图上 p -Laplace 算子的特征值估计

王林峰

南通大学理学院, 南通 226019

E-mail: wlf711178@ntu.edu.cn

收稿日期: 2019-11-13; 接受日期: 2020-03-04; 网络出版日期: 2020-04-07

摘要 设 $G(V, E)$ 为满足 $CD_p^\vee(m, K)$ 条件的连通有限图, 其中 $p \geq 2, m > 0, K \leq 0$. 本文在 G 上考虑了方程

$$\Delta_p u = -\lambda_p |u|^{p-2} u$$

解的椭圆型梯度估计, 其中 Δ_p 为 p -Laplace 算子. 作为应用, 导出了 G 上 Δ_p 的第一非零特征值的下界估计.

关键词 连通图 p -Laplace 算子 $CD_p^\vee(m, K)$ 条件 特征值估计

MSC (2020) 主题分类 53C21, 05C99

1 引言

几何分析中特征值估计是重要而有趣的问题, 在一定的曲率条件下特征值的上下界估计已有很多结果, 其中一个漂亮的结果为 Ricci 曲率有正下界的闭流形上第一非零特征值的最优下界估计^[1, 2]. 当 Ricci 曲率非负时, 通过试验函数的巧妙选择, 文献 [3] 中得到了第一非零特征值的最优下界估计. 借助于热核估计, Ricci 曲率有负下界时第一非零特征值的下界估计参见文献 [4], 即

$$\lambda \geq \frac{c_1}{d^2} \exp(-c_2 \sqrt{K}d), \quad (1.1)$$

这里 d 表示流形的直径, c_1 和 c_2 为依赖于维数的常数.

许多人致力于寻找流形和图之间的联系. 在建立 Harnack 不等式的基础上, 文献 [5] 得到了带有非负 Ricci 曲率的有限连通图上第一非零特征值的下界估计. 当考虑图上的梯度估计时, 我们需要克服链式公式的缺失带来的困难, 并寻找某些适当的曲率维数条件. 文献 [6] 中介绍了一个新的曲率维数条件, 即 $CDE(m, K)$ 条件, 在此条件之下, 该文建立了线性热方程的抛物型梯度估计. 最近, 系列文献 [7–9] 中研究了带有 $CDE(m, K)$ 条件的连通局部有限图上的梯度估

英文引用格式: Wang L F. Eigenvalue estimates for the p -Laplace operator on the graph (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1225–1236, doi: 10.1360/SSM-2019-0277

计及其应用. 特别地, 文献 [9] 中证明了在满足 $CDE(m, K)$ 条件的连通有限图上 μ -Laplace 算子的第一非零特征值满足估计 (1.1), 其中 c_1, c_2 为仅仅依赖于 m 、图的权重和测度的常数.

正如文献 [10] 中指出的, 图上线性热方程在 $CDE(m, 0)$ 条件下的梯度估计与带有非负 Ricci 曲率的流形上的 Li-Yau 型梯度估计有不同的形式. 因此该文献在图上对某些 C^1 的凹函数 $\psi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 定义了 $CD^\psi(m, 0)$ 条件, 并建立了 ψ -梯度估计. 当取 $\psi = \ln(\cdot)$ 时, 该估计与流形上 Li-Yau 型梯度估计有相同的形式. 可以验证 $CD^{\sqrt{\cdot}}(m, K)$ 条件为 $CDE(m, K)$ 条件. 因此 $CD^\psi(m, K)$ 条件可以看成 $CDE(m, K)$ 条件的推广.

对 $p > 1$, 完备流形上的 p -Laplace 算子 Δ_p 已经被广泛地研究. 在截面曲率有下界的完备流形上 p -调和函数的局部梯度估计在文献 [11] 中被建立. 文献 [12] 中得到 Ricci 曲率有负下界的闭流形上 p -Laplace 热方程正解的梯度估计. 利用梯度估计, 能够建立闭流形上 p -Laplace 算子第一非零特征值的下界估计, 例如 Ricci 曲率有正下界时估计见文献 [13], Ricci 曲率非负时估计见文献 [14]. 在连通图上, 系列文献 [15–17] 研究了 p -Yamabe 方程以及 p -Kazdan-Warner 方程; 文献 [18] 中研究了 Δ_p 的非线性 Cauchy 问题.

对常数 $m > 0, K \leq 0$, 设 $G(V, E)$ 为满足 $CD_p^{\sqrt{\cdot}}(m, K)$ 条件的连通有限图 ($CD_p^{\sqrt{\cdot}}(m, K)$ 条件的定义见第 2 节). 如上所言, $CD_p^{\sqrt{\cdot}}(m, K)$ 条件可以看成 $CDE(m, K)$ 条件的推广. 我们将建立 p -Laplace 方程

$$\Delta_p u = -\lambda_p |u|^{p-2} u \quad (1.2)$$

的椭圆型梯度估计. 基于此, 我们将得到 G 上 Δ_p 的第一非零特征值的下界估计.

2 定义和引理

设 $G(V, E)$ 是有限图, 其边 $xy \in E$ 有权重 $w_{xy} > 0$. 设

$$w_{\min} := \inf_{e \in E} w_e > 0. \quad (2.1)$$

序列 $(x_0, \dots, x_n)$ 称为从 x_0 到 x_n 的长度为 n 的路, 如果 x_i 彼此不相同, 且对所有的 $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \sim x_{i-1}$. 用 $d(x, y)$ 表示从 x 到 y 的距离. 图 $G(V, E)$ 称为连通的, 如果对任意的 $x, y \in V$, 至少存在连结 x 和 y 的一条路. 本文总是假定图是连通的.

对 V 上给定的测度 $\mu : V \rightarrow (0, +\infty)$ 以及常数 $p > 1$, p -Laplace 算子 Δ_p 定义为对任意的函数 $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ [16],

$$\Delta_p u(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} w_{xy} |u(y) - u(x)|^{p-2} (u(y) - u(x)). \quad (2.2)$$

因为 $p > 1$, 当 $u(y) = u(x)$ 时可以将 $|u(y) - u(x)|^{p-2} (u(y) - u(x))$ 理解为 0. 当 $p = 2$ 时, Δ_p 为 μ -Laplace 算子, 该算子已经被广泛研究 [6, 8, 9]. 因为 Δ_p 是非线性算子, 如同流形上的情形 [11, 12], 可以将 Δ_p 线性化. 对一个固定的正函数 u , $\mathcal{L}_{p,u}$ 定义为

$$\mathcal{L}_{p,u} v(x) = \frac{p-1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} w_{xy} \left| \frac{u(y)}{u(x)} - 1 \right|^{p-2} (v(y) - v(x)).$$

容易看出 $u^{p-2} \mathcal{L}_{p,u}$ 为 Δ_p 在 u 的线性化.

受到 Münch 的 $CD^\psi(m, K)$ 条件的启发, 对 C^1 凹函数 $\psi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 来定义 $CD_p^\psi(m, K)$ 条件. 首先定义算子 Δ_p^ψ 和 Γ_p^ψ , 即对任意的 $u: V \rightarrow (0, +\infty)$,

$$\Delta_p^\psi u(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} w_{xy} \left| \frac{u(y)}{u(x)} - 1 \right|^{p-2} \left(\psi \left(\frac{u(y)}{u(x)} \right) - \psi(1) \right),$$

$$\Gamma_p^\psi u(x) := \mathcal{L}_{p,u} \left(\bar{\psi} \left(\frac{u}{u(x)} \right) \right) (x),$$

其中 $\bar{\psi}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$\bar{\psi}(x) := \psi'(1)(x-1) - (\psi(x) - \psi(1)).$$

注 2.1 容易看出对任意的 $u: V \rightarrow (0, +\infty)$, $\Gamma_p^\psi u \geq 0$.

接着定义 Ω_p^ψ , 对任意的 $u: V \rightarrow (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} \Omega_p^\psi u(x) = & \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} w_{xy} \left| \frac{u(y)}{u(x)} - 1 \right|^{p-4} \frac{u(y)}{u(x)} \left[\frac{\Delta_p u(y)}{(u(y))^{p-1}} - \frac{\Delta_p u(x)}{(u(x))^{p-1}} \right] \\ & \times \left[\left| \frac{u(y)}{u(x)} - 1 \right|^2 \psi' \left(\frac{u(y)}{u(x)} \right) + (p-2) \left(\frac{u(y)}{u(x)} - 1 \right) \left(\psi \left(\frac{u(y)}{u(x)} \right) - \psi(1) \right) \right]. \end{aligned}$$

于是 $\Gamma_{2,p}^\psi$ 可以定义为对任意的 $u: V \rightarrow (0, +\infty)$,

$$\Gamma_{2,p}^\psi u = \frac{1}{p(p-1)} \Omega_p^\psi u - \frac{1}{p(p-1)u} \mathcal{L}_{p,u}(u \Delta_p^\psi u) + \frac{1}{p} |u|^{-p} u \Delta_p u \cdot \Delta_p^\psi u. \quad (2.3)$$

最后给出 $CD_p^\psi(m, K)$ 条件的定义.

定义 2.1 设 $\psi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^1 凹函数. 对 $m > 0, p > 1, K \in \mathbb{R}$, 称图 $G(V, E)$ 满足 $CD_p^\psi(m, K)$ 条件, 如果对任意的函数 $u: V \rightarrow (0, +\infty)$ 有

$$\Gamma_{2,p}^\psi u \geq \frac{p-1}{m} (\Delta_p^\psi u)^2 + K (\Gamma_p^\psi u)^{\frac{2p-2}{p}}. \quad (2.4)$$

注 2.2 当 $p = 2$ 时, (2.4) 变为

$$\Gamma_2^\psi u \geq \frac{1}{m} (\Delta_\mu^\psi u)^2 + K \Gamma^\psi u, \quad (2.5)$$

这是 Münch 在文献 [10] 中给出的 $CD^\psi(m, K)$ 不等式. 如果选择 $\psi = \sqrt{\cdot}$, 容易得到

$$\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} u(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} w_{xy} \left| \frac{u(y)}{u(x)} - 1 \right|^{p-2} \left(\sqrt{\frac{u(y)}{u(x)}} - 1 \right)^2, \quad (2.6)$$

$$\Delta_p^{\sqrt{\cdot}} u(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} w_{xy} \left| \frac{u(y)}{u(x)} - 1 \right|^{p-2} \left(\sqrt{\frac{u(y)}{u(x)}} - 1 \right), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \Omega_p^{\sqrt{\cdot}} u(x) = & \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} w_{xy} \left| \frac{u(y)}{u(x)} - 1 \right|^{p-2} \left[\frac{\Delta_p u(y)}{(u(y))^{p-1}} - \frac{\Delta_p u(x)}{(u(x))^{p-1}} \right] \\ & \times \left[\frac{\sqrt{u(y)}}{2\sqrt{u(x)}} + \frac{(p-2)u(y)}{u(x) + \sqrt{u(x)u(y)}} \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

于是不难验证 (2.5) 等价于

$$\Gamma_2 u - \Gamma\left(u, \frac{\Gamma u}{u}\right) \geq \frac{1}{m}(\Delta u)^2 + K\Gamma u,$$

这是文献 [6] 中给出的 $CDE(m, K)$ 不等式. 因此 $CD_p^{\sqrt{\cdot}}(m, K)$ 条件可以看成 $CDE(m, K)$ 条件的推广.

引理 2.1 在一个连通有限图上, 对 $p > 1$, 设 λ_p 为非零常数, 且 u 非常数, 满足 (1.2), 则 u 变号且 $\lambda_p > 0$.

证明 如果 $\lambda_p < 0$, 设 u 在 $x_0 \in V$ 达到其最大值, 则

$$|u(x_0)|^{p-2}u(x_0) = -\frac{1}{\lambda_p\mu(x_0)} \sum_{y \sim x_0} w_{x_0y} |u(y) - u(x_0)|^{p-2}(u(y) - u(x_0)) \leq 0.$$

因此, 对任意的 $x \in V$, $u(x) \leq 0$. 这表明 $u \equiv 0$, 与 u 非常数相矛盾.

如果 $\lambda_p = 0$, 设 u 在 $x_0 \in V$ 达到其最大值, 则

$$0 = \frac{1}{\mu(x_0)} \sum_{y \sim x_0} w_{x_0y} |u(y) - u(x_0)|^{p-2}(u(y) - u(x_0)) \leq 0.$$

因此, 对任意的 $y \sim x_0$, $u(y) = u(x_0)$. 这意味着 $u \equiv u(x_0)$, 也与 u 非常数相矛盾. 因此 $\lambda_p > 0$.

类似的讨论表明 u 的最大值和最小值分别为正和负. $\square$

如下的引理可以看成图上极大值原理的椭圆形式. 当 $p = 2$ 时, 这个引理在文献 [8, 9] 中已经被使用, 其抛物形式见文献 [6].

引理 2.2 设 $G(V, E)$ 为连通图, 并令 $g, f : V \rightarrow \mathbb{R}$ 为函数, 使得 $g \geq 0$, 且 f 在 $x_0 \in V$ 达到极大值, 则对任意固定的函数 $u : V \rightarrow (0, +\infty)$, 有

$$\mathcal{L}_{p,u}g(x_0)f(x_0) \geq \mathcal{L}_{p,u}(gf)(x_0).$$

3 梯度估计

设 $G(V, E)$ 为连通有限图, $\lambda_p > 0$ 为非零常数, u 为满足 (1.2) 的非常数函数. 由引理 2.1 知可以规范化 u , 使其满足 $\min u = -1$ 以及 $\max u \leq 1$. 这一节的主要结果是如下对 u 的梯度估计.

定理 3.1 设 $G(V, E)$ 为满足 $CD_p^{\sqrt{\cdot}}(m, -K)$ 条件的连通有限图, 其中 $m > 0, K \geq 0, p \geq 2$. 假设 $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ 为 (1.2) 的解满足 $\min u = -1, \max u \leq 1$, 则对任意的 $a > 1$ 和任意的 $x \in V$,

$$\begin{aligned} & \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}}(a+u)(x) \\ & \leq \left[\frac{p(p-1)}{2} + am(p-1)^3 + m(p-1)^2 \right] (a-1)^{1-p}\lambda_p + ((p-1)mK)^{\frac{p}{2}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

证明 对 $a > 1$, 令 $v = a + u$, 则 v 满足

$$\Delta_p v = -\lambda_p |v - a|^{p-2}(v - a). \quad (3.2)$$

我们还有

$$a - 1 \leq v \leq a + 1. \quad (3.3)$$

注意到对任意的 $s, t > 0$, 有

$$2\sqrt{s}(\sqrt{t} - \sqrt{s}) = t - s - (\sqrt{t} - \sqrt{s})^2.$$

因此对任意的 $x \in V$, 有

$$\begin{aligned} v(x)\Delta_p^{\sqrt{\cdot}}v(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} w_{xy} \left| \frac{v(y)}{v(x)} - 1 \right|^{p-2} \left(\sqrt{\frac{v(y)}{v(x)}} - 1 \right) v(x) \\ &= \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{y \sim x} w_{xy} \left| \frac{v(y)}{v(x)} - 1 \right|^{p-2} [v(y) - v(x) - (\sqrt{v(y)} - \sqrt{v(x)})^2] \\ &= \frac{1}{2}(v(x))^{2-p} \Delta_p v(x) - \frac{1}{p-1} v(x) \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v(x). \end{aligned} \quad (3.4)$$

由 (2.3) 和 (3.4) 有

$$\begin{aligned} pv\Gamma_{2,p}^{\sqrt{\cdot}}v &= \frac{v}{p-1} \Omega_p^{\sqrt{\cdot}}v - \frac{1}{2(p-1)} \mathcal{L}_{p,v} \left[v^{2-p} \Delta_p v - \frac{2}{p-1} v \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v \right] \\ &\quad + v^{2-p} \Delta_p v \cdot \Delta_p^{\sqrt{\cdot}} v. \end{aligned}$$

由 (2.6)–(2.8) 有

$$\begin{aligned} &\frac{v}{p-1} \Omega_p^{\sqrt{\cdot}}v - \frac{1}{2(p-1)} \mathcal{L}_{p,v} (v^{2-p} \Delta_p v) + v^{2-p} \Delta_p v \cdot \Delta_p^{\sqrt{\cdot}} v \\ &= \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} w_{xy} \left| \frac{v(y)}{v(x)} - 1 \right|^{p-2} \left[\frac{\Delta_p v(y)}{(v(y))^{p-2}} A - \frac{\Delta_p v(x)}{(v(x))^{p-2}} B \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

这里

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(p-1)v(y)} \left[\frac{1}{2} \sqrt{v(x)v(y)} + (p-2) \frac{v(y)\sqrt{v(x)}}{\sqrt{v(y)} + \sqrt{v(x)}} \right] - \frac{1}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{v(x)} - \sqrt{v(y)})(\sqrt{v(x)} + (p-1)\sqrt{v(y)})}{2(p-1)\sqrt{v(y)}(\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)})} \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{(p-1)v(x)} \left[\frac{1}{2} \sqrt{v(x)v(y)} + (p-2) \frac{v(y)\sqrt{v(x)}}{\sqrt{v(y)} + \sqrt{v(x)}} \right] - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{v(y)}{v(x)}} \\ &= \frac{(\sqrt{v(x)} - \sqrt{v(y)})((p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)})}{2(p-1)\sqrt{v(x)}(\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)})}. \end{aligned}$$

结合 (2.2) 有

$$\frac{\Delta_p v(y)}{(v(y))^{p-2}} A - \frac{\Delta_p v(x)}{(v(x))^{p-2}} B$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\lambda_p(\sqrt{v(x)} - \sqrt{v(y)})}{2(p-1)} \left[\left| 1 - \frac{a}{v(y)} \right|^{p-2} \frac{v(y) - a}{\sqrt{v(y)}} \frac{\sqrt{v(x)} + (p-1)\sqrt{v(y)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}} \right. \\
 &\quad \left. - \left| 1 - \frac{a}{v(x)} \right|^{p-2} \frac{v(x) - a}{\sqrt{v(x)}} \frac{(p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}} \right]. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

为简单起见, 对 $s > 0$ 令

$$\theta(s) = |1 - s|^{p-2} \cdot (1 - s). \quad (3.7)$$

容易看出

$$\begin{aligned}
 &\left| 1 - \frac{a}{v(y)} \right|^{p-2} \frac{v(y) - a}{\sqrt{v(y)}} \frac{\sqrt{v(x)} + (p-1)\sqrt{v(y)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}} - \left| 1 - \frac{a}{v(x)} \right|^{p-2} \frac{v(x) - a}{\sqrt{v(x)}} \frac{(p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}} \\
 &= \theta\left(\frac{a}{v(y)}\right) \cdot \frac{(\sqrt{v(x)} + (p-1)\sqrt{v(y)})\sqrt{v(y)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}} - \theta\left(\frac{a}{v(x)}\right) \cdot \frac{((p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)})\sqrt{v(x)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}} \\
 &= \theta\left(\frac{a}{v(y)}\right) \cdot \left[\frac{(\sqrt{v(x)} + (p-1)\sqrt{v(y)})\sqrt{v(y)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}} - \frac{((p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)})\sqrt{v(x)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}} \right] \\
 &\quad + \left(\theta\left(\frac{a}{v(y)}\right) - \theta\left(\frac{a}{v(x)}\right) \right) \cdot \frac{((p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)})\sqrt{v(x)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}} \\
 &= -(p-1)\theta\left(\frac{a}{v(y)}\right)(\sqrt{v(x)} - \sqrt{v(y)}) + \left(\theta\left(\frac{a}{v(y)}\right) - \theta\left(\frac{a}{v(x)}\right) \right) \\
 &\quad \times \frac{((p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)})\sqrt{v(x)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}}. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

在 $\frac{a}{v(x)}$ 和 $\frac{a}{v(y)}$ 之间存在 ξ 使得

$$\begin{aligned}
 &\left(\theta\left(\frac{a}{v(y)}\right) - \theta\left(\frac{a}{v(x)}\right) \right) \cdot \frac{((p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)})\sqrt{v(x)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}} \\
 &= \theta'(\xi) \left(\frac{a}{v(y)} - \frac{a}{v(x)} \right) \cdot \frac{((p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)})\sqrt{v(x)}}{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}} \\
 &= a\theta'(\xi)(\sqrt{v(x)} - \sqrt{v(y)}) \frac{(p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}}{\sqrt{v(x)}v(y)}. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

将 (3.8) 和 (3.9) 代入 (3.6) 得

$$\begin{aligned}
 &\frac{\Delta_p v(y)}{(v(y))^{p-2}} A - \frac{\Delta_p v(x)}{(v(x))^{p-2}} B \\
 &= \frac{\lambda_p(\sqrt{v(x)} - \sqrt{v(y)})^2}{2} \left[\theta\left(\frac{a}{v(y)}\right) - a\theta'(\xi) \frac{(p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}}{(p-1)\sqrt{v(x)}v(y)} \right]. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

由 (3.3) 以及如下事实

$$\theta'(s) = -(p-1)|1 - s|^{p-2} \leq 0,$$

有

$$\theta\left(\frac{a}{v(y)}\right) \leq \theta\left(\frac{a}{a+1}\right) = (a+1)^{1-p}. \quad (3.11)$$

容易看出

$$\frac{(p-1)\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}}{(p-1)\sqrt{v(x)v(y)}} \leq \frac{\sqrt{v(x)} + \sqrt{v(y)}}{\sqrt{v(x)v(y)}} \leq \frac{2}{a-1}. \quad (3.12)$$

由于 ξ 在 $\frac{a}{v(x)}$ 和 $\frac{a}{v(y)}$ 之间, 有

$$-a\theta'(\xi) = (p-1)a|1-\xi|^{p-2} \leq (p-1)a(a-1)^{2-p}. \quad (3.13)$$

将 (3.11)–(3.13) 代入 (3.10) 得

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta_p v(y)}{(v(y))^{p-2}} A - \frac{\Delta_p v(x)}{(v(x))^{p-2}} B \\ & \leq \frac{\lambda_p (\sqrt{v(x)} - \sqrt{v(y)})^2}{2} [(a+1)^{1-p} + 2(p-1)a(a-1)^{1-p}]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

由 (2.6)、(3.5) 和 (3.14), 有

$$\begin{aligned} & \frac{v}{p-1} \Omega_p^{\sqrt{\cdot}} v - \frac{1}{2(p-1)} \mathcal{L}_{p,v}(v^{2-p} \Delta_p v) + v^{2-p} \Delta_p v \cdot \Delta_p^{\sqrt{\cdot}} v \\ & \leq \frac{\lambda_p}{p-1} [(a+1)^{1-p} + 2(p-1)a(a-1)^{1-p}] v \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v. \end{aligned} \quad (3.15)$$

设 $\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v$ 在 $x_0 \in V$ 达到其最大值. 由引理 2.2 知在 x_0 ,

$$\mathcal{L}_{p,v} v(\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v) \geq \mathcal{L}_{p,v}(v \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v). \quad (3.16)$$

注意到

$$\mathcal{L}_{p,v} v = (p-1)v^{2-p} \Delta_p v \quad (3.17)$$

且

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p,v}(v \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v) &= pv(p-1)^2 \Gamma_{2,p}^{\sqrt{\cdot}} v - (p-1)^2 \left[\frac{v}{p-1} \Omega_p^{\sqrt{\cdot}} v - \frac{1}{2(p-1)} \mathcal{L}_{p,v}(v^{2-p} \Delta_p v) \right. \\ & \quad \left. + v^{2-p} \Delta_p v \cdot \Delta_p^{\sqrt{\cdot}} v \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

由 (3.15)–(3.18) 以及 $CD_p^\psi(m, -K)$ 条件知, 在 x_0 ,

$$\begin{aligned} & (p-1)v^{2-p} \Delta_p v \cdot \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v \\ & \geq pv \left[\frac{p-1}{m} (\Delta_p^{\sqrt{\cdot}} v)^2 - K (\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v)^{\frac{2p-2}{p}} \right] \\ & \quad - (p-1)\lambda_p [(a+1)^{1-p} + 2(p-1)a(a-1)^{1-p}] v \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v. \end{aligned} \quad (3.19)$$

由 (3.2) 和 (3.7), 有

$$v^{1-p} \Delta_p v = -\lambda_p \theta\left(\frac{a}{v}\right).$$

由 (3.3) 以及 $\theta(s)$ 的单调性, 有

$$-\lambda_p(a+1)^{1-p} \leq v^{1-p} \Delta_p v \leq \lambda_p(a-1)^{1-p}. \quad (3.20)$$

由 (3.4) 和 (3.20), 得

$$\begin{aligned}
 (\Delta_p^{\sqrt{\cdot}} v)^2 &= \left[\frac{1}{2} v^{1-p} \Delta_p v - \frac{1}{p-1} \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v \right]^2 \\
 &\geq \left[\frac{1}{p-1} \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v - \frac{\lambda_p}{2} (a-1)^{1-p} \right]^2 \\
 &\geq \frac{1}{(p-1)^2} (\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v)^2 - \frac{\lambda_p}{p-1} (a-1)^{1-p} \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

由 (3.19)–(3.21), 有

$$\begin{aligned}
 &(p-1)\lambda_p(a-1)^{1-p}\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v \\
 &\geq \frac{p}{m(p-1)} (\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v)^2 - \frac{p\lambda_p}{m} (a-1)^{1-p} \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v - pK(\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v)^{\frac{2p-2}{p}} \\
 &\quad - (p-1)\lambda_p[(a+1)^{1-p} + 2(p-1)a(a-1)^{1-p}] \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

容易验证

$$pKx^{\frac{2p-2}{p}} \leq \sigma x^2 + 2\left(\frac{p-2}{\sigma}\right)^{\frac{p}{2}-1} K^{\frac{p}{2}} x$$

对任意的 $p \geq 2$ 和 $\sigma > 0$ 都成立, 这表明

$$pK(\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v)^{\frac{2p-2}{p}} \leq \frac{p-2}{m(p-1)} (\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v)^2 + 2(m(p-1))^{\frac{p}{2}-1} K^{\frac{p}{2}} \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v.$$

将这个不等式代入 (3.22), 并利用 $a+1 > a-1 > 0$ 知, 在 x_0 ,

$$\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} v \leq \left[\frac{p(p-1)}{2} + am(p-1)^3 + m(p-1)^2 \right] (a-1)^{1-p} \lambda_p + ((p-1)mK)^{\frac{p}{2}},$$

这表明 (3.1) 对任意的 $x \in V$ 都成立. $\square$

4 特征值估计

如同图上关于 Laplace 算子的特征值^[9] 以及流形上关于 p -Laplace 算子的特征值^[13, 14], 在连通有限图上 p -Laplace 算子 Δ_p 的特征值 λ_p 和相应的特征函数 u 满足 (1.2). 自然地, 0 是 Δ_p 的特征值, 其相应的特征函数为任意非零常数. 由引理 2.1 知, Δ_p 的任意的非零特征值都为正. 本节基于定理 3.1 建立 Δ_p 的第一非零特征值的下界估计.

定理 4.1 设 $G(V, E)$ 为满足 $CD_p^{\sqrt{\cdot}}(m, -K)$ 条件的连通有限图, 其中 $m > 0, K \geq 0$ 且 $p \geq 2$, 则存在依赖于 $m, p, \mu_{\max}, w_{\min}$ 的常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得 Δ_p 的第一非零特征值 λ_p 满足

$$\lambda_p \geq \frac{c_1}{d^p} \exp(-c_2 \sqrt{K}d), \tag{4.1}$$

其中 $w_{\min}$ 的定义见 (2.1), $\mu_{\max} := \sup_{x \in V} \mu(x) < +\infty$, 并且 $d = \max \{d(x, y), x, y \in V\}$ 表示图的直径.

证明定理 4.1 之前, 先给出一个定义和一个引理.

定义 4.1 定义 $\sqrt{\cdot}$ 的 p -Harnack 常数为

$$H_{p,\sqrt{\cdot}} := 2 \sup_{x>1} \frac{(\sqrt{x}+1)^2 (\ln x)^p}{(x-1)^p}. \quad (4.2)$$

容易看出 $0 < H_{p,\sqrt{\cdot}} < \infty$. 如下引理表明对任意的满足 $x \sim y$ 的 $x, y \in V$, 可以用 $\Gamma_p^{\sqrt{\cdot}}$ 去控制 $\ln \frac{u(y)}{u(x)}$.

引理 4.1 设 u 为连通有限图 $G(V, E)$ 上的正函数, 则对任意的 $x, y \in V, x \sim y$, 有

$$\ln \frac{u(y)}{u(x)} \leq \left[\frac{\mu_{\max}}{(p-1)w_{\min}} H_{p,\sqrt{\cdot}} \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} u(x) \right]^{1/p}. \quad (4.3)$$

证明 由 (4.2), 容易看出对任意的 $x > 0$ 有

$$\ln x \leq \left[\frac{H_{p,\psi}}{2(\sqrt{x}+1)^2} \right]^{1/p} |x-1|,$$

则

$$\begin{aligned} [H_{p,\sqrt{\cdot}} \Gamma_p^{\sqrt{\cdot}} u(x)]^{1/p} &= \left[\frac{(p-1)H_{p,\sqrt{\cdot}}}{2\mu(x)} \sum_{y \sim x} w_{xy} \left| \frac{u(y)}{u(x)} - 1 \right|^{p-2} \left(\sqrt{\frac{u(y)}{u(x)}} - 1 \right)^2 \right]^{1/p} \\ &\geq \left[\frac{(p-1)H_{p,\sqrt{\cdot}}}{2\mu_{\max}} w_{\min} \left| \frac{u(y)}{u(x)} - 1 \right|^p \left(\frac{\sqrt{u(x)}}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(y)}} \right)^2 \right]^{1/p} \\ &\geq \left[\frac{(p-1)w_{\min}}{\mu_{\max}} \right]^{1/p} \ln \frac{u(y)}{u(x)}, \end{aligned}$$

即 (4.3) 成立. □

现在证明定理 4.1.

定理 4.1 的证明 先假定 $x \sim y$. 由 (3.1) 和 (4.3) 有

$$\ln \frac{v(y)}{v(x)} \leq \left[\frac{\mu_{\max}}{(p-1)w_{\min}} H_{p,\sqrt{\cdot}} C(m, p, a, K, \lambda_p) \right]^{1/p},$$

这里

$$\begin{aligned} C(m, p, a, K, \lambda_p) &= \left[\frac{p(p-1)}{2} + am(p-1)^3 + m(p-1)^2 \right] (a-1)^{1-p} \lambda_p + ((p-1)mK)^{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

当 x 和 y 不相邻, 设 $(x = x_0; x_1; \dots; x_k = y)$ 为连结 x 和 y 的路 P , 则

$$\begin{aligned} \ln \frac{v(y)}{v(x)} &= \sum_{i=1}^k \ln \frac{v(x_i)}{v(x_{i-1})} \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left[\frac{\mu_{\max}}{(p-1)w_{\min}} H_{p,\sqrt{\cdot}} C(m, p, a, K, \lambda_p) \right]^{1/p} \end{aligned}$$

$$= k \left[\frac{\mu_{\max}}{(p-1)w_{\min}} H_{p,\sqrt{\cdot}} C(m, p, a, K, \lambda_p) \right]^{1/p}.$$

选择适当的 P 使得 $k = d(x, y)$, 有

$$\begin{aligned} \ln \frac{v(y)}{v(x)} &\leq d(x, y) \left[\frac{\mu_{\max}}{(p-1)w_{\min}} H_{p,\sqrt{\cdot}} C(m, p, a, K, \lambda_p) \right]^{1/p} \\ &\leq d \left[\frac{\mu_{\max}}{(p-1)w_{\min}} H_{p,\sqrt{\cdot}} C(m, p, a, K, \lambda_p) \right]^{1/p}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

设 $u(x) = -1, u(y) = \max u$, 由 (4.4) 有

$$\begin{aligned} \ln \frac{a}{a-1} &\leq \ln \frac{a + \max u}{a-1} = \ln \frac{v(y)}{v(x)} \\ &\leq d \left[\frac{\mu_{\max}}{(p-1)w_{\min}} H_{p,\sqrt{\cdot}} C(m, p, a, K, \lambda_p) \right]^{1/p}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

因为 $a > 1$ 和 $p \geq 2$, 容易验证

$$C(m, p, a, K, \lambda_p) \leq \left(\frac{p(p-1)}{2} + mp(p-1)^2 \right) \lambda_p \left(\frac{a}{a-1} \right)^{p-1} + ((p-1)mK)^{\frac{p}{2}}.$$

由 (4.5) 有

$$\lambda_p \geq \frac{1}{\frac{p}{2} + mp(p-1)} \left(\frac{a-1}{a} \right)^{p-1} \left[\frac{w_{\min}}{\mu_{\max} H_{p,\sqrt{\cdot}}} \left(\frac{1}{d} \ln \frac{a}{a-1} \right)^p - (p-1)^{\frac{p}{2}-1} (mK)^{\frac{p}{2}} \right]. \quad (4.6)$$

为简单起见, 令

$$\left(\frac{a}{a-1} \right)^{p-1} = t > 1,$$

则 (4.6) 可以改写为

$$\lambda_p \geq \frac{1}{\frac{p}{2} + mp(p-1)} \frac{1}{t} \left[\frac{w_{\min}}{(p-1)^p \mu_{\max} H_{p,\sqrt{\cdot}}} \left(\frac{\ln t}{d} \right)^p - (p-1)^{\frac{p}{2}-1} (mK)^{\frac{p}{2}} \right]. \quad (4.7)$$

令 $t_0 > 1$ 为方程

$$(\ln t)^p - p(\ln t)^{p-1} = \frac{\mu_{\max} H_{p,\sqrt{\cdot}} (p-1)^{\frac{3p}{2}-1}}{w_{\min}} (mK d^2)^{\frac{p}{2}}$$

的解. 于是

$$p \leq \ln t_0 \leq \left[\frac{\mu_{\max} H_{p,\sqrt{\cdot}} (p-1)^{\frac{3p}{2}-1}}{w_{\min}} (mK d^2)^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{p}} + p.$$

在 (4.7) 中选择 $t = t_0$, 得

$$\begin{aligned} \lambda_p &\geq \frac{p}{\frac{p}{2} + mp(p-1)} \frac{w_{\min}}{(p-1)^p \mu_{\max} H_{p,\sqrt{\cdot}} d^p} \frac{(\ln t_0)^{p-1}}{t_0} \\ &\geq \frac{p}{\frac{p}{2} + mp(p-1)} \frac{w_{\min}}{(p-1)^p \mu_{\max} H_{p,\sqrt{\cdot}} d^p} \\ &\quad \times p^{p-1} \exp \left\{ - \left[\frac{\mu_{\max} H_{p,\sqrt{\cdot}} (p-1)^{\frac{3p}{2}-1}}{w_{\min}} (mK d^2)^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{p}} - p \right\}. \end{aligned}$$

这意味着 (4.1) 成立. □

推论 4.1 设 $G(V, E)$ 为满足 $CDE(m, -K)$ 条件的连通有限图, 其中 $m > 0, K \geq 0$, 则存在依赖于 $m, \mu_{\max}, w_{\min}$ 的常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得 Laplace 算子 Δ_μ 的第一非零特征值 λ 满足

$$\lambda \geq \frac{c_1}{d^2} \exp(-c_2 \sqrt{K}d). \quad (4.8)$$

注 4.1 上面的推论已在文献 [9] 中被证明. 注意到 (4.8) 和 (1.1) 有相同的形式.

推论 4.2 设 $G(V, E)$ 为满足 $CD_p^\psi(m, 0)$ 条件的连通有限图, 其中 $m > 0, p \geq 2$, 则存在依赖于 $m, p, \mu_{\max}, w_{\min}$ 的常数 c_3 , 使得 Δ_p 的第一非零特征值 λ_p 满足

$$\lambda_p \geq \frac{c_3}{d^p}.$$

注 4.2 有两个问题值得进一步思考:

(1) 如同流形上的特征值估计^[1,2], 对常数 $m > 0, K > 0, p \geq 2$, 在带有 $CD_p^\psi(m, K)$ 条件的连通有限图上 Δ_p 的第一非零特征值 λ_p 的下界估计如何?

(2) 如同流形上的特征值估计^[14], 对常数 $m > 0, p \geq 2$, 在带有 $CD_p^\psi(m, 0)$ 条件的连通有限图上 Δ_p 的第一非零特征值 λ_p 的最优下界估计如何?

致谢 感谢审稿人中肯的意见和建议.

参考文献

- 1 Lichnerowicz A. Géométrie Des Groupes De Transformations. Paris: Dunod, 1958
- 2 Obata M. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric to the sphere. J Math Soc Japan, 1962, 14: 333–340
- 3 Zhong J Q, Yang H C. On the estimate of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold. Sci Sin Ser A, 1984, 27: 1265–1273
- 4 Li P, Yau S T. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. Acta Math, 1986, 156: 153–201
- 5 Chung F, Lin Y, Yau S T. Harnack inequalities for graphs with non-negative Ricci curvature. J Math Anal Appl, 2014, 415: 25–32
- 6 Bauer F, Horn P, Lin Y, et al. Li-Yau inequality on graphs. J Differential Geom, 2015, 99: 359–405
- 7 Wang L F, Zhang Z Y. Gradient estimates for the heat equation on graphs. Comm Anal Geom, 2019, 27: 965–989
- 8 Wang L F, Zhou Y J. A gradient estimate on graphs with the $CDE(m, K)$ -condition. Arch Math (Basel), 2017, 109: 383–391
- 9 Wang L F, Zhou Y J. Eigenvalue estimates on a connected finite graph. Proc Amer Math Soc, 2018, 146: 4855–4866
- 10 Münch F. Li-Yau inequality on finite graphs via non-linear curvature dimension conditions. J Math Pures Appl (9), 2018, 120: 130–164
- 11 Kotschwar B, Ni L. Local gradient estimates of p -harmonic functions, $1/H$ -flow, and an entropy formula. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2009, 42: 1–36
- 12 Wang L F. Gradient estimates on the weighted p -Laplace heat equation. J Differential Equations, 2018, 264: 506–524
- 13 Wang L F. Eigenvalue estimate for the weighted p -Laplacian. Ann Mat Pura Appl (4), 2012, 191: 539–550
- 14 Valtorta D. Sharp estimate on the first eigenvalue of the p -Laplacian. Nonlinear Anal, 2012, 75: 4974–4994
- 15 Ge H B. A p -th Yamabe equation on graph. Proc Amer Math Soc, 2018, 146: 2219–2224
- 16 Ge H B. The p -th Kazdan-Warner equation on graphs. Commun Contemp Math, 2020, 22: 1950052
- 17 Ge H B, Jiang W F. The 1-Yamabe equation on graphs. Commun Contemp Math, 2019, 21: 1850040
- 18 Hua B, Mugnolo D. Time regularity and long-time behavior of parabolic p -Laplace equations on infinite graphs. J Differential Equations, 2015, 259: 6162–6190

Eigenvalue estimates for the p -Laplace operator on the graph

Linfeng Wang

Abstract Let $G(V, E)$ be a connected finite graph satisfying the $CD_p^{\sqrt{\cdot}}(m, K)$ condition for $p \geq 2, m > 0, K \leq 0$. In this paper we consider the elliptic gradient estimate for the solutions to the equation

$$\Delta_p u = -\lambda_p |u|^{p-2} u$$

on G , where Δ_p is the p -Laplace operator. As an application, we derive a lower bound estimate for the first nonzero eigenvalue of Δ_p on G .

Keywords connected graph, p -Laplace operator, $CD_p^{\sqrt{\cdot}}(m, K)$ condition, eigenvalue estimate

MSC(2020) 53C21, 05C99

doi: 10.1360/SSM-2019-0277