结合 L_0 优化与拉普拉斯算子的图像平滑方法

李孟航¹⁾, 高珊珊^{1,2,3)*}, 韩慧健^{1,2)}, 张彩明^{2,4,5)}

¹⁾ (山东财经大学计算机科学与技术学院 济南 250014)

²⁾ (山东省数字媒体技术重点实验室 济南 250014)

³⁾ (山东省中美数字媒体国际合作研究中心 济南 250014)

⁴⁾ (山东大学软件学院 济南 250101)

⁵⁾ (山东省未来智能计算协同创新中心 烟台 264025)

(gsszxy@aliyun.com)

摘 要: 针对平滑过度使图像的细节特征损失导致失真的现象, 提出了一种 L_0 测度优化与二阶拉普拉斯算子结合的图像平滑方法, 采用拉普拉斯算子约束图像颜色变化, 通过对 L_0 模型的优化减缓颜色梯度的变化, 达到图像颜色平滑过渡的目的. 为了在平滑过程中更好地保持图像边缘特征, 引入 Sobel 算子作为能量函数正则项, 并采用交替求解策略求解能量函数. 在图像平滑领域经典图像以及通过网络引擎搜索得到的图像上与 6 种平滑方法以及 7 种去噪方法进行了定性和定量比较实验, 结果表明, 所提方法在图像平滑的同时能够降低图像细节特征的损失, 有效地处理图像平滑中存在的阶梯状边缘以及颜色块状分布的现象, 并去除图像中的多种噪声, 而且所提方法的峰值信噪比和运行时间也较其他方法有所提升.

关键词: 图像平滑; 图像去噪; L_0 范数; 拉普拉斯算子; Sobel 算子

中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2021.18627

L_0 Optimization Using Laplacian Operator for Image Smoothing

Li Menghang¹⁾, Gao Shanshan^{1,2,3)*}, Han Huijian^{1,2)}, and Zhang Caiming^{2,4,5)}

¹⁾ (School of Computer Science and Technology, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014)

²⁾ (Shandong Provincial Key Laboratory of Digital Media Technology, Jinan 250014)

³⁾ (Shandong China-U.S. Digital Media International Cooperation Research Center, Jinan 250014)

⁴⁾ (Software College, Shandong University, Jinan 250101)

⁵⁾ (Shandong Co-Innovation Center of Future Intelligent Computing, Yantai 264025)

Abstract: Image smoothing often leads to the loss of image details and distortion because of over smoothing. An image smoothing method is presented which combines L_0 optimization and the second-order Laplacian operator. Laplacian operator is used to constrain the color change of the image, and L_0 optimization is used to minimize the change of the color gradient, so as to achieve the purpose of smooth color transition of the image. In order to keep the edge features of the image better in the process of smoothing, Sobel operator is introduced as the regular term of energy function, and the alternating solution strategy is adopted to solve the energy function. In the experiment, using the classical image in the field of image smoothing and the image obtained through network engine, the proposed method is compared qualitatively and quantitatively with 6 smoothing methods and 7 denois-

收稿日期: 2020-09-02; 修回日期: 2020-10-28. 基金项目: 国家自然科学基金重点项目(U1909210, 61772309, 61902217); 山东省自然科学基金(ZR2020MF037, ZR2019MF016, ZR2019MF051, ZR2019BF043); 山东省重点研发计划(2019GGX101007); 教育部规划基金(20YJA870013); 山东省高等学校青创人才引育计划团队项目. 李孟航(1997—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为图像处理; 高珊珊(1980—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, 论文通讯作者, 主要研究方向为计算机图形学、图像处理、信息可视化; 韩慧健(1971—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为 CG&CAD、数字媒体智能信息处理、智能预测与可视化决策系统等; 张彩明(1955—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为计算机图形学、图像处理、计算机辅助几何设计.

ing methods. The experimental results show that the proposed method can reduce the loss of image details while smoothing the image, effectively deal with the phenomenon of stepped edges and color block distribution in the image smoothing, and effectively remove various noises in the image. And the peak signal-to-noise ratio and running time of the proposed method are improved compared with other methods.

Key words: image smoothing; image denoising; L_0 norm; Laplacian operator; Sobel operator

图像的保边平滑, 即保持图像边缘特征的平滑, 是计算机视觉研究中的一个基本问题, 它的目标是在平滑图像的过程中保持图像的显著边缘. 图像保边平滑在图像处理中有多种应用, 它既是图像去噪、图像增强以及图像非真实渲染等应用的基础, 也可以作为其他应用的预处理. 常用的图像保边平滑的传统方法有基于滤波的局部方法以及基于优化的全局方法. 近年来, 卷积神经网络(convolutional neural networks, CNN)、循环神经网络(recurrent neural networks, RNN)等深度学习网络已经成功地应用于许多低层次的计算机视觉任务. 基于滤波的方法包括使用双边滤波(bilateral filter, BLF)^[1]和引导滤波^[2]等方法. 基于局部滤波的方法在保边能力与平滑程度之间相互制约, 此外, 迭代地使用滤波方法会产生伪影和阶梯状的平滑效果^[3]. 相对于滤波的方法, 基于全局优化的方法会考虑图像中所有的像素, 对保边能力与平滑程度的控制更为灵活. 目前基于优化的全局方法在能量函数中多使用一阶梯度信息^[4-5], 具有求解简单、易于保持图像显著结构的优点. 但由于应用了一阶梯度信息, 处理彩色图像后得到的是逐块的平滑区域, 而且每块平滑区域的颜色均相同, 失去了局部的显著特征, 从而导致物体识别等一些应用的处理效果不理想. 二阶梯度的应用能够避免块状平滑区域的出现, 实现颜色在平滑区域的平缓过渡, 更适合一些计算机视觉的研究. 本文提出了一种基于拉普拉斯算子的保边平滑方法, 其优点是在保持图像显著性边缘的同时, 避免了平滑处理后图像中颜色块的形成. 在实验部分, 本文展示了该方法在彩色图像的保边平滑以及 RGB 图像去噪中的应用. 详细叙述本文方法在彩色图像处理中的优势: 在平滑彩色图像时, 本文方法能够保持图像原有的结构, 并且实现颜色在平滑区域的平缓过渡. 此外, 处理图像中非均匀和均匀噪声时, 本文方法在保持结构和抑制噪声的同时, 能够有效地避免彩色图像的失真.

本文提出了 L_0 测度优化与二阶拉普拉斯算子

相结合的图像平滑方法, 在 L_0 优化模型中引入拉普拉斯算子作为模型正则项, 构造新的能量函数. 本文方法能够有效地保持图像的细节特征, 解决图像颜色变化的平滑过渡问题; 同时, 本文将 Sobel 算子作为正则项加入 L_0 优化能量函数, 能够更好地保持图像的显著边缘特征, 获得良好的图像平滑效果; 此外, 本文提出了一种交替求解策略, 用于求解能量函数. 该策略将能量函数分解为子问题进行求解以保证该算法的收敛性与稳定性.

1 相关工作

1.1 图像平滑

图像平滑研究有着悠久的历史, 最早的是传统滤波器, 如均值滤波和中值滤波. 这些算法仅着眼于特定的噪声, 应用受限. 由于这些算法是基于局部信息进行平滑, 平滑效果不佳且无法保护边缘. 目前, 应用于平滑的传统方法可分为 2 类, 分别是基于局部滤波的算法和基于全局优化的算法.

基于局部滤波的算法中, BLF^[1]将灰度信息与距离信息进行高斯加权, 用于保护局部边缘信息, 是平滑图像和保护边缘的折中算法. 但 BLF 的参数难以选择, 若灰度权重设置过大, 则边缘比较模糊; 否则无法突出图像的主要结构. 新型边缘保持性稳健 ρ -函数^[6]弥补了 BLF 边缘模糊的缺点, 将二者结合可增强算法鲁棒性. He 等^[2]提出了引导滤波算法, 是一种线性平均滤波, 具有不错的保边特性, 但其结果图在边缘处容易出现光环现象. 宋成芳等^[7]提出了尺度自适应的纹理滤波方法, 有效地实现“去纹理保结构”的图像平滑. 近年来提出的局部滤波器还有加权中值滤波器(weighted median filter, WMF)^[8]和静态动态联合滤波器(static and dynamic filter, SD Filter)^[9]. 局部滤波器在保持边缘、平滑噪声时具有简单性和有效性, 但其有一个共同的限制——引入伪影(如沿边缘的光晕). 由于局部滤波器只利用局部图像的统计特性, 而不能显式地控制图像的局部统计特性. 因此, 局部滤波

算法通常很难实现图像的渐进粗化^[5]。

第 2 类平滑算法是基于全局优化的方法,它通过优化一个全局目标函数得到平滑后的结果图。该目标函数通常包含一个数据项(保真项),用于约束原始图像与平滑图像之间的距离,以及一个正则化项,通过对图像特征进行选择 and 稀疏化以达到平滑的目的。Xu 等^[4]提出的 L_0 梯度最小化,是用梯度的 L_0 范数进行约束平滑,从而对图像的主要梯度进行保护。因此,其边缘处梯度幅值没有变化,具有较好的保真度;但细节处梯度幅值较小,被平滑后易造成局部失真。Paris 等^[10]提出一种基于局部拉普拉斯金字塔的保边平滑滤波算法,它将图像分解为多个尺度,在每个尺度中对图像进行分析滤波,最后通过金字塔重构原始图像,但是每个尺度中的域值参数对滤波结果影响很大。Aubry 等^[11]提出一种加速策略,加速了局部拉普拉斯金字塔滤波算法。Bi 等^[12]提出采用 L_1 范数作为正则项,而全变差约束平滑滤波算法^[13]采用了梯度的 L_1 范数作为正则项,对全局灰度突变进行调整,但该算法在边缘处易出现梯度衰减的现象,平滑后的边缘容易受到影响。

总之,对全局边缘进行处理会突出图像整体的大致轮廓,但是也会忽略局部显著的边缘,造成信息丢失。而对局部边缘进行处理,因其重点关注局部特征,缺乏全局梯度的比较,因此结果易产生伪影。所以,如何寻找一个平衡点是目前保边平滑滤波的主要研究问题。

随着研究的不断深入,神经网络越来越多地应用到图像平滑中。深度边缘感知滤波器(deep edge-aware filters, DEAF)^[14]使用 CNN 近似图像保边滤波的效果。联合神经网络(hybrid neural networks, HBN)^[15]将 CNN 与 RNN 相结合进行图像平滑,其中 CNN 用于计算输入 RNN 的权重矩阵, RNN 用于整合输入图像中 4 个方向的梯度信息。文献[16]引入了残差块,以保持图像精度。纹理结构感知网络(texture and structure aware filtering network, TSAFN)^[17]包括结构预测网络、纹理预测网络以及信息整合网络 3 个子网络, TSAFN 通过融合多尺度图像特征获取结构信息,对图像的边缘特征进行保持。然而,网络中的上采样与下采样会在一定程度上模糊图像边缘,其网络架构也需要更轻巧。

1.2 图像去噪

图像去噪的算法可分为局部和非局部 2 种方法。前者使用各向异性扩散和全变分等局部策略逐

个处理局部补丁;后者依赖于高斯混合模型和判别模型等强大的模型,其中自相似性、局部补丁以及结合空间和频域滤波器是非局部方法的常用技术。

传统的去噪方法大多是在像素邻域内进行计算,如均值滤波、以邻域平均值作为当前像素值的线性滤波以及在邻域间搜索中值的非线性中值滤波。当应用局部算法时,通常使用梯度值、梯度方向区分噪声和干净数据。各向异性扩散和全变分是 2 种常用的局部算法。各向异性扩散^[18]考虑了噪声与结构在梯度方向的差异,噪声的梯度方向具有不一致性,会使其计算结果小于结构的计算结果。为了增强图像滤波的效果,文献[19]使用阈值寻优的高保真各向异性滤波模型,较好地保持了图像细节。基于同样的理论,全变分方法^[20]是使用梯度方向除以梯度值进行正则化的。文献[21-22]使用基于块的局部最优维纳滤波器进行去噪。它们使用线性滤波器,并通过均方误差(mean-square error, MSE)实现近似最小化。这些局部策略有许多变形处理不同的噪声模型,如加性噪声、乘性噪声^[23]、指数噪声、高斯噪声、椒盐噪声^[24]等,但是这些局部方法在去噪时不可避免地会不同程度地削弱图像的结构、纹理和细节。

为了克服局部方法的缺点,获得更好的去噪性能,非局部算法应运而生,并且成为现有的去噪方法中的主流方法。非局部均值算法(non-local means, NLM)^[25]利用一种基于自相似性的 2 步去噪方法,首先找到局部斑块的相似斑块,然后对这些相似斑块进行加权平均。快速 NLM 算法^[26]用轻微的图像质量损失换取了更低的去噪时间。为了提高算法的性能,提出了一些 boosting 技术,并设计了空间自适应迭代滤波(spatially adaptive iterative filtering, SAIF)^[27],以提高 NLM 的自适应性和性能。针对基于 NLM 的方法会导致轮廓模糊的问题,萧澍等^[28]提出了利用控制核函数获取椭圆窗口和图像块参数的自适应 NLM 算法。针对基于 NLM 的方法只能处理加性噪声的缺点,提出了基于 K 均值和奇异值分解的去噪算法^[29-30]。该算法将奇异值分解产生的特征向量作为字典并利用图像的冗余特性,在字典的基础上形成输入图像的稀疏表示,并进行迭代优化。虽然该方法取得了很好的效果,但其耗时也不容忽视。小波变换常应用于图像去噪,如文献[31]利用多元统计模型获得的信息自适应地预测分形小波无噪图像编码。文献[32]结合了非下采样 Shearlet 模型与 HMT 模型,并通过 Cauchy 分布拟合模型系数,在噪声水平为 30~40 dB

时, C-NSST-HMT 模型有降噪优势. Dabov 等^[33]提出的结合了空间滤波和频域滤波的方法, 利用自相似性和稀疏性进行块匹配和 3D 滤波(block-matching and 3D filtering, BM3D), 但是该算法引用的 3D 变换可能会产生额外的伪影. 为了提高彩色图像去噪的精度, 提出了非局部贝叶斯算法. 文献[34]使用了一种新的双域图像去噪(dual-domain image denoising, DDID)方法, 其具有性能好、无斑块和算法简单等优点. 为了提高 DDID 的鲁棒性, 在空间域和频域上使用回降估计量, 并由此引入了渐进图像去噪(progressive image denoising, PID)^[35], 提出了一种基于稀疏编码的带额外块共稀疏约束的过完备稀疏变换模型(overcomplete transform model with block cosparsity, OCTOBOS)来稀疏不同的纹理. 文献[36]使用基于分组稀疏编码的复数图像降噪算法, 其对平滑区域大或噪声水平高的图像具有降噪优势. 文献[37]使用基于局部补丁先验的去噪(patch group based nonlocal self-similarity prior learning for image denoising, PGPD)方法, 以弥补未利用的干净图像的非局部自相似性. 三边加权

稀疏编码方案(trilateral weighted sparse coding scheme, TWSC)^[38]使用基于统计先验信息的三重权重矩阵, 在处理非均匀噪声时表现得更好.

2 本文方法

由于 L_0 梯度最小化模型在处理图像的同时能够很好地保护图像的主要边缘, 该模型在众多应用中都有着不凡的性能. 然而, L_0 梯度最小化模型是为梯度设置阈值的模型, 会导致平滑块内颜色一致. 因此, 经此模型处理得到的结果图中存在着较为严重的阶梯效应, 并且不能很好地保护图像的细节特征. 在处理色彩丰富的图像时, L_0 梯度最小化模型牺牲了过多的图像细节, 从而导致了结果图的失真. 为了克服这些缺点, 在保持边缘的前提下保证彩色图像中非结构部分的颜色平滑过渡, 本文提出将 L_0 梯度最小化模型中的一阶梯度算子推广到二阶微分算子, 并将其应用到图像平滑和去噪中. 图 1 所示为基于梯度的 L_0 模型和本文方法对一维信号进行平滑处理的结果对比.

图 1 一维信号的平滑结果对比

如图 1a~图 1c 所示, 图 1a 为输入的一维信号; 图 1b 为采用基于梯度的模型(L_0 梯度最小化模型^[4])进行处理的结果, 结果图中包含了许多阶梯状信号; 图 1c 为由本文方法产生的结果图, 在保持信号显著边缘的同时避免了阶梯状信号的出现. 图 2 将 L_0 梯度最小化模型^[4]和本文方法的平滑处理结果进行了对比, 并绘制了小熊图片中的某一水平线的颜色变化曲线, 其结果显示了本文方法实现颜色平滑过渡的优越性. 其中, 曲线图横坐标为小熊图像中同一水平线上的像素点, 纵坐标为该像素点对应的像素值.

本文对 L_0 梯度最小化模型进行改进, 使用拉普拉斯算子控制颜色缓变程度, 引入 Sobel 算子更好地进行边缘保持, 使该模型具有避免图像颜色

失真和面对噪声更具鲁棒性的优点.

2.1 L_0 梯度最小化模型

L_0 范数指的是向量中非零元素的个数. L_0 梯度最小化模型采用 L_0 范数作为正则化项, 对梯度进行稀疏表达, 对图像的显著边缘(强梯度)有较强的保持能力. 设 X 为原图像, Y 为处理后的图像, $\partial_x Y$ 和 $\partial_y Y$ 分别为处理后的图像沿 x 和 y 方向的梯度, 则对图像中任意点处的像素的梯度可表示为

$$\nabla Y = \{\partial_x Y, \partial_y Y\} \quad (1)$$

图像梯度的 L_0 范数可表示为

$$F(\nabla Y) = \#\{n \mid |\partial_x Y| + |\partial_y Y| \neq 0\} \quad (2)$$

其中, $\#\{\}$ 表示图像中梯度不为零的像素个数. $F(\nabla Y)$ 作为正则化项, 在 L_0 梯度最小化模型的能

图 2 同一水平线上彩色图像的平滑结果对比

量函数中与保真项结合. 则 L_0 梯度最小化模型可以表示为 $\min_Y |Y - X|^2 + \lambda F(\nabla Y)$. 其中, λ 控制着平滑项的权重大小. 但是, 由于 $F(\nabla Y)$ 的取值范围从几十到几千不等, 并且是非凸且非可求导的, 故对 $F(\nabla Y)$ 的求解相对比较困难. 为了解决这个问题, L_0 梯度最小化模型首先引入了 2 个辅助变量 h 和 v , 则能量函数可重写为

$$\min_Y |Y - X|^2 + \beta (|\partial_x Y - h|^2 + |\partial_y Y - v|^2) + \lambda \|h\| + \|v\|_0.$$

其中, β 是一个参数, 约束着被引入的变量 h 和 v 与其对应图像梯度 $\partial_x Y$ 和 $\partial_y Y$ 的相似性.

采用交替最小化算法的求解策略将上述表达式分解为 2 个子公式

$$\min_Y |Y - X|^2 + \beta (|\partial_x Y - h|^2 + |\partial_y Y - v|^2),$$

$$\min_{(h,v)} \beta (|\partial_x Y - h|^2 + |\partial_y Y - v|^2) + \lambda \|h\| + \|v\|_0;$$

并进行迭代优化得到最优解.

2.2 拉普拉斯算子

拉普拉斯算子是根据图像 $f(x, y)$ 在 x 和 y 方向上的二阶偏导数定义的一种边缘检测算子, 如

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \quad (3)$$

在数字图像 $\{f(i, j)\}$ 中, 经典拉普拉斯算子可以定义为

$$\nabla^2 f(x, y) \approx f(x, y-1) + f(x, y+1) + f(x-1, y) + f(x+1, y) - 4f(x, y) \quad (4)$$

用矩阵表示为

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Prewitt 提出了一个 8 邻接拉普拉斯算子, 该算子的矩阵表示为

$$H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

将 4 邻接拉普拉斯算子进行水平和垂直方向分解可以得到 2 个分别对应于沿图像行和列的二阶微分

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

同样地, Prewitt 提出的 8 邻接拉普拉斯算子也可分解为沿图像行和列的二阶微分, 即

$$H_8 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

本文采用 Prewitt 提出的 8 邻接拉普拉斯算子进行实验.

2.3 基于拉普拉斯算子的 L_0 优化模型

本文使用 L_0 范数作为正则化项, 提出了一种基于全局优化的平滑方法解决图像的平滑、去噪问题. 由于 L_0 范数是 NP-hard 问题, 无法通过梯度下降等最优化方法得到解决. 在以往研究中, 针对

L_0 范数的难求解问题, Wang 等^[39]提出了用交替求解目标函数的解决策略进行计算. 文献[4]利用该策略将 L_0 梯度优化模型应用于图像平滑, 在成功解决 NP-hard 问题的同时, 证明了此 L_0 模型具有能够保持梯度的特性. 在网格去噪^[40]、内在图像分解^[41-42]、点集去噪^[43]、图像去模糊^[44]和纹理去除^[45]等应用中, 均将 L_0 范数作为正则项, 并采用交替求解目标函数的解决策略进行最优化的近似求解. 为了提高计算效率, Nguyen 等^[46]还提出了一种应用区域融合理论的快速的 L_0 平滑技术. 本文提出的模型结合了 L_0 范数和图像拉普拉斯算子, 并应用了交替求解策略进行优化求解.

本文方法中使用的拉普拉斯算子是二阶梯度算子, 表示了一幅图像在 x 和 y 方向的二阶偏导. 对拉普拉斯算子的稀疏化即对梯度的梯度稀疏化, 从而控制结果图中颜色变化(梯度)的幅度, 在保证颜色不失真的前提下对二阶梯度, 即梯度的变化进行调整.

L_0 梯度最小化模型是通过梯度的稀疏化对图像进行平滑. 但是, 在处理彩色图像时, 梯度的稀疏化会造成颜色信息的大量流失; 在处理有噪声或杂质的图像时, 噪声将被视为强梯度像素点, 从而使图像产生错误的梯度. 基于此种情况的考虑, 本文将 L_0 范数与作为二阶算子的拉普拉斯算子相结合. 与此同时, 为了更好地保持图像的边缘, 本文将 L_0 范数与 Sobel 算子相结合作为正则化项. 通过 L_0 范数与拉普拉斯算子、Sobel 算子的结合, 可以得到在边缘处颜色变化明显, 非边缘处颜色能够平滑过渡的结果图.

设 I 是输入图像, S 表示处理后的图像, E 表示使用 Sobel 算子的保边算子, H 表示使用拉普拉斯算子的二阶空间导数算子. 本文提出的将 L_0 优化与拉普拉斯算子相结合的图像平滑模型可以表示为 $\min_S |S - I|^2 + \lambda |H(S)|_0 + \beta |E(S)|_0$. 其中, λ 和 β 均为平滑参数;

$$H(S) = |\partial^2 S_x| + |\partial^2 S_y| \quad (9)$$

$$E(S) = |E(S_x)| + |E(S_y)| \quad (10)$$

作为正则化项, 分别表示拉普拉斯算子和 Sobel 算子.

首先, 将辅助变量 μ 和 v 引入模型表达式, 则模型可重写为

$$\begin{aligned} \min_S & |S - I|^2 + \gamma \left(|\partial^2 S_x - \mu_x|^2 + |\partial^2 S_y - \mu_y|^2 \right) + \\ & \epsilon \left(|E(S_x) - v_x|^2 + |E(S_y) - v_y|^2 \right) + \\ & \lambda \|\mu_x\| + \|\mu_y\|_0 + \beta \|v_x\| + \|v_y\|_0. \end{aligned}$$

其中, γ 和 ϵ 分别控制 (μ_x, μ_y) 与 $H(S)$, (v_x, v_y) 与 $E(S)$ 之间的相似性.

本文采用交替最小化的策略进行模型的最优化求解, 即通过引入变量将 L_0 优化问题分解, 进而逐个解决. 则上述表达式可以分解为 3 个子问题, 交替求解 S , (μ_x, μ_y) 和 (v_x, v_y) .

2.4 算法求解过程

本节详细叙述了 3 个子问题的求解过程: 固定 (μ_x, μ_y) 和 S , 得到 (v_x, v_y) 最优解; 固定 S 和 (v_x, v_y) , 得到 (μ_x, μ_y) 最优解; 固定 (μ_x, μ_y) 和 (v_x, v_y) , 得到 S 最优解.

2.4.1 子问题 1. 计算 (v_x, v_y)

当 (μ_x, μ_y) 和 S 固定时, 模型表达式可简化为

$$\begin{aligned} \min_{(v_x, v_y)} & \beta \|v_x\| + \|v_y\|_0 + \\ & \epsilon (|E(S_x) - v_x|^2 + |E(S_y) - v_y|^2). \end{aligned}$$

其中, $E(S_x)$ 和 $E(S_y)$ 分别计算了水平和垂直方向的 Sobel 算子. 通过对上述表达式的求解, 可以得到 (v_x, v_y) 的唯一解为

$$(v_x, v_y) = \begin{cases} 0, & |E(S_x)^2 + E(S_y)^2| \leq \frac{\epsilon}{\beta} \\ (E(S_x), E(S_y)), & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

2.4.2 子问题 2. 计算 (μ_x, μ_y)

固定 S 和 (v_x, v_y) , 首先用式(9)(10)求解 $E(S)$ 和 $H(S)$, 则模型表达式可简化为

$$\min_{(\mu_x, \mu_y)} \gamma \left(|H(S_x) - \mu_x|^2 + |H(S_y) - \mu_y|^2 \right) + \lambda \|\mu_x\| + \|\mu_y\|_0.$$

其中, $H(S_x)$ 和 $H(S_y)$ 分别计算了水平和垂直方向的拉普拉斯算子. 经过计算可得 (μ_x, μ_y) 的唯一解为

$$(\mu_x, \mu_y) = \begin{cases} 0, & |H(S_x)^2 + H(S_y)^2| \leq \frac{\lambda}{\gamma} \\ (H(S_x), H(S_y)), & \text{其他} \end{cases} \quad (12)$$

2.4.3 子问题 3. 更新 S

固定 (μ_x, μ_y) 和 (v_x, v_y) , 则求解 S 的目标函数可表示为

$$\min_S |S - I|^2 + \gamma \left(|\partial^2 S_x - \mu_x|^2 + |\partial^2 S_y - \mu_y|^2 \right) + \epsilon \left(|E(S_x) - v_x|^2 + |E(S_y) - v_y|^2 \right).$$

由于在求解 (μ_x, μ_y) 时, (v_x, v_y) 已收敛至 $(E(S_x), E(S_y))$, 因此上述表达式可以简化为

$$\min_S |S - I|^2 + \gamma \left(|\partial^2 S_x - \mu_x|^2 + |\partial^2 S_y - \mu_y|^2 \right).$$

求解 S 的目标函数中的项均为二次项. 因此, 为了节省计算时间, 本文用快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)代替矩阵计算对上述表达式进行求解. S 的解为

$$S = F^{-1} \left(\frac{F(I) + \epsilon(F(H(\cdot) * F(\mu)))}{F(1) + \epsilon(F(H^2))} \right) \quad (13)$$

其中, $H(\cdot)$ 为拉普拉斯算子; μ 为向量 (μ_x, μ_y) ; $F(\cdot)$ 表示快速傅里叶变换; F^{-1} 表示快速傅里叶逆变换.

本文算法步骤如下.

输入. 原始图像 I , 参数 $\epsilon_0, \epsilon_{\max}, k$ 以及平滑参数 λ 和 β .

输出. 结果图像 S .

Step1. 读入图像.

Step2. 利用式(11)计算 $v^{(i)}$.

Step3. 利用式(12)计算 $\mu^{(i)}$.

Step4. 利用式(13)更新 $S^{(i+1)}$.

Step5. $\epsilon \leftarrow k\epsilon, i++$.

Step6. 若 $\epsilon \geq \epsilon_{\max}$, 迭代结束; 否则重复 Step2~Step6.

2.5 算法分析

2.5.1 参数

ϵ 是控制迭代次数的参数. ϵ 从一个小数值 ϵ_0 开始, 在每次迭代中均乘以 k . 当 $\epsilon > \epsilon_{\max}$ 时, 迭代停止; 此收敛条件有效地加快了收敛速度. 在本文方法中, 设置 $\epsilon_0 = 0.2\lambda$, $\epsilon_{\max} = 10^5$, $k = 1.5$. 经过实验证明, 此参数取值可达到效率和性能之间的良好平衡. k 取值越小, 算法的迭代次数会增多, 得到的图像质量会更高. β 是用于区分显著结构和其他像素点的参数, λ 是控制结构粗糙程度的参数. 大多数情况下, 令 β 取值为 10 倍的 λ 可以让本文方法具有最佳性能; λ 取值越大, 输出图像越平滑. λ 和 k 的影响如图 3 所示.

图 3 参数选取对实验结果的影响

2.5.2 收敛性

Xu 等^[4]已经证明了子问题 1 和子问题 2 具有闭式解. 子问题 3 中求解 S 的表达式是一个二次方程, 同样具有闭式解. 因此, 本文模型的表达式可在迭代中收敛. 实际上, 本文只执行有限的迭代次数. 图 4 给出了平滑图像时均方误差 MSE 随迭代次数逐渐增多时的变化曲线, 可以看出, 本文方法有较好的收敛性和稳定性.

2.5.3 模型时间分析

在迭代过程中, 求解子问题 S 所耗费的时间

图 4 MSE 随迭代次数增加的变化情况

最长, 因此本文使用 FFT 加快求解的速度. 在实验中, 最多迭代 40 次即可得到输出结果. 在 Intel Core(TM)i7-9700CPU@3.00 环境下, 本文方法使用 Matlab 对 600×800 像素的图像进行去噪只需 4 s.

3 实验与分析

3.1 主观分析

3.1.1 图像的保边平滑

将本文方法与 L_0 梯度最小化^[4], WMF^[8], SD

Filter^[9], FGS^[47], FLL Filter^[11]和 L_1 Smoothing^[12] 6 种经典的平滑方法进行了比较.

本文方法具有较好的细节保持特性, 如图 5~图 7 所示. 其中, 图 5 所示为采用不同方法对花瓣的平滑结果. 经过本文方法处理后的花蕊依然能保持其结构, 而其他方法均出现了不同程度的颜色融合的现象.

图 6 所示为采用不同方法对一幅丘陵景色图处理后的结果. 图中红框部分如细节放大部分所示. 经过本文方法处理后的结果图能够保持丘陵

图 5 不同方法对花瓣图像的平滑结果对比

图 6 不同方法对丘陵图像的平滑结果对比

图 7 不同方法对海浪图像的平滑结果对比

的高低起伏,可以较好地保持细节,如图 6h 中放大的细节所示;而经过 L_1 , L_0 和 WMF 处理后,丘陵部分的颜色呈块状分布,细节遭到损失;经过 FLL Filter 处理后,丘陵部分的颜色趋于一致,同样无法保持细节.此外,FGS, WMF 和 SD Filter 处理后,图像的边缘呈锯齿状分布;FLL Filter 处理后的图像边缘模糊,如图 6c 中蓝框所示.因此,在这些方法中,本文方法的平滑效果最好.

图 7 所示为采用不同方法对一幅海浪图像处理后的结果图. L_1 和 L_0 方法的处理使云彩颜色变得统一,丢失了颜色信息,细节无法保持;SD Filter 和 WMF 平滑后的云彩和海浪颜色过渡不够平缓,破坏了局部细节.除此之外,FGS 平滑后的海浪出现了边缘不明显的问题.在对比下,本文方法依然显示出了它在局部细节保持的优势.

图 8 所示为不同方法对一幅彩虹图处理后的结果.经过 L_1 , L_0 , FLL Filter 和 WMF 处理后,结果图中的彩虹不同颜色间的边缘已被模糊;经过 L_1 , L_0 , SD Filter 处理后的彩虹边缘有锯齿,如图

8e 中红框所示.可以看出,本文方法具有较好的边缘保持特性,能够保持彩虹的边缘和颜色信息,在这些方法中平滑效果最好.

本文方法具有较好的颜色保持特性,能够有效地避免颜色失真,如图 9 和图 10 所示.图 9 所示为不同方法处理一幅油画后的结果对比.经过 SD filter 和 FGS 的处理后,山顶和天空的颜色信息均有损失,如图 9b 和图 9e 中红框所示;FLL Filter 的处理使图像的色调发生了改变,造成了颜色失真;在 L_1 和 L_0 方法处理后,山、湖和天空的颜色趋于统一,破坏了图像结构,同样造成了颜色失真;FGS 处理后的假山边缘出现伪影,如图 9b 中蓝框所示.而本文方法既能够平滑像天空、山体等区域,又能够保持原图中的颜色信息,在 7 种方法中处理效果最好.

图 10 所示为不同方法对紫藤花的平滑结果.本文方法在不损失颜色信息的同时实现了颜色平滑过渡,没有出现经其他方法处理后出现的花瓣或背景失真的情况.

图 8 不同方法对彩虹图像的平滑结果对比

图 9 不同方法对油画图像的平滑结果对比

图 10 不同方法对紫藤图像的平滑结果对比

图 11~图 13 所示为不同方法在不同自然情境下的平滑结果, 并进行了综合分析. 经过 L_1 , L_0 和 FGS 处理后, 结果图中的颜色易呈块状分布, 导致图像失真, 如图 11b 细节的边缘失真、图 12d 以及图 13g 中 SD Filter 的处理会使边缘或模糊或有锯齿状产生, 以及图 11e 中的云彩边缘; FLL 的处理结果损失了过多细节并伴随有色调变化, 如图 12c 所示; WMF 的处理结果不能很好地实现颜色平滑过渡, 存在明显边界线, 如图 12f 所示. 本文方法在实现颜色平滑过渡的同时并无锯齿状边缘的产生, 使平滑后的图像十分自然, 整体效果是最好的.

3.1.2 本文方法在图像去噪中的应用

本文提出的模型中, 拉普拉斯算子具有将颜色平滑过渡的二阶特性, 对平滑噪声图像具有一定优势, 可用于对 RGB 图像进行去噪. 在图像去噪的实验中, 本文分别对加性高斯白噪声和椒盐噪声进行去除.

加性高斯白噪声 (additive white Gaussian noise, AWGN) 指的是一种各频谱分量服从均匀分布 (即白噪声), 且幅度服从高斯分布的噪声 (随机变量), 其随机性也决定了采样点的不相关性. 本文通常利用 AWGN 与真实系统噪声的相似性模拟真实噪声.

图 11 不同方法对夕阳图像的平滑结果对比

图 12 不同方法对旗帜图像的平滑结果对比

图 13 不同方法对沙滩图像的平滑结果对比

椒盐噪声是伴随着脉冲信号而产生的,图像的获取和传输均可能产生脉冲信号.将胡椒噪声和盐噪声随机分布到一幅干净的图像中,得到一个有噪声和干净像素的图像.

在实验中,测试了本文方法应用于添加了高斯白噪声和椒盐噪声的图像,并且与5个最新的去噪算法进行了比较,分别是CBM3D^[33], L_0 梯度最小化^[4],PGPD^[37],TWSC^[38]和MCWNNM^[48].实验证明,本文方法不仅能够处理不同的噪声模型,在对有颜色渐变RGB图像进行去噪的同时,还能够保证处理后的图像不失真.

图14 不同方法去高斯白噪声结果对比

图15所示为不同方法处理椒盐噪声干扰后的图像的结果对比,其中噪声的标准差为0.05dB.可以看出,TWSC和PGPD在实验中未能去除噪声; L_0 梯度最小化无法减少噪声,随着平滑参数的增大只会模糊更多的细节;MCWNNM能够去除全部的

图14所示为不同方法对添加了高斯白噪声的卡通图像处理后的结果对比.TWSC不能很好地去除原图像中的噪声; L_0 梯度最小化无法保持图像中的鼻子和嘴巴原有的颜色;CBM3D在去噪的同时会模糊整个图像;MCWNNM处理后的图像出现了原图像中不存在的纹理,引入了新的噪声;经过PGPD处理后,结果图像的前景去除了噪声并且保留了颜色信息,但是图像的背景没有保持原有的颜色,而是受了噪声的影响.对比显示,本文方法在去除噪声的同时,能够不损失颜色信息的优势.

噪声,但会不可避免地产生明显的伪影;CBM3D对非均匀噪声的处理具有优势,并且未产生伪影;本文方法具有较好的局部显著结构保持能力,且在噪声去除方面具有优势,产生了与CBM3D相似的效果,但CBM3D的耗时不容忽视.

图15 不同方法去椒盐噪声结果对比

图16所示为不同方法对添加了椒盐噪声水果图处理后的结果对比.可以看出,TWSC和PGPD在实验中未能去除噪声; L_0 方法很好地保留了边缘,但忽略了一些噪声;CBM3D和MCWNNM的处理会使整个图像褪色,并且背景的噪声无法去除干净,如图16c和图16d中放大的细节所示;本文方法具有较好的颜色信息保持能力,不仅保留了原图颜色信息,而且很好地去除了噪声,如蓝色框中将黑色背景放大的细节所示.显然,本文方法在这些方法中去噪效果最好.

3.2 客观评价分析

峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio, PSNR)

是一种衡量图像质量的指标.

PSNR是最为常用的图像平滑客观评价指标.图像的峰值信噪比越大,平滑效果越好.表1所示为不同平滑方法对4幅图像处理的峰值信噪比的比较.其中,本文方法的PSNR较高,因此具有较好的平滑效果.表1所示为不同方法对4幅图像进行平滑所需的运行时间及PSNR对比.由于本文方法的迭代过程较为耗费时间,运行时间并非最短,但仍然比较有效,相比SD Filter, L_0 和 L_1 方法,本文方法的运行时间依然具有较大优势.在后续研究中,将探索新的能量函数求解方式,以减少运行时间.

图 16 不同方法水果图去椒盐噪声结果对比

表 1 不同方法对图像平滑效果的 PSNR 和运行时间对比

图序	FGS ^[47]		FLL ^[11]		L_0 ^[4]		SD Filter ^[9]		WMF ^[8]		L_1 ^[12]		本文	
	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s
5	30.81	1.51	26.00	1.08	28.12	9.17	29.80	52.27	34.24	2.05	28.27	8.58	36.57	6.10
6	30.56	5.38	25.87	1.57	27.30	4.27	30.81	17.91	31.77	1.23	27.50	4.12	31.30	3.41
7	28.69	0.65	24.71	0.63	27.99	2.37	29.09	9.78	32.59	1.33	28.01	2.40	38.72	1.74
8	27.76	0.70	24.00	0.37	25.58	1.98	25.61	10.00	27.85	0.75	24.91	1.69	28.92	1.47
平均值	29.46	3.30	25.15	0.91	27.24	4.45	28.82	22.49	31.61	1.34	27.17	4.19	33.88	3.18

自然界中的图片多为带噪声的图片,在对噪声图像进行处理时,与 TWSC 和 MCWNNM 需要时间计算系数矩阵相比,PGPD 需要大量的时间获取先验信息,本文方法只需要耗费计算结果图像的时间.因此,与其他方法相比,本文方法的处理时间非常短.表 2 还展示了平滑后图 14~图 16 的 PSNR 对比.在保证去噪效果的前提下,本文方法

的运行时间最短;由 PSNR 的均值比较可以看出,本文方法的去噪效果较好.

由表 1 和表 2 可以看出,在图像的平滑和去噪中,本文方法的 PSNR 均值最高,从而证明了对图像平滑和去噪的有效性.因此,从主观视觉效果和客观评价指标来看,本文方法在图像平滑和图像去噪方面均具有一定优势.

表 2 不同方法对图像去噪效果的 PSNR 和运行时间对比

图序	CBM3D ^[33]		MCWNNM ^[48]		L_0 ^[4]		TWSC ^[38]		PGPD ^[37]		本文	
	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s
14	23.76	6.71	28.21	547.58	22.82	3.19	20.28	691.21	27.48	34.68	28.17	1.58
15	27.12	17.29	24.91	1032.25	18.19	5.42	20.54	1279.87	21.22	61.98	28.24	4.98
16	20.59	2.97	23.65	458.00	18.27	1.51	23.03	253.45	20.23	12.59	20.87	1.36
平均值	23.82	8.99	24.52	502.79	19.76	3.37	21.28	472.33	22.97	54.63	25.76	2.64

4 结 语

对彩色图像应用拉普拉斯算子可以获取图像的二阶梯度信息,利用二阶梯度信息进行图像平滑可以有效地保持图像的颜色信息.本文使用拉普拉斯算子将 EPS 模型推广到高阶,避免了图像平滑过程中块状颜色区域的出现.同时,本文使用 Sobel 算子解决了图像平滑过程中边缘无法保持的问题.实验结果证明,通过保留颜色渐变等细节,本文方法能够确保平滑后的图像不失真,还可以应用于图像去噪,能够快速、有效地去除 RGB 图

像的多种噪声.

参考文献(References):

- [1] Tomasi C, Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images[C] //Proceedings of the 6th International Conference on Computer Vision. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1998: 839-846
- [2] He K M, Sun J, Tang X O. Guided image filtering[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(6): 1397-1409
- [3] Buades A, Coll B, Morel J M. The staircasing effect in neighborhood filters and its solution[J]. IEEE Transactions

- on Image Processing, 2006, 15(6): 1499-1505
- [4] Xu L, Lu C W, Xu Y, *et al.* Image smoothing via L_0 gradient minimization[J]. ACM Transactions on Graphics, 2011, 30(6): Article No.174
 - [5] Farbman Z, Fattal R, Lischinski D, *et al.* Edge-preserving decompositions for multi-scale tone and detail manipulation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(3): Article No.67
 - [6] Shao Wenze, Wei Zhihui. A unified designing framework for nonlinear digital filters and behavior analysis[J]. Chinese Journal of Computers, 2007, 30(1): 91-102(in Chinese) (邵文泽, 韦志辉. 一种非线性数字滤波器的统一设计框架及其性能分析[J]. 计算机学报, 2007, 30(1): 91-102)
 - [7] Song Chengfang, Xiao Chunxia. Scale-adaptive bilateral texture filtering[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2019, 31(11): 1925-1934(in Chinese) (宋成芳, 肖春霞. 尺度自适应的纹理滤波方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2019, 31(11): 1925-1934)
 - [8] Zhang Q, Xu L, Jia J Y. 100+ times faster weighted median filter(WMF)[C] //Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2014: 2830-2837
 - [9] Ham B, Cho M, Ponce J. Robust guided image filtering using nonconvex potentials[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2018, 40(1): 192-207
 - [10] Paris S, Hasinoff S W, Kautz J. Local Laplacian filters: edge-aware image processing with a Laplacian pyramid[J]. ACM Transactions on Graphics, 2011, 30(4): Article No.68
 - [11] Aubry M, Paris S, Hasinoff S W, *et al.* Fast local Laplacian filters: theory and applications[J]. ACM Transactions on Graphics, 2014, 33(5): Article No.167
 - [12] Bi S, Han X G, Yu Y Z. An L_1 image transform for edge-preserving smoothing and scene-level intrinsic decomposition[J]. ACM Transactions on Graphics, 2015, 34(4): Article No.78
 - [13] Fusco N, Moscariello G, Sbordon C. A formula for the total variation of SBV functions[J]. Journal of Functional Analysis, 2016, 270(1): 419-446
 - [14] Xu L, Ren J S J, Yan Q, *et al.* Deep edge-aware filters[C] //Proceedings of the 32nd International Conference on International Conference on Machine Learning. New York: ACM Press, 2015: 1669-1678
 - [15] Liu S F, Pan J S, Yang M H. Learning recursive filters for low-level vision via a hybrid neural network[C] //Proceedings of the European Conference on Computer Vision. Heidelberg: Springer, 2016: 560-576
 - [16] Fan Q N, Yang J L, Wipf D, *et al.* Image smoothing via unsupervised learning[J]. ACM Transactions on Graphics, 2018, 37(6): Article No.259
 - [17] Lu K Y, You S D, Barnes N. Deep texture and structure aware filtering network for image smoothing[C] //Proceedings of the European Conference on Computer Vision. Heidelberg: Springer, 2018: 229-245
 - [18] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639
 - [19] Zhou Xianchun, Wang Meiling, Shi Lanfang. Anisotropic filtering model of high-fidelity based on threshold optimization[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2016, 28(9): 1550-1559(in Chinese) (周先春, 汪美玲, 石兰芳. 阈值寻优的高保真各向异性滤波模型[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28(9): 1550-1559)
 - [20] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1-4): 259-268
 - [21] Chatterjee P, Milanfar P. Is denoising dead?[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(4): 895-911
 - [22] Chatterjee P, Milanfar P. Patch-based near-optimal image denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(4): 1635-1649
 - [23] Aubert G, Aujol J F. A variational approach to removing multiplicative noise[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2008, 68(4): 925-946
 - [24] Nikolova M. A variational approach to remove outliers and impulse noise[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2004, 20(1/2): 99-120
 - [25] Buades A, Coll B, Morel J M. A non-local algorithm for image denoising[C] //Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2005: 60-65
 - [26] Zhou Bing, Han Yuanyuan, Xu Mingliang, *et al.* A fast non-local means image denoising algorithm[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2016, 28(8): 1260-1268(in Chinese) (周兵, 韩媛媛, 徐明亮, 等. 快速非局部均值图像去噪算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28(8): 1260-1268)
 - [27] Talebi H, Zhu X, Milanfar P. How to SAIF-ly boost denoising performance[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(4): 1470-1485
 - [28] Xiao Shu, Hu Jing, Wang Yanfang. Non-local means with elliptical window and adaptive parameter[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2020, 32(1): 79-89(in Chinese) (萧澍, 胡靖, 王彦芳. 椭圆窗口和参数自适应的非局部均值算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2020, 32(1): 79-89)
 - [29] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. K-SVD: an algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322
 - [30] Elad M, Aharon M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(12): 3736-3745
 - [31] Wang Zhiwen, Li Shaozi. Adaptive fractal-wavelet image denoising base on multivariate statistical model[J]. Chinese Journal of Computers, 2014, 37(6): 1380-1389(in Chinese) (王智文, 李绍滋. 基于多元统计模型的分形小波自适应图像去噪[J]. 计算机学报, 2014, 37(6): 1380-1389)
 - [32] Wang Xianghai, Zhu Yihuan, Lv Fang, *et al.* Cauchy distribution NSST-HMT model and its applications in image denoising[J]. Chinese Journal of Computers, 2018, 41(11): 2496-2508(in Chinese) (王相海, 朱毅欢, 吕芳, 等. 基于Cauchy分布的非下采样Shearlet HMT模型及其图像去噪应用[J]. 计算机学报, 2018, 41(11): 2496-2508)

- [33] Dabov K, Foi A, Katkovnik V, *et al.* Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(8): 2080-2095
- [34] Knaus C, Zwicker M. Dual-domain image denoising[C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2013: 440-444
- [35] Knaus C, Zwicker M. Progressive image denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(7): 3114-3125
- [36] Hao Hongxing, Wu Lingda, Song Xiaorui. A denoising method of the complex valued images based on grouped sparse coding[J]. Chinese Journal of Computers, 2019, 42(9): 1991-2003(in Chinese)
(郝红星, 吴玲达, 宋晓瑞. 一种基于分组稀疏编码的复数图像降噪算法[J]. 计算机学报, 2019, 42(9): 1991-2003)
- [37] Xu J, Zhang L, Zuo W M, *et al.* Patch group based nonlocal self-similarity prior learning for image denoising[C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2015: 244-252
- [38] Xu J, Zhang L, Zhang D. A trilateral weighted sparse coding scheme for real-world image denoising[C] //Proceedings of the European Conference on Computer Vision. Heidelberg: Springer, 2018: 20-36
- [39] Wang Y L, Yang J F, Yin W T, *et al.* A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2008, 1(3): 248-272
- [40] He L, Schaefer S. Mesh denoising via L_0 minimization[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(4): Article No.64
- [41] Nie X C, Feng W, Wan L, *et al.* Intrinsic image decomposition by hierarchical L_0 sparsity[C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Multimedia and Expo. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2014: 1-6
- [42] Ding S H, Sheng B, Xie Z F, *et al.* Intrinsic image estimation using near- L_0 sparse optimization[J]. The Visual Computer, 2017, 33(3): 355-369
- [43] Sun Y J, Schaefer S, Wang W P. Denoising point sets via L_0 minimization[J]. Computer Aided Geometric Design, 2015, 35/36: 2-15
- [44] Xu L, Zheng S C, Jia J Y. Unnatural L_0 sparse representation for natural image deblurring[C] //Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2013: 1107-1114
- [45] Sun Y J, Schaefer S, Wang W P. Image structure retrieval via L_0 minimization[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2018, 24(7): 2129-2139
- [46] Nguyen R M H, Brown M S. Fast and effective L_0 gradient minimization by region fusion[C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2015: 208-216
- [47] Min D B, Choi S, Lu J B, *et al.* Fast global image smoothing based on weighted least squares[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(12): 5638-5653
- [48] Xu J, Zhang L, Zhang D, *et al.* Multi-channel weighted nuclear norm minimization for real color image denoising[C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2017: 1105-1113