

文章编号: 1001-1455(2006)04-0309-06

热力耦合问题的交替算法^{*}

张晓敏, 彭向和, 张培源
(重庆大学工程力学系, 重庆 400044)

摘要: 在极大的加热速率下, 针对 CV 型非 Fourier 介质, 提出一个热力耦合问题的解耦交替计算方法, 即交替地计算两个解除了耦合的问题, 逐步地得到足够精度的解。这两个问题分别是已知温度时空分布的热 Hooke 介质的应力分析问题和已知位移、应变和应力时空分布的非 Fourier 介质的热传导问题。这个方法也适用于 Fourier 介质, 与每一解耦问题实施计算的方法无关。用简例说明了随交替计算次数的增加, 其结果趋近于准确解; 同时给出了对 Fourier 介质板一个瞬态问题的应用例子。

关键词: 热学; 交替算法; 非 Fourier 定律; 热力耦合

中图分类号: O482.2

国标学科代码: 140 · 2530

文献标志码: A

1 引 言

自 Biot 发表了热流与温度梯度的现象学关系以来, 由 J. B. Fourier 描写的热传导定律在科学、技术和工程中得到广泛的应用。Fourier 定律的原理几乎从得到应用之时起便受到质疑。对于半无限体表面突加恒温热源的温度场暂态问题, 按 Fourier 定律给出的解, 温度传播具有无限大的速度; 在初始时刻, 边界的温度梯度成为无界量。这是人们直觉不能接受的理论结果^[1]。为了改善这个理论结果, 从微观机制出发, 提出热流迟后于温度梯度的热传导定律^[1~2]

$$q_k(\mathbf{x}, t + t_0) = -\kappa T_{,k}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}$ 为物质坐标; κ 是导热系数; t_0 是热流矢 q_j 迟后于温度梯度 $T_{,k}$ 的时间, 又称松弛时间。方程(1)将温度梯度与热流的关系认定为因果关系。虽然这这也是一个受到质疑的问题, 但已有效地解除了上述疑难。如果松弛时间远小于所要讨论的热效应持续时间, 那末将左端对 t_0 在 $t_0 = 0$ 作 Taylor 展开, 取其前两项, 得到微分延迟型非 Fourier 定律的描写

$$q_k(\mathbf{x}, t) + t_0 \frac{\partial q_k(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\kappa T_{,k}(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

这就是 Cattaneo and Vernotte(CV)型非 Fourier 定律^[3~4]; 当 $t_0 = 0$ 时, 式(2)便成为 Fourier 定律。这里及其以后使用了偏导数简记, 例如

$$q_{k,l} = \frac{\partial q_k}{\partial x_l}, \quad \dot{q}_l = q_{l,t} = \frac{\partial q_l}{\partial t}, \quad \ddot{q}_l = q_{l,tt} = \frac{\partial^2 q_l}{\partial t^2}$$

当 $t_0 = 0$ 和 $t_0 > 0$ 时, 方程(2)分别对应于 Fourier 定律和 CV 型非 Fourier 定律。在温度分布的暂态问题中, 与热平衡方程结合后, 导出的温度控制方程分别是抛物型和双曲型。后一情况下温度的传播具有波传播性质, 具有有限的速度, 因此消除了前已提及的质疑^[1~2, 4]。这样, 热力耦合暂态问题的精确化处理成为需要进一步取得进展的课题。

20 世纪 60 年代以来发现一系列具有显著细结构的材料, 如沙、生物材料等, 与热载子类型导热材料(如金属等)相比, 具有极大的松弛时间, 达到数秒乃至数十秒^[5~7]。因此, 对于这类介质的短时程问题, CV型非 Fourier 热传导模型与应力、应变及其传播的关联便成为至关重要的问题^[8~10]。与此同时,

* 收稿日期: 2005-04-20; 修回日期: 2005-08-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(19272119)

作者简介: 张晓敏(1974—), 男, 讲师, 博士研究生。

研究表明了对空间宏观尺度和时间长程传导的问题,Fourier 定律仍是有效的热传导描写形式。因此热力耦合暂态问题的精确化处理需要同时针对 Fourier 定律和非 Fourier 定律,着重在热力耦合相关的算法上推进研究。

热力耦合问题的最常用的简化方法是热力解耦:在热流平衡方程中忽略变形和应力的影响,因此温度场问题便分离出来,成为一个独立的确定性问题;这个问题解出后将温度场作为已知,求对应的热应力^[11]。这种处理忽略了变形对温度分布的影响,只近似地计入了温度对变形和应力的影响。一般地说,温度场的算法与变形和应力场的算法分别需要组构不同的计算程序。非均匀材料强热沉积瞬态问题必然要面对热力全耦合分析。这里,热力全耦合是指在热流平衡方程中不能忽略变形和应力的影响,因此温度场问题不能孤立地确定,热应力应变也必须计入温度场的影响^[11]。

本文中针对 Fourier 介质和 CV 型非 Fourier 介质提出一种热力耦合问题的解耦交替计算方法:交替地计算两个解除了耦合的问题,即已知温度时空分布的热 Hooke 介质的应力分析问题和已知位移、应变和应力时空分布的微分型非 Fourier 介质的热传导问题。用简例说明随交替计算次数的增加,其结果趋近于准确解;同时给出对 Fourier 介质板一个瞬态问题的应用例子。

2 CV 型非 Fourier 热传导介质小变形热力耦合问题的场论

组成 CV 型非 Fourier 热传导介质小变形热力耦合问题的场论的控制方程有几何方程

$$\epsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k})/2, \quad \theta = \epsilon_{kk} \tag{3}$$

应力本构方程

$$\sigma_{kl} = \lambda \theta \delta_{kl} + 2G \epsilon_{kl} - \beta T \delta_{kl} \tag{4}$$

动量方程

$$\sigma_{kl,k} + \rho(f_l - u_{,n}) = 0 \tag{5}$$

热流平衡方程

$$R - q_{k,k} = T_0 \beta \dot{\epsilon}_{kk} + \rho C \dot{T} \tag{6}$$

以及 CV 型热传导非 Fourier 定律,即方程(2)。这些方程中 f_k 和 ρ 分别为体力和密度; β 为应力温度系数(又称等温潜热系数),它与膨胀系数 α 有关系 $\beta = (3\lambda + 2G)\alpha$; λ 和 G 为 Lamé 弹性常数; R 为体热源强度; C 为等应变质量比热; T_0 为参考状态的绝对温度。这里涉及了位移场 u_k 、应变场 ϵ_{kl} 、体积应变 θ 、应力场 σ_{kl} 、相对参考状态的增量温度场 T 、热流矢量场 q_k 。

通常的边界条件提法是,在边界 ∂V 上给定 u_k 或 $\sigma_{lk} n_l$ 分别为 $\bar{u}_k$ 和 $\bar{p}_k$, 给定 T 或 $q_k n_k$ 分别为 $\bar{T}$ 和 $\bar{q}_n$ 。在边界 $\partial V - \partial V_2$ 上

$$u_k = \bar{u}_k \tag{7}$$

或在边界 ∂V_2 上

$$\sigma_{kl} n_l = \bar{p}_k \tag{8}$$

在边界 ∂V_1 上

$$T = \bar{T} \tag{9}$$

在边界 $\partial V - \partial V_1$ 上

$$q_k n_k = \bar{q}_n \tag{10}$$

通常的初始条件提法是,在时刻 $t=0$,于物体所占区域 V 上给定 u_k 、 $\dot{u}_k$ 和 T

$$u_k = u_k^{(0)}, \quad \dot{u}_k = \dot{u}_k^{(0)} \tag{11}$$

$$T = T^{(0)} \tag{12}$$

式中: ∂V_2 和 ∂V_1 都是物体所占区域 V 的部分表面边界。当式(7)中 $t_0 \neq 0$, 初始条件(12)还需补充含温增 T 对时间一次偏导数的一个方程。由于已经将有限松弛型方程(1)处理为微分型方程(2),因此这些

方程涉及的物理量都取即时时刻的值。

3 热传导介质小变形热力耦合问题的两个解耦简化问题

CV 型非 Fourier 热传导介质小变形热力耦合问题存在如下解耦简化问题。

问题 1 已知温度时空分布,求热 Hooke 介质的位移、应变和应力。控制方程为几何方程(3)、应力本构方程(4)、动量方程(5);边界条件为方程(8)和(9);初始条件为方程(12)。

问题 2 已知位移、应变和应力时空分布,求 Fourier 介质或非 Fourier 介质的温度场。控制方程为热流平衡方程(6)、CV 型热传导非 Fourier 定律(2);边界条件为方程(9)和(1);初始条件为方程(12)。

4 交替算法

为了求解第二节所述 CV 型非 Fourier 热传导介质小变形热力偶合问题,可以将它转化为第 3 节所述问题 1 和问题 2 交替地计算来实现,以下是两个实施途径。

途径 1 第 1 步,取温度时空分布为零,求解问题 1;第 2 步,取位移、应变和应力时空分布为第 1 步的结果,求解问题 2;第 3 步,取温度时空分布为第 2 步的结果,求解问题 1;第 4 步,取位移、应变和应力时空分布为第 3 步的结果,求解问题 2;以此类推,直到得出结果与前一步的差异不超过设定值为止。

途径 2 第 1 步,取位移、应变和应力时空分布为零,求解问题 2;第 2 步,取温度时空分布为第 1 步的结果,求解问题 1;第 3 步,取位移、应变和应力时空分布为第 2 步的结果,求解问题 2;第 4 步,取温度时空分布为第 3 步的结果,求解问题 1;以此类推,直到得出结果与前一步的差异不超过设定值为止。

5 收敛于准确解的简例

为了说明这个交替计算过程,试讨论受单轴拉应力 σ 和强度 $R=R_1 t$ 的均布体热源同时作用的足够长实心圆柱,圆柱外表面处于自由且绝热的状态,这里 R_1 为常量。分析的目的是求轴向正应变 ϵ 和温升 T 的时程。这个问题可以模拟无外加机械约束、却带绝热表层的圆柱,受强电流加热所持续的一段初始时间区间。这个问题涉及均匀场分布。容易得到,轴向正应变 ϵ 和增量温度 T 的准确解为

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{R_1 t^2}{2\rho C} \frac{1}{1+K}, \quad T = \frac{1}{2\rho C} R_1 t^2 \frac{1}{1+K}$$

式中: $K=3\alpha\beta T_0/(\rho C)$ 。

按途径 1 用交替计算方法:第 1 步,取温度时空分布为零,求解问题 1。将方程(4)改写为应变的应力表示式,得到

$$\epsilon^{(1)} = \sigma/E$$

第 2 步,取位移、应变和应力时空分布为第 1 步的结果,求解问题 2。由方程(6)得到温升的控制方程

$$\rho C \frac{dT^{(2)}}{dt} = R_1 t - 3T_0\beta \frac{d\epsilon^{(1)}}{dt}$$

由此得到

$$T^{(2)} = R_1 t^2 / (2\rho C)$$

第 3 步,取温度时空分布为第 2 步的结果,求解问题 1。将方程(4)改写为应变的应力表示式,得到

$$\epsilon^{(3)} = \sigma/E + \alpha R_1 t^2 / (2\rho C)$$

第 4 步,取位移、应变和应力时空分布为第 3 步的结果,求解问题 2。由方程(6)得到温升的控制方程,并改写为

$$\rho C \frac{dT^{(4)}}{dt} = R_1 t(1-K)$$

得到

$$T^{(4)} = \frac{1}{2C} R_1 t^2 (1 - K)$$

以此类推,第 $2n+1$ 步对应的应变和 $2n$ 步对应的温度的结果分别是

$$\epsilon^{(2n+1)} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{R_1 t^2}{2\rho C} [1 - K + K^2 + \cdots + (-1)^{n-1} K^{n-1}]$$

$$T(2n) = \frac{1}{2\rho C} R_1 t^2 [1 - K + K^2 + \cdots + (-1)^{n-1} K^{n-1}]$$

注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - K + K^2 + \cdots + (-1)^{n-1} K^{n-1}] = \frac{1}{1 + K}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^{(2n+1)} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{R_1 t^2}{2\rho C} \frac{1}{1 + K}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T^{(2n)} = \frac{1}{2\rho C} R_1 t^2 \frac{1}{1 + K}$$

这说明随交替计算次数的增加,其结果趋近于准确解。

6 简要结论

针对 CV 型非 Fourier 介质的热力耦合问题,可以采用交替地计算两个解除了藕合的问题来逼近,即交替地求解已知温度时空分布的热 Hooke 介质应力分析问题(即问题 1)和已知位移、应变和应力时空分布的微分型非 Fourier 介质的热传导问题(即问题 2)。这种交替计算可以逼近问题的准确解。这个结论适用于 Fourier 介质,即适用于式(2)中 $t_0 = 0$ 的情况。这个结论与每一解藕问题实施计算的方法无关,即无论每一解藕问题的计算用什么方法,或用什么程序,本文的结论仍旧有效。因此,在交替计算中,对两个问题中任何一个都可以采用包括有限元方法、解析方法和各类工程算法在内的计算方法。这样一来,处理热传导暂态问题的完全热力耦合,便有了多种多样计算途径。下面选择一个所需篇幅不大的例子说明热力耦合暂态问题的交替计算方法的应用。

7 应用例:Fourier 介质板受突加体热源의 暂态问题

作为交替算法的应用,介绍表面保持恒温的 Fourier 介质板,受突加体热源的暂态问题解。设板厚为 l ,取板厚方向为轴 $Ox, 0 \leq x \leq l$ 。为简单考虑,取体热源强度为常值 R_0 。更设板受面内约束,取 ϵ_y 和 ϵ_x 为零。这是空间一维问题,涉及的场分量仅仅是坐标 x 和时间变量 t 的函数。力学量的边界条件、初始条件和约束条件分别为

$$\sigma_x = 0 \quad x = 0, \quad x = l \tag{13}$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad t \leq 0 \tag{14}$$

$$\epsilon_y = 0, \quad \epsilon_z = 0 \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq l \tag{15}$$

热学量的边界条件和初始条件分别为

$$T = 0 \quad x = 0, \quad x = l \tag{16}$$

$$T = 0 \quad t \leq 0 \tag{17}$$

式中: σ_x 为应力分量; ϵ_y, ϵ_z 为应变分量; u 为位移的 x 分量; T 为温度。

线弹性 Fourier 热传导热力耦合问题的控制方程组成如下
几何方程

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{18}$$

动量方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{19}$$

应力本构方程

$$\sigma_x = (\lambda + 2G)\epsilon_x - \beta T \delta_{kl}, \quad \sigma_z = \sigma_y = \lambda \epsilon_x - \beta T \delta_{kl} \quad (20)$$

热流平衡方程

$$R - \frac{\partial q}{\partial x} = T_0 \beta \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} + \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (21)$$

热传导 Fourier 定律

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial t} \quad (22)$$

在式中未列出的应力分量、应变分量和热流矢量为零。以下所列是按第 5 节途径 2 得到的结果。

第一步的温度解为

$$T^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n (1 - e^{-q_n t}) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (23)$$

这就是不计应变变化对温度分布影响的结果。

第二步的应变解为

$$\epsilon_n^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\beta}{\lambda + 2G} \left[1 - \frac{p_n^2}{p_n^2 + q_n^2} e^{-q_n t} \frac{q_n^2}{p_n^2 + q_n^2} (q_n \cos p_n t + p_n \sin p_n t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (24)$$

这就是计入惯性力后, 由已知温度场求应变场的结果。

第三步的温度解为

$$T^{(3)} = T^{(1)} + T^{(31)} \quad (25)$$

$$T_n^{(31)} = \delta \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{p_n q_n}{p_n^2 + q_n^2} \left[\frac{2 p_n q_n}{p_n^2 + q_n^2} (e^{-q_n t} - \cos p_n t) + p_n t e^{-q_n t} - \frac{p_n^2 - q_n^2}{p_n^2 + q_n^2} \sin p_n t \right] \frac{n\pi}{l} \quad (26)$$

这就是计入了应变变化对温度分布影响的结果。

第四步的应变解为

$$\epsilon_n^{(4)} = \epsilon_n^{(2)} + \epsilon_n^{(42)} \quad (27)$$

$$\epsilon_n^{(42)} = \frac{\beta \delta}{\lambda + 2G} \sum_{n=1}^{\infty} F_n (f_{1n} + f_{2n} + f_{3n}) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (28)$$

$$f_{1n} = - \left[\frac{4 p_n^4 q_n^2}{(p_n^2 + q_n^2)^3} \cos p_n t + p_n q_n \frac{3 p_n^4 - 6 p_n^2 q_n^2 - q_n^4}{2 (p_n^2 + q_n^2)^3} \sin p_n t \right] \quad (29)$$

$$f_{2n} = \frac{p_n^2}{(p_n^2 + q_n^2)^2} \left(\frac{p_n^2 - q_n^2}{2} \cos p_n t - p_n q_n \sin p_n t \right) q_n t \quad (30)$$

$$f_{3n} = \frac{p_n^4}{(p_n^2 + q_n^2)^2} \left(\frac{4 q_n^2}{p_n^2 + q_n^2} + q_n t \right) e^{-q_n t} \quad (31)$$

这是计入了应变变化与温度变化交互影响, 即完全的热力耦合的应变时空分布结果。这里 δ 为表示热力耦合程度的量纲为一的常数, 且

$$\delta = \frac{T_0 \beta^2}{\rho C (\lambda + 2G)}, \quad q_n = \frac{\kappa}{\rho C} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad p_n = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \frac{n\pi}{l} \quad (32)$$

而 F_n 为与体热源的 Fourier 系数有关的数列

$$F_n = - \frac{2}{l} \left(\frac{l}{n\pi} \right)^3 [1 - (-1)^n] \frac{R_0}{\kappa} \quad (33)$$

这个例子可以得到结论: 热力耦合问题不能只计入温度对应力应变分布的影响, 还应计入应变或应力随时间变化对温度分布的影响。当热沉积强烈、温升率高、材料的耦合因子 δ 极大, 探求的剧烈变化时间间隔较小时, 应变或应力随时间变化对温度分布的影响就特别强烈或特别需要计入; 同时, 应变或应力随时间变化对温度分布的影响的计入又将影响应力和应变的时空分布。

参考文献:

[1] Tamman K K, Zhou Xiang-min. Macroscale and microscale thermal transport and thermo-mechanical interactions;

- Some noteworthy perspectives[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1998,21(3-4):405-449.
- [2] 张浙,刘登瀛. 非傅里叶热传导研究进展[J]. *力学进展*,2000,30(3):446-456.
ZHANG Zhe, LIU Deng-ying. Advances in the study of non-Fourier heat conduction[J]. *Advances in Mechanics*, 2000,30(3):446-456.
- [3] Tzou D Y. A unified field approach for heat conduction from mirco-to macro-scales[J]. *Journal of Heat Transfer, Transactions ASME*, 1995,117(1):8-16
- [4] 刘静. 微米/纳米尺度传热学[M]. 北京:科学出版业,2003:160-218.
- [5] Mitra K, Kumar S, Vedavarz A, et al. Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processing meat[J]. *Journal of Heat Transfer, Transactions ASME*, 1995,117(3):568-573.
- [6] Kaminski W. Hyperbolic heat conduction equation for material with a non-homogeneous inner structure[J]. *Journal of Heat Transfer, Transactions ASME*, 1990,112(3):555-560.
- [7] Nettleton R E. Relaxation theory of thermal conduction in liquid[J]. *Physics of Fluids*, 1960,3:216-231.
- [8] Green A E, Lindsay K E. Thermoelasticity[J]. *Journal of Elasticity*, 1972,2:1-17.
- [9] Hetnarski R B, Ignaczak J. Generalized thermoelasticity: Closed-form solutions[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1993,16(4):473-498.
- [10] Hetnarski R B, Ignaczak J. Generalized thermoelasticity: Response of semi-space to a sort laser[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1994,17(3):377-396.
- [11] Lord H W, Shulman Y. Generalized dynamic theory of thermoelasticity[J]. *Journal of Mech. Phys. Solids*, 1967,15:99-312.

An alternate computing method of thermo-mechanical coupling problems

ZHANG Xiao-min^{*}, PENG Xiang-he, ZHANG Pei-yuan

(*Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing, 400044*)

Abstract: For CV non-Fourier media subjected to high heating rates, an iteration method was proposed for the solution of the coupled thermal-mechanical problem. Two uncoupling problems were computed alternately, and the sufficient precision solution was obtained step by step. These two problems were thermo-stress analysis when temperature was given and the non-Fourier thermal conduction problems when displacement, strain and stresses were provided respectively. The method is adaptable to the Fourier media and independent of the uncoupling problem's computing method. The transient response of a Fourier plate was discussed as an application. Results show that the more the times of alternate computing, the more the precision of the result.

Key words: theory of heat; alternate computing method; non-Fourier law; thermo-mechanical coupling problem

^{*} Corresponding author: ZHANG Xiao-min
E-mail address: xiaomin@cqu.edu.cn
Telephone: 023-66802279