S}$, 并获得了下述定理.

定理 3.3 [56] 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n $(\geqslant 4)$ 维具有常数量曲率的紧致极小超曲面. 如果第二基本形式满足 $0 \leqslant S - n \leqslant \frac{n}{3}$, 则 $S = n$, 且 M 为 Clifford 环面.

2007 年, Suh 和 Yang [39] 改进了不等式 (3.5), 并引入新的参数, 证明了下述定理.

定理 3.4 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n 维具有常数量曲率的紧致极小超曲面. 如果第二基本形式满足 $0 \leqslant S - n \leqslant \frac{3}{7}n$, 则 $S = n$, 且 M 为 Clifford 环面.

2017 年, 基于 Lusala 等 [30] 关于球面中 4 维极小 Willmore 超曲面的结果, Deng 等 [15] 证明了单位球面 $\mathbb{S}^5$ 中具有常数量曲率的紧致极小 Willmore 超曲面必为等参超曲面.

4 极小超曲面

设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的紧致极小超曲面. Peng 和 Terng [33] 研究了难度更大的陈省身猜想 C. 由 (2.4) 可得

$$\int_M |\nabla^2 h|^2 dM = \int_M \left[-(2n+3-S)|\nabla h|^2 + 3(A-2B) + \frac{3}{2}|\nabla S|^2 \right] dM. \tag{4.1}$$

由 (2.5)、(2.7) 和 (4.1), 有

$$\int_M \left[\left(S - 2n - \frac{3}{2}\right)|\nabla h|^2 + \frac{3}{2}(A-2B) + \frac{9}{8}|\nabla S|^2 \right] dM \geqslant 0. \tag{4.2}$$

结合 (2.2) 和 (2.6) 得到

$$\int_M \left[\left(S - 2n - \frac{3}{2}\right)|\nabla h|^2 + \frac{\sqrt{17}+1}{4} S|\nabla h|^2 + \frac{9}{4}[(n-S)|\nabla h|^2 + S(S-n)^2] \right] dM \geqslant 0. \tag{4.3}$$

由此获得关于 n $(\leqslant 5)$ 维紧致极小超曲面的第二拼挤定理.

定理 4.1 [33] 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n 维紧致极小超曲面. 若 $n \leqslant 5$, 且满足 $0 \leqslant S - n \leqslant \delta_1(n)$, 其中 $\delta_1(n)$ 为仅依赖于 n 的正常数, 则 $S \equiv n$, 且 M 为 Clifford 环面.

2007 年, Wei 和 Xu [45] 指出了文献 [40] 中的一个本质性错误. 他们证明了如果 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n $(\geqslant 6)$ 维紧致极小超曲面, 且满足 $3(A-2B) \leqslant t(n)S|\nabla h|^2$, 其中 $t(n)$ 为仅依赖于 n 的满足 $0 \leqslant t(n) < 2 + \frac{3}{n}$ 的常数, 则存在仅依赖于 n 的正常数 $\delta_2(n)$, 当 $0 \leqslant S - n \leqslant \delta_2(n)$ 时, M 必为 Clifford 环面. 由此可见, 研究 Peng-Terng 不变量的上界估计是证明第二拼挤定理的关键环节. Wei 和 Xu [45] 通过证明当 $n = 6$ 时有 $3(A-2B) \leqslant 2.49S|\nabla h|^2$, 当 $n = 7$ 时有 $3(A-2B) \leqslant 2.428S|\nabla h|^2$, 获得了下述定理.

定理 4.2 [45] 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n 维紧致极小超曲面, $n = 6, 7$. 如果 $0 \leqslant S - n \leqslant \delta_2(n)$, 其中 $\delta_2(n)$ 为仅依赖于 n 的正常数, 则 $S \equiv n$, 且 M 为 Clifford 环面.

2010 年, Zhang [60] 证明了当 $n=8$ 时, 有 $3(A-2B)\leqslant 2.34S|\nabla h|^2$. 从而获得了关于 $\mathbb{S}^9$ 中紧致极小超曲面的第二拼挤定理.

2011 年, Ding 和 Xin [16] 证明了当 $n\geqslant 6$ 且 $n\leqslant S\leqslant \frac{16}{15}n$ 时, 下述估计式成立:

$$3(A-2B)\leqslant (S+4+\sqrt[3]{c_0F})|\nabla h|^2, \tag{4.4}$$

其中 $c_0=\frac{3-\sqrt{6}-\frac{4}{13(n-2)}}{\sqrt{6}-1+\frac{1}{n-2}}(6-\sqrt{6}-\frac{1}{n-2})^2$. 当 $n\geqslant 6$、$n\leqslant S\leqslant \frac{16}{15}n$ 且 $\theta\in(0,1)$ 时, Ding 和 Xin 应用 (2.8)、(4.4)、Young 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式, 推导出下述积分不等式:

$$\begin{aligned}0\leqslant &\int_M\left[\left(2-\frac{\theta}{2}\right)S-2n+1-\frac{\theta}{2}\right]|\nabla h|^2\,dM+c_0\int_M|\nabla h|^3\,dM\\&+\left(\frac{3}{2}-\frac{3\theta}{8}\right)\int_M|\nabla S|^2\,dM-\int_M\frac{3S(S-n)^2}{2(n+4)}\,dM.\end{aligned}\tag{4.5}$$

在拼挤条件 $0\leqslant S-n\leqslant\delta$ 下, 对积分项 $\int_M|\nabla h|^3\,dM$ 作如下估计:

$$\begin{aligned}\int_M|\nabla h|^3\,dM\leqslant&\int_M\left[2(n+\delta)\epsilon+\frac{S-n}{8\epsilon}\right]|\nabla h|^2\,dM\\&+\epsilon\int_M|\nabla^2h|^2\,dM+\frac{1}{16\epsilon}\int_M|\nabla S|^2\,dM,\end{aligned}\tag{4.6}$$

其中 $\epsilon>0$. 将 (4.6) 代入 (4.5), 并选取适当的参数. 当 $\delta=\frac{n}{23}$ 时, Ding 和 Xin [16] 成功地证明了下述第二拼挤定理.

定理 4.3 [16] 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n 维紧致极小超曲面, 其中 $n\geqslant 6$. 如果 M 的第二基本形式模长平方满足 $0\leqslant S-n\leqslant\frac{n}{23}$, 则 $S\equiv n$, 且 M 为 Clifford 环面.

2017 年, Xu 和 Xu [53] 引入新的参数 $\epsilon_1:=\tau\epsilon>0$, 并将 (4.6) 修改为

$$\int_M|\nabla h|^3\,dM\leqslant\int_M\left[2(n+\delta)\epsilon_1+\frac{S-n}{8\epsilon_1}\right]|\nabla h|^2\,dM+\epsilon\int_M|\nabla^2h|^2\,dM+\frac{1}{16\epsilon}\int_M|\nabla S|^2\,dM.\tag{4.7}$$

将上式代入 (4.5), 得到

$$\begin{aligned}0\leqslant\int_M\bigg\{&1-\frac{\theta}{2}(n+1)+\epsilon c_0(n\sigma+n-3+5\delta)+\frac{c_0\delta}{8\epsilon}\\&+\delta\left(3-\frac{3\theta}{4}-\frac{3}{2(n+4)}\right)+2\epsilon(\tau-1)c_0(n+\delta)\\&-\left[1-\frac{\theta}{4}+\frac{c_0}{8\epsilon}-\frac{c_0}{8\epsilon_1}+\epsilon c_0(2-\sigma)\right](S-n)\bigg\}|\nabla h|^2\,dM.\end{aligned}\tag{4.8}$$

选取参数 $\epsilon=\sqrt{\frac{\delta}{8[\sigma n+n-3+5\delta+2(n+\delta)(\tau-1)]}}$、$\tau=0.83$ 和 $\theta=0.866$. 由 (4.8) 得

$$\begin{aligned}0\leqslant&\bigg[-0.433n+c_0\sqrt{\frac{\delta}{2}[\sigma n+n-3+5\delta-0.34(n+\delta)]}\\&+\left(2.3505-\frac{3}{2(n+4)}\right)\delta+0.567\bigg]\int_M|\nabla h|^2\,dM\\&+\left[-0.7835-c_0\left(2\epsilon-\sigma\epsilon-\frac{0.17}{6.64\epsilon}\right)\right]\int_M(S-n)|\nabla h|^2\,dM.\end{aligned}\tag{4.9}$$

令 $\delta=\frac{n}{22}$. 当 $n\geqslant 6$ 时, 我们运用 Sylvester 理论刻画了两个多项式的零点分布情形, 从而推得 (4.9) 中两个方括号内表达式的值均为负值. 结合 (4.9), 本文作者证明了下述第二拼挤定理.

定理 4.4 [53] 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n 维紧致极小超曲面. 如果第二基本形式满足 $0 \leqslant S-n \leqslant \frac{n}{22}$, 则 $S \equiv n$, 且 M 为 Clifford 环面.

Lei 等 [25] 证明了如果 $n \geqslant 6$, $\eta > 0$, 且满足 $n \leqslant S \leqslant (1+\eta^{-1})n$, 则

$$3(A-2B) \leqslant (S+4+\sqrt[3]{cF})|\nabla h|^2, \tag{4.10}$$

其中 $c = \frac{24}{5} - \frac{16}{(1+\eta^{-1})n}$. 由 (2.4)、(2.5) 和 (2.8) 可得

$$\int_M (A-2B)dM \leqslant \int_M \left[-\left(\frac{4}{3}n+1-\frac{2}{3}S\right)|\nabla h|^2 + 2(A-2B) - \frac{S(S-n)^2}{n+4} + \frac{3}{4}|\nabla S|^2\right]dM. \tag{4.11}$$

当 $S \leqslant (1+\eta^{-1})n$ 时, 有

$$\int_M \left[\frac{3}{4}|\nabla S|^2 - \frac{S(S-n)^2}{n+4}\right]dM \leqslant \int_M \left[\frac{3}{2}(n-S) + \frac{bn}{\eta}\right]|\nabla h|^2 dM, \tag{4.12}$$

其中 $b = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+4}$. 从上述两式可得

$$\int_M (A-2B)dM \geqslant \int_M \left(1 - \frac{n}{6} + \frac{5}{6}S - \frac{bn}{\eta}\right)|\nabla h|^2 dM. \tag{4.13}$$

另外, 由 (4.10) 和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\int_M [\theta(A-2B) - \tau|\nabla S|^2]dM \\
&\quad \leqslant \int_M \left[S+4-\frac{2}{3}c\sigma^2 + \frac{2}{3\sigma} \times \left(2(1+\eta^{-1})n\kappa + \frac{1}{8\kappa}(S-n) - \varepsilon(2n+3-S)\right)\right]|\nabla h|^2 dM,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

其中, σ、ε 和 κ 均为正的参数, $\theta = 3 - \frac{2}{3}c\sigma^2 - 2\sigma^{-1}\varepsilon$, $\tau = \frac{1}{6}c\sigma^2 + \frac{2}{3\sigma}(\frac{1}{16\varepsilon} + \frac{3\varepsilon}{2})$. 在选取 σ 和 ε 的过程中, 始终保持 $\theta \geqslant 0$. 结合 (4.13) 和 (4.14), 可得

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \int_M \bigg[&(S-n)\left(1 + \frac{1}{12\sigma\kappa} + \frac{2\varepsilon}{3\sigma} - 2\tau - \frac{5}{6}\theta\right) \\
&+ n + 4 - \frac{2}{3}c\sigma^2 + \frac{2}{3\sigma}(2(1+\eta^{-1})n\kappa - \varepsilon(n+3)) \\
&+ \frac{2\tau n}{\eta} - \theta\left(1 + \frac{2n}{3} - \frac{bn}{\eta}\right)\bigg]|\nabla h|^2 dM.
\end{aligned}$$

选取参数 $\varepsilon = \frac{1}{18}$, $\sigma = \frac{7}{18}$, $\kappa = \frac{1}{24}$, $\eta = 18$, 获得下述第二拼挤定理.

定理 4.5 [25] 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n 维紧致极小超曲面. 如果第二基本形式满足 $0 \leqslant S-n \leqslant \frac{n}{18}$, 则 $S \equiv n$, 且 M 为 Clifford 环面.

基于上述研究结果, 我们期待通过有限次改进, 完整地解决第二拼挤问题.

问题 4.1 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 n 维紧致极小超曲面. 记 S 为 M 的第二基本形式模长平方. 能否证明存在满足 $1 \leqslant k \leqslant 17$ 的正整数 k, 使得当 $0 \leqslant S-n \leqslant \frac{n}{k}$ 时, 必有 $S \equiv n$, 且 M 为 Clifford 环面; 或 $S \equiv 2n$ (当 $k=1$ 时)?

5 常平均曲率超曲面

与极小超曲面情形相比, 常平均曲率超曲面的拼挤现象更为复杂 (参见文献 [2,4,5,37]). 记 H 和 $\alpha_k(n,H)$ 为常平均曲率 Clifford 环面 $\mathbb{S}^k(\frac{\lambda_k}{\sqrt{1+\lambda_k^2}}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k^2}})$ 的平均曲率和第二基本形式模长平

方, 其中

$$\lambda_k = \frac{n|H| + \sqrt{n^2H^2 + 4k(n-k)}}{2(n-k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

则

$$\alpha_k(n, H) = n + \frac{n^3}{2k(n-k)}H^2 - \frac{n(n-2k)}{2k(n-k)}\sqrt{n^2H^4 + 4k(n-k)H^2}.$$

对于固定的 n 和 H $(\neq 0)$, 有 $\alpha_1(n,H) < \alpha_2(n,H) < \cdots < \alpha_{n-1}(n,H)$. 令

$$\alpha(n,H) := \alpha_1(n,H), \quad \beta(n,H) := \alpha_{n-1}(n,H).$$

1990 年, Xu [48, 49] 在最佳拼挤条件下证明了球面中平行平均曲率子流形的分类定理.

定理 5.1 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$ 中 n 维紧致的平行平均曲率子流形. 如果 M 的第二基本形式模长平方 S 满足 $S \leqslant \alpha(n,H)$, 则 M 为伪脐子流形; 或者 $S \equiv \alpha(n,H)$, 且 M 为 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的 Clifford 超曲面 $\mathbb{S}^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}})$, 其中 $\lambda = \frac{n|H|+\sqrt{n^2H^2+4(n-1)}}{2(n-1)}$.

推论 5.1 设 M 为 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中紧致的常平均曲率超曲面. 如果 $S \leqslant \alpha(n,H)$, 则 M 为 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的全脐球面, 或者 Clifford 超曲面.

Cheng 和 Nakagawa [11] 及 Alencar 和 do Carmo [1] 独立地证明了推论 5.1. 1990 年, de Almeida 和 Brito [14] 在数量曲率非负的条件下证明了 $\mathbb{S}^4$ 中具有常数量曲率的常平均曲率超曲面的分类定理. 最近, Tang 等 [41] 及 Tang 和 Yan [43] 将此结果推广到了任意维数情形, 他们证明了如果 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中具有非负数量曲率的紧致超曲面, 且满足 $f_k := \sum_i \lambda_i^k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 均为常数, 其中 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 为 M 的主曲率, 则 $f_n := \sum_i \lambda_i^n$ 必为常数, 即 M 为等参超曲面.

1993 年, Chang [8] 证明了下述定理.

定理 5.2 $\mathbb{S}^4$ 中紧致的具有常数量曲率的常平均曲率超曲面必为等参超曲面.

受此启发, 本文作者 [52] 提出了下述公开问题.

问题 5.1 设 M 为 $\mathbb{S}^4$ 中紧致的常平均曲率超曲面. 记 S 和 H 分别为 M 的第二基本形式模长平方和平均曲率.

(1) 当 $\beta(3,H) \leqslant S \leqslant 6+9H^2$ 时, 能否证明 $S \equiv \beta(3,H)$, 且 M 为 Clifford 环面; 或者 $S \equiv 6+9H^2$, 且 M 为 4 维球面中 Veronese 曲面的一个管状邻域?

(2) 当 $S \geqslant 6+9H^2$ 时, 能否证明 $S \equiv 6+9H^2$, 且 M 为 4 维球面中 Veronese 曲面的一个管状邻域?

对于高维球面中数量曲率为常数的常平均曲率超曲面, Xu 和 Tian [50] 获得了下述第二空隙定理.

定理 5.3 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中具有常数量曲率和常平均曲率的紧致超曲面. 则存在仅依赖于 n 的正常数 $\gamma(n)$, 当 $|H| \leqslant \gamma(n)$ 和 $0 \leqslant S - \beta(n,H) \leqslant \frac{3}{7}n$ 时, 必有 $S = \beta(n,H)$, 且 M 为 Clifford 环面.

Xu 和 Xu [51, 52] 研究了高维球面中常平均曲率超曲面第二拼挤问题, 并证明了下述定理.

定理 5.4 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中紧致的常平均曲率超曲面. 则存在仅依赖于 n 的正常数 $\gamma(n)$, 当 $|H| \leqslant \gamma(n)$ 和 $0 \leqslant S - \beta(n,H) \leqslant \frac{n}{23}$ 时, 必有 $S \equiv \beta(n,H)$, 且 M 为 Clifford 环面.

注 5.1 当 $n \in \{6, 12, 24\}$ 时, 考虑球面 $\mathbb{S}^{3k+1}$ 中一簇具有 3 个不相同主曲率的紧致等参超曲面 M_t (参见文献 [7]). 将 M_t 的平均曲率记为 H_t, 通过计算可得其第二基本形式模长平方为 $S_t = 6k + 9k(H_t)^2$. 文献 [52] 证明了存在较大的 $H_t \in \mathbb{R}^+$, 使得对应的 S_t 满足 $0 \leqslant S_t - \beta(n,H) \leqslant \frac{n}{23}$, 但 M_t 不是 Clifford 环面. 因此, 上述定理中的条件 $|H| \leqslant \gamma(n)$ 是必要的.

基于文献 [25], Lei 等 [26] 进一步获得了下述第二拼挤定理.

定理 5.5　设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中紧致的常平均曲率超曲面. 则存在仅依赖于 n 的正常数 $\gamma(n)$, 当 $|H| \leqslant \gamma(n)$ 和 $0 \leqslant S - \beta(n,H) \leqslant \frac{n}{18}$ 时, 必有 $S \equiv \beta(n,H)$, 且 M 为 Clifford 环面.

对于单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中平均曲率为常数 H 的等参超曲面, 其第二基本形式模长平方的所有可能取值构成的集合记为 I_H. 根据等参超曲面理论 (参见文献 [31,32]) 可知, I_H 必为离散集. 对于球面中常平均曲率超曲面, Xu 和 Xu [52] 提出了下述广义陈省身猜想.

问题 5.2　设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的紧致常平均曲率超曲面. 记 S 和 H 分别为 M 的第二基本形式模长平方和平均曲率.

(1) 当 M 的数量曲率为常数时, 能否证明 M 必为等参超曲面?

(2) 设 $[a,b] \cap I_H = \{a,b\}$, $c = \sup_{t\in I_H} t$. 当 $a \leqslant S \leqslant b$ 时, 能否证明 $S \equiv a$ 或 $S \equiv b$, 且 M 为等参超曲面? 当 $S \geqslant c$ 时, 能否证明 $S \equiv c$, 且 M 为等参超曲面?

6　高余维极小子流形

1968 年, Chern 提出了关于球面中高余维极小子流形的陈省身猜想 [12,13].

陈省身猜想 D　设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$ 中 n 维具有常数量曲率的紧致极小子流形, 其中 $q \geqslant 2$. 设 M 的第二基本形式模长平方为 S.

(1) 对于任意给定的 n 和 q, S 的所有可能取值构成一个离散集;

(2) 存在常数 $S_0 > n/(2-\frac{1}{q})$, 使得当 $n/(2-\frac{1}{q}) < S \leqslant S_0$ 时, 必有 $S = S_0$.

当 $q > 2$ 时, Shen [36] 及 Li 和 Li [28] 先后改进了定理 1.1 中的拼挤常数 $n/(2-\frac{1}{q})$, 其中 Li 和 Li 将其改进到 $\frac{2}{3}n$. 因此, 陈省身猜想 D(2) 可改述为如下问题.

问题 6.1　设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$ $(q \geqslant 2)$ 中 n 维具有常数量曲率的紧致极小子流形. 是否存在常数 $S_0 > \frac{2}{3}n$, 使得当 $\frac{2}{3}n < S \leqslant S_0$ 时, 必有 $S = S_0$?

1975 年, Yau [58] 在截面曲率拼挤条件下证明了球面中极小子流形的刚性定理.

定理 6.1 [58]　设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$ 中 n 维紧致极小子流形. 如果 M 的截面曲率 K 满足 $K \geqslant \frac{q-1}{2q-1}$, 则 M 必为以下 3 种情形之一:

(1) 全测地子流形 $\mathbb{S}^n$;

(2) Clifford 环面 $\mathbb{S}^k(\sqrt{\frac{k}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{\frac{n-k}{n}})$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$;

(3) $\mathbb{S}^4$ 中的 Veronese 曲面.

之后, Itoh [20,21] 证明当截面曲率 $K \geqslant \frac{n}{2(n+1)}$ 时, $\mathbb{S}^{n+q}$ 中 n 维紧致极小子流形必为全测地球面或 Veronese 曲面. 2012 年, Gu 和 Xu [19] 运用由 Ge 和 Tang [17] 及 Lu [29] 证明的 DDVV (De Smet, Dillen, Verstraelen, Vrancken) 不等式, 将定理 6.1 中的拼挤条件由 $K \geqslant \frac{q-1}{2q-1}$ 改进为 $K \geqslant \frac{q\cdot\mathrm{sgn}(q-1)}{2(q+1)}$. Calabi [6] 证明了对于单位球面中具有常 Gauss 曲率 K 的闭极小曲面, K 的所有可能取值构成一个离散集 $\{K(k)\}_{k=1}^{\infty}$, 且 Gauss 曲率为 $K(k)$ 的闭极小曲面被 k 唯一决定, 其中 $K(k) = \frac{2}{k(k+1)}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. 对于 $K(1) = 1$ 和 $K(2) = \frac{1}{3}$ 的情形, 有下述刚性定理 (参见文献 [3,23]).

定理 6.2　设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{2+q}$ 中 2 维紧致极小子流形. 如果截面曲率 K 满足 $\frac{1}{3} \leqslant K \leqslant 1$, 则必有 $K \equiv 1$, 且 M 为全测地球面; 或者 $K \equiv \frac{1}{3}$, 且 M 为 $\mathbb{S}^4$ 中的 Veronese 曲面.

据此, Udo Simon 在 1980 年提出了下述猜想.

Udo Simon 猜想　设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{2+q}$ 中 2 维紧致极小子流形. 如果截面曲率 K 满足

$K(k+1) \leqslant K \leqslant K(k)$, 则必有 $K \equiv K(k)$ 或 $K \equiv K(k+1)$, 且 M 为 Calabi 所断言的极小曲面之一.

对于上述猜想在 $k=2$ 的情形, Kozlowski 和 Simon [22] 给出了肯定的回答.

定理 6.3 [22] 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{2+q}$ 中 2 维紧致极小子流形. 如果截面曲率 K 满足 $\frac{1}{6} \leqslant K \leqslant \frac{1}{3}$, 则必有 $K \equiv \frac{1}{3}$ 或 $K \equiv \frac{1}{6}$.

上述定理还给出了问题 6.1 在 $n=2$ 的情形的一个肯定回答, 此时 $S_0 = \frac{5}{3}$. 本文作者运用 Yau [57] 的一个分类定理, 将上述定理推广到平行平均曲率子流形的情形.

定理 6.4 1) 设 M 为球面 $\mathbb{S}^{2+q}(\sqrt{\frac{1}{c}})$ 中 2 维紧致的平行平均曲率子流形. 记 H 和 K 分别为 M 的平均曲率和截面曲率. 如果 $\frac{1}{6}(H^2+c) \leqslant K \leqslant \frac{1}{3}(H^2+c)$, 则必有 $K \equiv \frac{1}{3}(H^2+c)$ 或 $K \equiv \frac{1}{6}(H^2+c)$.

记 K 为球面 $\mathbb{S}^{2+q}$ 中 2 维极小子流形的截面曲率. 对于 2 维情形, 有 $2K = R$, 即截面曲率的拼挤问题与数量曲率的拼挤问题等价. 因此, Udo Simon 猜想的一个等价问题可表述为如下问题.

问题 6.2 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{2+q}$ 中 2 维紧致极小子流形. 如果第二基本形式模长平方 S 满足 $2 - \frac{4}{k(k+1)} \leqslant S \leqslant 2 - \frac{4}{(k+1)(k+2)}$, 则必有 $S \equiv 2 - \frac{4}{k(k+1)}$ 或 $S \equiv 2 - \frac{4}{(k+1)(k+2)}$.

对于 $k \geqslant 3$ 的情形, 目前该问题仍未被完整解决. 更一般地, 可将上述几个公开问题归纳为下述问题.

问题 6.3 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$ 中 n 维极小子流形. 记 S 为第二基本形式模长平方. 对于固定的 n 和 q, 是否存在非负数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, 当 $a_k \leqslant S \leqslant a_{k+1}$ 时, 有 $S \equiv a_k$ 或 $S \equiv a_{k+1}$?

设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$ 中的 n 维子流形. 对指标取值范围作如下约定:

$$1 \leqslant i, j, k, \ldots \leqslant n, \quad n+1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leqslant n+q.$$

在给定点 $p \in M$ 附近, 选取 $\mathbb{S}^{n+q}$ 上的局部幺正标架场 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+q}\}$, 使它们限制在 M 上时, $\{e_i\}_{i=1}^n$ 与 M 相切. 则第二基本形式可表示为 $h(e_i, e_j) = \sum_\alpha h_{ij}^\alpha e_\alpha$. 将 q 阶矩阵 $\{\sum_{i,j} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta\}$ 的特征值 $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^q$ 排序为 $\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \Lambda_q$. 则第二基本形式模长平方 S 满足 $S = \sum_\alpha \Lambda_\alpha$. Lu [29] 证明了下述关于球面中极小子流形的最优拼挤定理.

定理 6.5 [29] 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$ 中 n 维紧致极小子流形. 如果 $0 \leqslant S + \Lambda_2 \leqslant n$, 则必有下述情形之一:

(1) $S \equiv 0$, 且 M 为全测地球面;

(2) $q = 1$, $S \equiv n$, 且 M 为 Clifford 环面;

(3) $q \geqslant 2$, $S + \Lambda_2 \equiv n$, 且 M 为 Veronese 曲面.

注意到 $\Lambda_2 \leqslant \frac{1}{2}S$, 上述定理拓广了拼挤定理 [13, 23, 28, 38]. Leng 和 Xu [27] 进一步推广了定理 6.5. 基于 Lu [29] 的定理, 可提出球面中极小子流形关于 $S + \Lambda_2$ 的第二拼挤问题.

问题 6.4 设 M 为单位球面 $\mathbb{S}^{n+q}$ 中 n 维紧致极小子流形.

(1) 如果 $S + \Lambda_2$ 为常数, 是否存在正常数 $\delta(n)$, 使得当 $0 \leqslant S + \Lambda_2 - n \leqslant \delta(n)$ 时, 必有 $S + \Lambda_2 = n$ (参见文献 [29])?

(2) 是否存在正常数 $\delta(n)$, 使得当 $0 \leqslant S + \Lambda_2 - n \leqslant \delta(n)$ 时, 必有 $S + \Lambda_2 \equiv n$?

参考文献

1 Alencar H, do Carmo M. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. Proc Amer Math Soc, 1994, 120: 1223–1229

1) Xu H W, Xu Z Y. A pinching theorem for sectional curvature of PMC surfaces in a sphere. Preprint

2 Andrews B, Li H Z. Embedded constant mean curvature tori in the three-sphere. J Differential Geom, 2015, 99: 169–189
3 Benko K, Kothe M, Semmler K D, et al. Eigenvalues of the Laplacian and curvature. Colloq Math, 1979, 42: 19–31
4 Brendle S. Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture. Acta Math, 2013, 211: 177–190
5 Brendle S. Alexandrov immersed minimal tori in S^3. Math Res Lett, 2013, 20: 459–464
6 Calabi E. Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres. J Differential Geom, 1967, 1: 111–125
7 Cartan E. Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques. Math Z, 1939, 45: 335–367
8 Chang S P. A closed hypersurface with constant scalar and mean curvatures in $\mathbb{S}^4$ is isoparametric. Comm Anal Geom, 1993, 1: 71–100
9 Chang S P. On minimal hypersurfaces with constant scalar curvatures in S^4. J Differential Geom, 1993, 37: 523–534
10 Cheng Q M, Ishikawa S. A characterization of the Clifford torus. Proc Amer Math Soc, 1999, 127: 819–828
11 Cheng Q M, Nakagawa H. Totally umbilic hypersurfaces. Hiroshima Math J, 1990, 20: 1–10
12 Chern S S. Minimal submanifolds in a Riemannian manifold. University of Kansas, Department of Mathematics Technical Report 19. Lawrence: University of Kansas, 1968
13 Chern S S, do Carmo M, Kobayashi S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. In: Functional Analysis and Related Fields. Berlin: Springer-Verlag, 1970, 59–75
14 de Almeida S C, Brito F G B. Closed 3-dimensional hypersurfaces with constant mean curvature and constant scalar curvature. Duke Math J, 1990, 61: 195–206
15 Deng Q T, Gu H L, Wei Q Y. Closed Willmore minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in $\mathbb{S}^5(1)$ are isoparametric. Adv Math, 2017, 314: 278–305
16 Ding Q, Xin Y L. On Chern's problem for rigidity of minimal hypersurfaces in the spheres. Adv Math, 2011, 227: 131–145
17 Ge J Q, Tang Z Z. A proof of the DDVV conjecture and its equality case. Pacific J Math, 2008, 237: 87–95
18 Ge J Q, Tang Z Z. Chern conjecture and isoparametric hypersurfaces. In: Differential Geometry. Advanced Lectures in Mathematics, vol. 22. Somerville: International Press, 2012, 49–60
19 Gu J R, Xu H W. On Yau rigidity theorem for minimal submanifolds in spheres. Math Res Lett, 2012, 19: 511–523
20 Itoh T. On Veronese manifolds. J Math Soc Japan, 1975, 27: 497–506
21 Itoh T. Addendum to my paper "On Veronese manifolds". J Math Soc Japan, 1978, 30: 73–74
22 Kozlowski M, Simon U. Minimal immersions of 2-manifolds into spheres. Math Z, 1984, 186: 377–382
23 Lawson H B Jr. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. Ann of Math (2), 1969, 89: 187–197
24 Lawson H B Jr. Complete minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$. Ann of Math (2), 1970, 92: 335–374
25 Lei L, Xu H W, Xu Z Y. On Chern's conjecture for minimal hypersurfaces in spheres. arXiv:1712.01175, 2017
26 Lei L, Xu H W, Xu Z Y. On the generalized Chern conjecture for hypersurfaces with constant mean curvature in a sphere. Sci China Math, 2021, 64: 1493–1504
27 Leng Y, Xu H W. The generalized Lu rigidity theorem for submanifolds with parallel mean curvature. Manuscripta Math, 2018, 155: 47–60
28 Li A M, Li J M. An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere. Arch Math (Basel), 1992, 58: 582–594
29 Lu Z Q. Normal scalar curvature conjecture and its applications. J Funct Anal, 2011, 261: 1284–1308
30 Lusala T, Scherfner M, Souse L A M Jr. Closed minimal Willmore hypersurfaces of $S^5(1)$ with constant scalar curvature. Asian J Math, 2005, 9: 65–78
31 Münzner H F. Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. Math Ann, 1980, 251: 57–71
32 Muto H. The first eigenvalue of the Laplacian of an isoparametric minimal hypersurface in a unit sphere. Math Z, 1988, 197: 531–549
33 Peng C K, Terng C L. The scalar curvature of minimal hypersurfaces in spheres. Math Ann, 1983, 266: 105–113
34 Peng C K, Terng C L. Minimal hypersurfaces of spheres with constant scalar curvature. In: Seminar on Minimal Submanifolds. Annals of Mathematics Studies, vol. 103. Princeton: Princeton University Press, 1983, 177–198
35 Scherfner M, Weiss S, Yau S T. A review of the Chern conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres. In: Advances in Geometric Analysis. Advanced Lectures in Mathematics, vol. 21. Somerville: International Press, 2012, 175–187
36 Shen Y B. On intrinsic rigidity for minimal submanifolds in a sphere. Sci China Ser A, 1989, 32: 769–781
37 Shen Y B, Zhu X H. On stable complete minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$. Amer J Math, 1998, 120: 103–116
38 Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. Ann of Math (2), 1968, 88: 62–105
39 Suh Y J, Yang H Y. The scalar curvature of minimal hypersurfaces in a unit sphere. Commun Contemp Math, 2007, 9: 183–200

40 Sun H F, Ogiue K. Minimal hypersurfaces of unit sphere. Tohoku Math J (2), 1997, 49: 423–429
41 Tang Z Z, Wei D Y, Yan W J. A sufficient condition for a hypersurface to be isoparametric. Tohoku Math J (2), 2020, 72: 493–505
42 Tang Z Z, Yan W J. Isoparametric foliation and Yau conjecture on the first eigenvalue. J Differential Geom, 2013, 94: 521–540
43 Tang Z Z, Yan W J. On the Chern conjecture for isoparametric hypersurfaces. Sci China Math, 2023, 66: 143–162
44 Verstraelen L. Sectional curvature of minimal submanifolds. In: Proceedings of Workshop on Differential Geometry. Southampton: University of Southampton, 1986, 48–62
45 Wei S M, Xu H W. Scalar curvature of minimal hypersurfaces in a sphere. Math Res Lett, 2007, 14: 423–432
46 Wu H H, Shen C L, Yu Y L. An Introduction to Riemannian Geometry (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2014 [伍鸿熙, 沈纯理, 虞言林. 黎曼几何初步. 北京: 高等教育出版社, 2014]
47 Xin Y L. Minimal Submanifolds and Related Topics, 2nd ed. Nankai Tracts in Mathematics, vol. 16. Singapore: World Scientific, 2018
48 Xu H W. Pinching theorems, global pinching theorems and eigenvalues for Riemannian submanifolds. PhD Thesis. Shanghai: Fudan University, 1990
49 Xu H W. A rigidity theorem for submanifolds with parallel mean curvature in a sphere. Arch Math (Basel), 1993, 61: 489–496
50 Xu H W, Tian L. A new pinching theorem for closed hypersurfaces with constant mean curvature in S^{n+1}. Asian J Math, 2011, 15: 611–630
51 Xu H W, Xu Z Y. The second pinching theorem for hypersurfaces with constant mean curvature in a sphere. Math Ann, 2013, 356: 869–883
52 Xu H W, Xu Z Y. A new characterization of the Clifford torus via scalar curvature pinching. J Funct Anal, 2014, 267: 3931–3962
53 Xu H W, Xu Z Y. On Chern's conjecture for minimal hypersurfaces and rigidity of self-shrinkers. J Funct Anal, 2017, 273: 3406–3425
54 Yang H C, Cheng Q M. A note on the pinching constant of minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere. Chin Sci Bull, 1991, 36: 1–6
55 Yang H C, Cheng Q M. An estimate of the pinching constant of minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere. Manuscripta Math, 1994, 84: 89–100
56 Yang H C, Cheng Q M. Chern's conjecture on minimal hypersurfaces. Math Z, 1998, 227: 377–390
57 Yau S T. Submanifolds with constant mean curvature. Amer J Math, 1974, 96: 346–366
58 Yau S T. Submanifolds with constant mean curvature II. Amer J Math, 1975, 97: 76–100
59 Yau S T. Problem section. In: Seminar on Differential Geometry. Annals of Mathematics Studies, vol. 102. Princeton: Princeton University Press, 1982, 669–706
60 Zhang Q. The pinching constant of minimal hypersurfaces in the unit spheres. Proc Amer Math Soc, 2010, 138: 1833–1841

The Chern conjecture for minimal hypersurfaces in a sphere and its related problems

Hongwei Xu & Zhiyuan Xu

Abstract This is a survey on the Chern conjecture for minimal hypersurfaces in a sphere and its related problems. First of all, we review the background of the Chern conjecture for minimal hypersurfaces in a sphere. Then, we mainly introduce the progress on the Chern conjecture for compact minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in a sphere and compact minimal hypersurfaces in a sphere. Finally, we discuss generalized Chern conjectures on hypersurfaces with constant mean curvature in a sphere and minimal submanifolds in a sphere.

Keywords Chern conjecture for minimal hypersurfaces, gap of scalar curvature, pinching theorems, the second fundamental form

MSC(2020) 53C24, 53C42

doi: 10.1360/SSM-2023-0195