中国科学: 数学 2025 年 第 55 卷 第 2 期: 517～534
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

综 述

非平衡合作博弈大联盟稳定解

献给韩继业教授 90 寿辰

刘林冬[1*], 吴子翔[1], 刘许成[1], 杨晓光[2]

1. 中国科学技术大学管理学院, 合肥 230026;
2. 中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所, 北京 100190
E-mail: ldliu@ustc.edu.cn, wuzixiang@mail.ustc.edu.cn, lkdn@mail.ustc.edu.cn, xgyang@iss.ac.cn

收稿日期: 2024-05-09; 接受日期: 2024-07-17; 网络出版日期: 2024-11-25; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 72022018 和 72192800) 和中国科学院青年创新促进会 (批准号: 2021454) 资助项目

摘要 在数字经济迅速发展的今天, 作为其基础理论之一的博弈论正在迎来新的发展机遇. 因强调集体理性, 故合作博弈在合作竞争等问题中应用广泛. 然而, 许多合作博弈的核心并不存在, 即所谓的非平衡博弈, 这导致了大联盟的不稳定. 因此, 研究非平衡博弈并找到其稳定解对于合作博弈的发展和应用至关重要. 本文首先系统梳理了国内外大联盟稳定解的研究进展, 并将该领域的研究分为两类, 即外部约束松弛角度和内部结构修正角度. 进一步地, 根据松弛的约束类型, 本文将外部约束松弛角度的研究分为两类: 松弛预算平衡约束和松弛联盟稳定约束. 根据修正的结构类型, 将内部结构修正角度的研究分为两类: 考虑权限结构限制和考虑系数结构调整. 最后, 本文分别从理论层面和应用层面分别提出两点研究展望: 寻找新的构造大联盟稳定解的方法, 解决更具适用性的非平衡博弈实际问题.

关键词 合作博弈 核心 非平衡博弈 成本分摊 稳定解

MSC (2020) 主题分类 90C11, 90C27, 91A12, 91B32

1 引言

博弈论, 译自 “game theory”, 是一种多人优化决策理论, 故又称对策论. 法国经济学家 Cournot [16] 在 1838 年提出了两个寡头厂商竞争的模型, 是博弈论学术研究的起点. Edgeworth [21] 在 1881 年出版的 *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences* 中最早提出了合作博弈的思想, 介绍了契约曲线的概念. 博弈论受到广泛关注源于 1944 年 *Theory of Games and Economic Behaviour* 的出版 [83], 其也被视作现代博弈论诞生的标志, 此后博弈论得到了广泛研究与应用. 作为博弈论的两大分支之一, 非合作博弈关心策略, 所强调的个体理性假设与市场经济理论相符, 其均衡 (equilibrium) 源自局中人决策的内在动机. 另外, 合作博弈关心结果, 强调集体理性, 其稳定性 (stability) 源自第三方机构介入形成的外在约束. 在很长一段时间内, 主流经济学强调

英文引用格式: Liu L D, Wu Z X, Liu X C, et al. Stable solutions of grand coalitions in unbalanced cooperative games (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 517–534, doi: 10.1360/SSM-2024-0152

自由竞争, 同时在现实中难以找到相应的合作场景. 因此, 合作博弈的研究群体相对较小, 属于博弈论研究分支中的 "冷板凳". 但随着社会发展和科技进步, 合作博弈的研究与应用价值日渐凸现 (参见文献 [14,17,86,87]).

另外, 从人类历史发展的角度来看, 集体理性曾在人类演化中扮演过重要角色. 历史学家 Harari[34] 在 *Sapiens: A Brief History of Humankind* 中提出, "智人之所以得以统治地球, 是因为智人是唯一可以大规模且灵活进行合作的物种". 他将智人能够进行合作的原因归因于 "认知革命" 后智人拥有了创造及相信虚构事物和故事的能力. 这种故事正是集体理性的载体. *Science*[40] 曾将 "人类合作行为如何发展" 列为 125 个最具挑战性的科学问题之一. 总之, 稳定合作是人类社会不断进步的重要因素. 然而, 现实中的合作往往又面临许多挑战与困境. 本文所聚焦的大联盟稳定解研究正是一种在正常情形下不能合作时的应对方案. 不同的稳定解概念是对传统集体理性下核心所定义的稳定的不同拓展, 厘清这些拓展的概念、机理、措施, 对以集体理性为基础的合作博弈的理论构建有着十分重要的意义.

大联盟稳定解作为非平衡博弈的核心概念, 是整个合作博弈理论体系的基石. 然而, 寻找大联盟稳定解往往十分困难. 在 2010 年, Caprara 和 Letchford[12] 将其提出的稳定解计算技术应用到一般的旅行商博弈和车辆路径博弈问题中, 充分展示了稳定解研究对于合作博弈理论研究的重要意义. 从现实角度出发, 合作博弈通常是非平衡的, 因为往往难以找到令所有参与者满意的解决方案. 举例来说, 公司对股东进行分红涉及利益分配的问题, 因此给出稳定的分配方案对公司的发展十分重要. 若无法提供适当的稳定解, 将难以吸引投资者, 从而不利于公司的长期发展. 另一个例子来自于当今蓬勃发展的数字经济, 例如拼多多和滴滴出行等平台的许多交易是通过拼单完成的. 然而, 这些平台在市场初期往往需要大量补贴以吸引消费者. 从合作博弈的角度来看, 这是一种核心不存在的非平衡博弈, 需要第三方机构的补贴来保障合作的稳定性.

在如今合作博弈的研究中, 非平衡博弈扮演着十分关键的角色. 一方面, 随着气候变化、公共卫生、粮食安全等全球性挑战的增加, 当今世界经济比以往更需要从自由竞争转向合作竞争[90]. 特别是数字经济的迅速发展[91], 据估计1), 到 2023 年, 数字化转型企业将占全球名义 GDP 的 53.3 万亿美元. 截至 2020 年2), 我国数字经济核心产业增加值占国内生产总值 (GDP) 比重达到 7.8%, 预计到 2025 年将达到 10%. 新经济模式的兴起催生了许多新兴合作场景, 如共享出行通过合作改变了传统的出行方式, 为合作博弈研究带来了更多的场景和可能性. 在这些情景下, 平台往往需要进行一定的监管和干预来确保系统合作的稳定性, 这为平台供应链的发展带来了新的挑战[93]. 面对数字合作治理中涌现的新问题, 构建数字资源竞争与合作的模式及其理论基础成为了该领域亟待解决的科学问题[13]. 而这些问题恰好是非平衡博弈研究的范畴. 另外, 随着运筹学和人工智能技术的发展, 丰富的数学和计算机工具为相关优化问题的求解提供了更多可能性. 例如, Leng 等[44] 在 2021 年对具有近似边际贡献递减结构的合作博弈分析, 获得了判断核心的存在的显式条件, 并提出了核心为空时的最小核值. Liu 等[48] 在 2024 年将逆优化技术应用于非平衡博弈的稳定解求解, 提出了一种新的高效算法, 保证了合作的稳定性. 基于以上原因, 以集体理性为基础的合作博弈理论正迎接着前所未有的机遇, 梳理并研究合作博弈非平衡博弈这一方向的发展历史与研究前沿有着十分重要的意义. 尽管现有文献综述 (参见文献 [51,57]) 对合作博弈中某些子领域进行了深入研究, 但目前尚无综述文献专注于大联盟稳定解的研究领域. 综上, 撰写非平衡博弈大联盟稳定解研究综述有利于深入了解合作博弈理论与应用的研究现

1) Statista. Nominal GDP driven by digitally transformed and other enterprises worldwide from 2018 to 2023 [EB/OL]. [2022-05-23]. Https://www.statista.com/statistics/1134766/nominal-gdp-driven-by-digitally-transformed-enterprises.

2) 国务院. 国务院关于印发 "十四五" 数字经济发展规划的通知 [EB/OL]. [2022-01-12]. Https://www.gov.cn/zhengce/content/2022-01/12/content_5667817.htm.

状, 并为后续研究提供参考, 对合作博弈理论与应用有重要意义.

本文从合作博弈的基本概念出发, 简要介绍平衡博弈相关研究后, 重点讨论了核心为空时大联盟稳定解的研究进展, 并提炼了非平衡博弈大联盟稳定解研究框架. 第 2 节介绍合作博弈中的基本概念. 第 3 节首次从外部约束松弛角度和内部结构修正角度对大联盟稳定解的研究进行分类, 并分别解读各个分类的经济学意义. 第 4 节总结全文, 并展望未来的研究, 指出非平衡博弈未来研究的两个趋势: 寻找新的构造大联盟稳定解的方法, 解决更具适用性的非平衡博弈实际问题.

2 基本概念

2.1 解概念

合作博弈研究如何形成联盟并合理分配联盟产生的收益或成本, 而不同的解概念对应着不同的分配方案. 其中, 联盟指的是由一个或多个局中人构成的集合, 通过与内部其他局中人合作以提升效用水平. 按效用是否可转移, 合作博弈可分为可转移效用 (transferable utilities) 博弈和不可转移效用 (nontransferable utilities) 博弈. 从数学角度而言, 可转移效用博弈可视作不可转移效用博弈的一种合理简化形式. 现有合作博弈文献对可转移效用博弈研究更加深入, 这也是本文综述的重点. 对于由局中人集合 $N=\{1,2,\ldots,n\}$ 构成的联盟博弈, 可能形成的联盟 S 至多有 2^n-1 个. 每个联盟若其效用可在任意联盟间转移, 则称之为可转移效用博弈; 反之, 则称之为不可转移效用博弈. 对可转移效用博弈而言, 特征函数是其一种重要的表述形式. von Neumann [82] 提出了特征函数概念. 特征函数是局中人集合 N 构成的全部联盟 $\{S \mid S\subseteq N\}$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 上映射的函数. 若特征函数为利益分配问题, 则这个实数值代表联盟成员可实现的最大收益 $v(S)$; 若为成本分摊问题, 则代表联盟成员可实现的最小成本 $c(S)$. 特别地, 对于空联盟, 假设其特征函数值为 0, 即 $v(\emptyset)=0$.

与非合作博弈相比, 合作博弈缺乏统一解概念和对局中人决策结果的分析方法. 一般而言, 在对合作而产生的利益进行分配时, 公平与稳定是两个主要考虑的因素. 首先, 公平意味着对利益的不同分配原则, 其往往因决策者的不同目标而存在多种理解. 现有合作博弈研究中的不同解概念分别体现了公平的不同角度. 合作博弈主要解概念包括核心 [67]、稳定集 [83]、Shapley 值 [70]、核仁 [64] 等. 以最知名的解概念核心为例, 如果核心存在, 则核心内可能存在多种不同的分配方案. 这些方案都是稳定的, 但未必是公平的. Shapley 值强调根据局中人在联盟中的边际贡献对利益进行分配, 而核仁强调从一种最小化最大不满意的角度来进行利益分配. 从经济学的角度来看, Shapley 值是一种功利主义, 而核仁则是一种平均主义. 需要指出的是, Shapley 值和核仁都不一定在核心内, 这意味着公平的方案并不一定是稳定的.

一般而言, 合作博弈的研究人员通过判断分配方案是否在核心内来判断其是否稳定. 也正因此, 核心也被认为是最重要的解概念之一. Gillies [29] 在 1953 年将核心的概念作为稳定集的研究工具. Shapley [67] 在 1955 年正式提出了核心作为一种解概念. 关于这一点的常见误解, 参见文献 [94] 中的相关讨论. 若合作博弈的核心非空, 则可直接基于核心中元素进行分配, 使得大联盟稳定 [73]. 虽然也有部分研究提出了其他的稳定解概念 (参见文献 [15, 74]), 但是核心目前仍然是接受度最高的判断分配方案是否稳定的方式. 对于给定的可转移效用博弈 (N,c), 其中 $N=\{1,2,\ldots,n\}$ 为 n 个局中人构成的集合, $c(\cdot)$ 为特征函数, 合作博弈 (N,c) 的核心是满足如下定义.

定义 2.1 给定分配向量 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{|N|}$, 合作博弈 (N,c) 的核心是满足 (2.1) 中联盟稳定约束与预算平衡约束的集合:

$$\sum_{j\in S}\alpha_j \leqslant c(S), \quad \forall S\subseteq N \text{ 且 } \sum_{j\in N}\alpha_j = c(N). \tag{2.1}$$

在定义 2.1 中, $\sum_{j\in S}\alpha_j \leqslant c(S), \forall S\subseteq N$ 被称为联盟稳定约束, 保证每个子联盟分摊的成本不高于其脱离联盟所需承担的最小成本; $\sum_{j\in N}\alpha_j = c(N)$ 被称为预算平衡约束, 保证全部局中人分摊的成本之和等于大联盟的特征函数值. 联盟稳定约束保证子联盟不存在背离大联盟的动机, 预算平衡约束保证效用完全分配. 核心的存在对于成本分摊机制设计有重要意义, 一方面, 其防止局中人脱离大联盟, 有利于大联盟的稳定存在; 另一方面, 其完全分摊大联盟的成本, 使得成本分摊得以稳定持续. 但由于联盟稳定性约束的数量随着局中人数量增加呈指数增长, 导致合作博弈的核心变得很难求解. 因此, 与核心相关的研究主要集中在验证合作博弈核心的非空性, 并在空核心情形下寻找合理的成本分摊方案. 值得注意的是, 即便是在计算上验证一个合作博弈的核心的存在性也可能存在困难, 即可能无法在多项式时间内验证. 这一方面是因为合作博弈存在指数级个子联盟, 需要验证指数级约束; 另一方面是因为合作博弈的特征函数求解本身可能存在困难.

2.2 平衡博弈

一个合作博弈在以下条件成立时是平衡博弈 (balanced game): 对于每个平衡集合 $\delta: 2^N\backslash\{\emptyset\}\to[0,1]$, 使得对于任意 $i\in N$, $\sum_{S\in 2^N: i\in S}\delta(S)=1$, 都满足 $\sum_{S\in 2^N\backslash\{\emptyset\}}\delta(S)v(S)\leqslant v(N)$. 特别地, 若一个博弈的全部子博弈都是平衡的, 则称这个博弈为完全平衡博弈 (totally balanced game). Bondareva [10,11] 和 Shapley [68] 给出了可转移效用合作博弈的核心存在的充分必要条件, 即著名的 Bondareva-Shapley 定理, 证明了平衡博弈与核心非空博弈等价.

平衡博弈是核心存在的合作博弈, 因此核心的非空性检验是平衡博弈研究的重要内容. 判断合作博弈的核心是否存在有 3 种主要方式: (1) 根据核心的定义, 判断是否存在解同时满足预算平衡约束和联盟稳定约束; (2) 根据 Bondareva-Shapley 定理, 判断是否为平衡博弈; (3) 根据合作博弈特征函数性质, 判断博弈是否属于某些特殊平衡博弈, 如凸博弈.

对某个或某类具体的合作博弈, 现有研究通常采取上述的第三种方式, 即先证明其属于某一类特殊的合作博弈, 然后基于这类特殊合作博弈的核心非空条件进行分析. 典型的特殊合作博弈包括凸博弈 (convex game)、线性生产博弈 (linear production game) 和经济批量博弈 (economic lot-sizing game) 等. Shapley [69] 在 1971 年证明了凸博弈的核心非空, 其中凸博弈指的是具有以下特征函数 v 的利益分配合作博弈 (N,v): 对于任意的子集 S 和 T, 有 $v(S)+v(T)\leqslant v(S\cup T)+v(S\cap T)$. 类似地, 成本分摊博弈中的凹博弈也有相应的结论. 线性生产博弈是指局中人投入资源进行线性生产, 以期在给定市场价格下获得收益的博弈, 其特征函数是线性的. 基于线性规划对偶性, Owen [58] 在 1975 年证明了线性生产博弈的核心非空. 基于这些研究结论, 后续的研究陆续探讨了多种情形下, 包括非线性情形在内的生产博弈核的存在性 (参见文献 [20,22,32]). Dubey 和 Shapley [20] 在 1984 年研究了非线性情形下合作博弈核心的存在性. Engelbrecht-Wiggans 和 Granot [22] 在 1985 年讨论了线性生产博弈的核心与对应线性规划主问题最优解集恰好相等的情形. Granot [32] 在 1986 年对 Owen 的工作进一步拓展, 将其应用到一些组合优化博弈, 如最小代价生成树博弈等. Deng 等 [19] 在 1999 年将其拓展到一类整数优化博弈, 并观察到当且仅当其对应的线性规划有整数最优解时, 合作博弈的核心存在. Chen 和 Zhang [14] 在 2016 年通过线性规划对偶证明了对于具有一般凹订货成本的经济批量博弈, 如果它的库存持有成本和积压成本都是线性函数, 则它的核心存在且在多项式时间内可计算. Abe [1] 在 2019 年从分解的角度给出了可转移效用合作博弈核心存在的一个充分必要条件.

平衡博弈在现有合作博弈应用研究中占据重要地位. Lozano [49] 基于联盟合作博弈, 研究数据包络分析 (data envelopment analysis, DEA) 中的数据共享问题, 其定义的数据包络合作博弈模型满足次可加性且是平衡博弈. Fiestras-Janeiro 等 [25] 在 2011 年梳理了将合作博弈应用于集中库存系统管理中的研究框架, 所构建的合作博弈模型核心非空. Guiérrez 等 [33] 在 2018 年以合作博弈为工具, 研究了温室气体排放许可的可持续分摊. Gopalakrishnan 等 [30] 于 2021 年在验证了博弈核心的存在性后, 基于核仁在化石燃料供应链中确定相应责任分配机制. 这些研究大多结合合作博弈方法并基于现实情境构建模型, 给出合作博弈模型的核心存在性条件, 并基于核心中元素进行利益分配或成本分摊, 为实际问题提供指导.

2.3　非平衡博弈

非平衡博弈是核心不存在的合作博弈. 由于核心的非空性条件苛刻, 非平衡博弈在现实生活中存在更广泛. 在非平衡博弈的研究中, 如何稳定大联盟是重要的研究内容. 对于不同类型的非平衡博弈, 现有研究往往设计一种合理的利益分配或成本分摊方案, 使得大联盟能够在外界的干预下实现稳定; 或讨论如何通过修正内部结构来稳定大联盟. 在非平衡博弈中如何进行合理的分配, 不仅是当今合作博弈领域亟待解决的研究问题, 而且研究这一问题能够为现实应用提供支撑.

近年来, 有关大联盟稳定解的研究取得了一系列进展 (参见文献 [12, 62, 84]). 但相关研究较为分散, 缺乏系统性梳理. 本文在对该领域现有文献系统性梳理的基础上, 将相关研究分为两类: 外部约束松弛角度与内部结构修正角度. 外部约束松弛即通过松弛约束将标准核心概念拓展为近似核心概念. 根据松弛的约束类型, 该视角下的研究可进一步分为松弛预算平衡约束和松弛联盟稳定约束. 对于松弛预算平衡约束的研究, 主要相关概念有 γ- 近似核心和稳定成本等. 对于松弛联盟稳定约束的研究, 主要相关概念有 ε- 近似核心和最小核心等. 内部结构修正即通过修正合作博弈结构使得大联盟稳定. 该视角下的研究可进一步分为考虑权限结构限制的合作博弈和考虑系数结构调整的合作博弈. 对局中人的合作对象进行修正, 可以得到考虑权限结构限制的合作博弈. 对特征函数进行修正, 可以得到考虑系数结构调整的合作博弈. 图 1 总结了大联盟稳定解研究的主要类型.

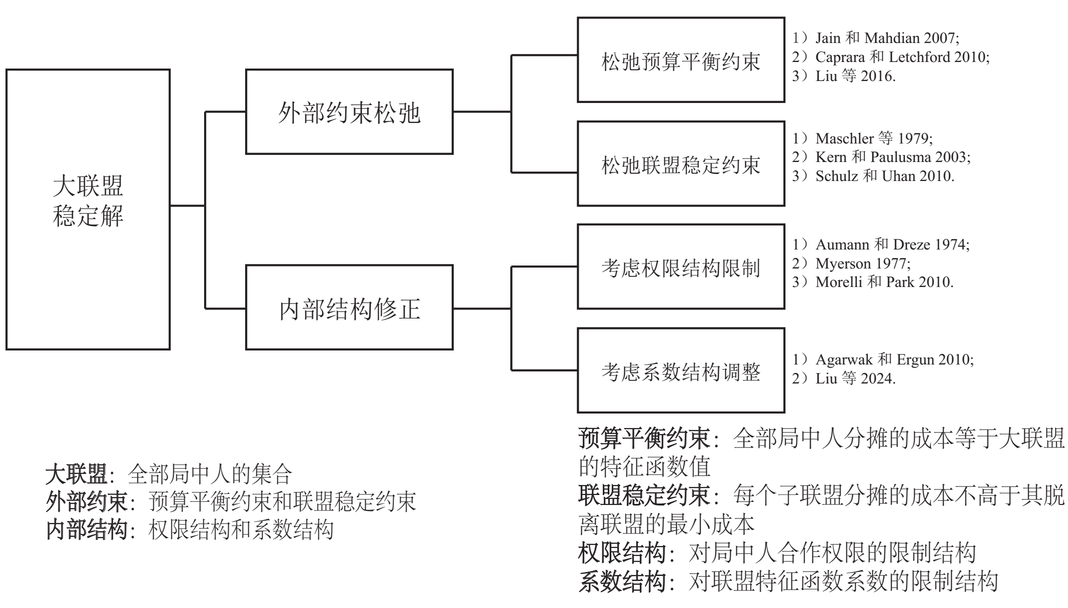

图 1　大联盟稳定解研究分类示意图

3 大联盟稳定解

通过对现有文献进行系统性梳理, 本文基于不同的数学表达形式将空核心下大联盟稳定解研究分为两类, 具体见表 1: (1) 外部约束松弛角度, 即通过调整约束数值以解除或加强约束条件, 从而使得大联盟稳定. 这种研究通常涉及松弛核心存在的条件之一, 以实现大联盟的稳定性. (2) 内部结构修正角度, 即通过调整联盟内部结构来实现大联盟的稳定. 这种研究一般包括对联盟结构权限的限制或特征函数系数的调整, 以促进大联盟的稳定性.

3.1 外部约束松弛角度

从核心的概念出发, 合作博弈的核心不存在的原因在于其不能同时满足预算平衡约束与联盟稳定约束. 一种直观的松弛思路在于, 在求解近似核心时松弛大联盟稳定要求的部分约束条件, 此时得到的全部局中人收益分配值或成本分摊额是大联盟特征函数值的上界或下界, 二者差值的存在是大联盟不稳定的原因. 因此, 通过对约束进行松弛可以使得大联盟稳定, 最小化这个差值的过程是外部约束松弛角度下近似核心求解的关键内容. 实际场景中对差值的处理方式一般是借助第三方机构, 通过补贴或惩罚使得大联盟稳定.

3.1.1 松弛预算平衡约束

外部约束松弛角度下松弛预算平衡约束的研究中, 主要的大联盟稳定解有 γ- 近似核心与稳定成本等. γ- 近似核心的松弛方法是松弛预算平衡约束, 保障联盟稳定约束 [39]. 定义 3.1 给出了 γ- 近似核心作为一种稳定解时局中人应该承担的总成本.

定义 3.1 在 γ- 近似核心中, 局中人承担的总成本等于 γ $(0 < \gamma \leqslant 1)$ 与大联盟最小成本的乘积, 即

$$\text{对于任意 } S \subseteq N, \text{都有 } \sum_{j\in S}\alpha_j \leqslant c(S) \text{ 且 } \sum_{j\in N}\alpha_j = \gamma c(N). \tag{3.1}$$

显然, 若能找到最大 γ 值, 可最大化局中人承担的总成本. Hoefer [37] 基于 γ- 近似核心的框架讨论了成本分摊博弈中的战略合作, 但是该研究所定义的博弈均是组合优化博弈. Caprara 和 Letchford [12] 提出了最优成本分摊问题 (optimal cost allocation problem) 的框架, 拓展了 γ- 近似核心的应用范围, 从组合优化博弈拓展到整数最小化博弈. 但是 Caprara 和 Letchford 所构建的算法只适用于求解线性特征函数的合作博弈. Liu 等 [46] 在此基础上, 引入了 Lagrange 松弛的方法对特征函数进行分解, 使得其可应用于非线性特征函数的合作博弈问题.

稳定成本是松弛预算平衡约束下的另一个稳定大联盟的工具. Bachrach 等 [7] 提出的稳定成本旨在给出全部局中人承担的成本与大联盟稳定时成本的差额的最小值. 定义 3.2 给出了稳定成本作为一种稳定解时局中人应该承担的总成本.

表 1 不同稳定解的数学表达形式

稳定解类型	数学表达形式
松弛预算平衡约束	$\sum_{j\in N}\alpha_j = c(N) \rightarrow \max\sum_{j\in N}\alpha_j$ (见定义 3.3)
松弛联盟稳定约束	$\sum_{j\in S}\alpha_j \leqslant c(S) \rightarrow \min\sum_{j\in S}\alpha_j$ (见定义 3.7)
限制博弈权限结构	$c(S) \rightarrow c(S')$ (见定义 3.8)
调整博弈系数结构	$c(S) \rightarrow c'(S)$ (见定义 3.9)

定义 3.2 在稳定成本中, 局中人承担的总成本等于 Δ ($\Delta \geqslant 0$) 与大联盟最小成本的和, 即

$$\text{对于任意 } S \subseteq N, \text{都有 } \sum_{j\in S}\alpha_j \leqslant c(S) \text{ 且 } \sum_{j\in N}\alpha_j = c(N)+\Delta. \tag{3.2}$$

若能找到 Δ 的最小值, 则可获得稳定成本. Resnick 等 [61] 研究了网络流博弈中的稳定成本且给出了有效算法, 发现在连通性博弈中稳定成本等于网络的最大流量值, 并对这一结果在具有等边容量与串行连接等情形进行了推广. Meir 等 [54] 基于 Bachrach 等的稳定成本概念给出不同情形下补贴的限制条件, 并证明了最小补贴与最小需求松弛之间的比值有严格的界使得联盟稳定. 随后, Meir 等 [55] 研究发现互动网络合作博弈的稳定成本受到互动网络相关参数的限制, 并给出了互动网络合作博弈中树宽与稳定成本之间关系的证明. Jain 和 Mahdian [39] 在 2007 年对成本分摊博弈进行了系统性梳理, 这标志着松弛预算平衡约束研究的逐渐成熟. Caprara 和 Letchford [12] 在 2010 年对整数最小化博弈给出了一般性算法框架, 使得此类工具的广泛应用成为可能. 无论是 γ- 近似核心还是稳定成本, 现有研究都聚焦于拓展其应用范围, 使得其能适应于多种类型的合作博弈收益分配或成本分摊. 定义 3.3 总结了此类研究的共同点.

定义 3.3 在松弛预算平衡约束的稳定解概念中, (2.1) 可改写为

$$\left\{\alpha \in \mathbb{R}^{|N|} \,\middle|\, \max\sum_{j\in N}\alpha_j, \sum_{j\in S}\alpha_j \leqslant c(S), \forall\, S\subseteq N\right\}. \tag{3.3}$$

本文通过使用例 3.1 中的无容量约束设施选址博弈 (uncapacitated facility location game), 来具体地阐明松弛预算平衡约束下的稳定解.

例 3.1 考虑一个具有 4 个局中人 ($N=\{1,2,3,4\}$) 以及 4 个 (潜在的) 设施 ($M=\{1,2,3,4\}$) 的无容量约束设施选址博弈. 每个设施的开设成本均为 10 ($f_1=f_2=f_3=f_4=10$). 规定设施 i 以成本 c_{ij} 服务每个局中人 j, 具体成本系数见图 2.

显然, 对于大联盟, 特征函数的最小值为 $10+10+3+3+2+1=29$. 其最优成本分摊问题可写作:

$$\begin{aligned}\max_{\alpha}\ & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\\ \text{s.t.}\ & \alpha_1 \leqslant 13,\dots,\alpha_4 \leqslant 11,\\ & \dots,\\ & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \leqslant 29.\end{aligned}$$

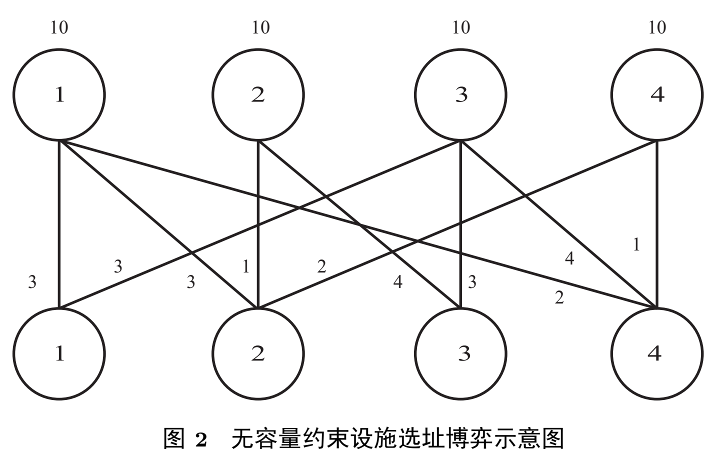

图 2 无容量约束设施选址博弈示意图

由此可解得最优成本分摊为 26.5, 其小于大联盟的特征函数值 29, 因此该问题的核心是空的. 若欲使其稳定, 则需要对大联盟提供至少 2.5 的补贴, 此时一组稳定解为 $(5.0, 6.5, 8.5, 6.5)$.

3.1.2 松弛联盟稳定约束

外部约束松弛角度下松弛联盟稳定约束的研究中, 主要的大联盟稳定解有 ϵ- 近似核心与最小核心等. 与 γ- 近似核心相反, ε- 近似核心的松弛方法是松弛联盟稳定约束, 保障预算平衡约束 (参见文献 [9, 23]). 定义 3.4 给出了 ε- 近似核心作为一种稳定解时每个联盟分摊的成本和的上限.

定义 3.4 在 ε- 近似核心中, 对于 $\varepsilon \geqslant 0$, 每个联盟分摊的成本之和不超过 $1+\varepsilon$ 与联盟最小成本的乘积, 即

$$\text{对于任意 } S \subseteq N, \text{都有 } \sum_{j\in S} \alpha_j \leqslant (1+\varepsilon)c(S) \text{ 且 } \sum_{j\in N} \alpha_j = c(N). \tag{3.4}$$

尽管 γ- 近似核心与 ε- 近似核心松弛的约束不同, 但是其数学的本质相同, 因此对于 γ- 近似核心与 ε- 近似核心的关键在于最优 γ 或 ε 值的取值, 即连续边界的选择. 以最短路博弈为例, Faigle 等 [23] 在 1998 年设计算法针对 Euclid 最短路博弈计算出最优 ε 值为 $\frac{1}{3}$. Bläser 和 Shankar Ram [9] 在 2008 年对非对称最短路博弈的 ε 值给出了一般性结论, 即其核心位于 $(\frac{4}{3}\log_3(|N|)+c)$- 近似核心中, 其中 c 为常数. 在此基础上, Troiello 和 Uhan [77] 在 2013 年基于 α- 近似核心研究了非对称最短路博弈中的成本分摊, 其中 α- 近似核心与 γ- 近似核心的联系在于 $\alpha = \frac{1}{\gamma}$.

与 ε- 近似核心相似, 最小核心的松弛方法是松弛联盟稳定约束, 并强化预算平衡约束, 但是强化的方式不一样 (参见文献 [41, 52, 65, 66]). 定义 3.5 给出了最小核心作为一种稳定解时每个联盟分摊的成本和的上限.

定义 3.5 在最小核心 (又称强 ε- 近似核心) 中, 每个联盟的成本不超过 z ($z \geqslant 0$) 与联盟最小成本的和, 即

$$\text{对于任意 } S \subseteq N, \text{都有 } \sum_{j\in S} \alpha_j \leqslant z + c(S) \text{ 且 } \sum_{j\in N} \alpha_j = c(N). \tag{3.5}$$

与标准核心概念不同, 最小核心的联盟稳定约束的右端项多了一个 z. 在 ε- 近似核心中, 这个部分表示为 $\varepsilon c(S)$. 在给定成本分摊 α_j 下, 最小核心允许子联盟对成本分摊存在一定的不满意程度, 其中最大不满意程度即为 z, 也称为最小核值. Schulz 和 Uhan 发现, 在匹配合作博弈中, 核仁能被高效计算, 其结果等于最小核值 [65], 并提出了一种 3- 近似算法 [66]. 此外, 最小核值还是最小化最大超额 [24, 52]. 超额可定义为 $e(\alpha; S) = \sum_{j\in S} \alpha_j - c(S)$. 最小化超额可降低局中人的最大不满意程度, 其背后所代表的平均主义思想对构建公平分配方案具有重要意义. 这里讨论的最小核心又称为强 ε- 近似核心, 最早由 Shapley 和 Shubik [71, 72] 在 1963 年提出, 并由 Maschler 等 [52] 在 1979 年正式定义. 与之相对的一个概念是弱 ε- 近似核心, 其与前者唯一的区别在于 ε 的影响直接作用于子联盟中的个体, 具体概念见定义 3.6.

定义 3.6 在弱 ε- 近似核心中, 每个联盟的成本不超过 $|S|\varepsilon$ ($\varepsilon \geqslant 0$) 与联盟最小成本的和, 即

$$\text{对于任意 } S \subseteq N, \text{都有 } \sum_{j\in S} \alpha_j \leqslant |S|\varepsilon + c(S) \text{ 且 } \sum_{j\in N} \alpha_j = c(N). \tag{3.6}$$

松弛联盟稳定约束研究的发展主要可分为两个阶段: 第一阶段 (2010 年以前) 是萌芽阶段, 这一阶段该类研究相对较少, 其与松弛预算平衡约束研究均发展比较缓慢; 第二阶段 (2010 年至今) 是发展

阶段, 这一阶段大量松弛联盟稳定约束的研究出现, 许多研究将最小核心与核仁结合起来. Liu 等 [47] 将最小核心与 γ- 近似核心结合, 设计了一种同时进行补贴与惩罚以稳定大联盟的策略. 一些高质量的应用研究也在这一阶段涌现出来. Le [43] 提出了广义最小生成树博弈模型并研究相关性质. Sziklai 等 [76] 对标准决策树博弈进行推广以求解网络上的成本分摊. Lu 和 Quadrifoglio [50] 研究共享交通机制设计, 并基于核仁和近似核仁给出了公平的成本分摊. Hezarkhani 等 [36] 在调度整合博弈中探讨了在运营商之间进行公平成本分配, 并在核心为空时引入特定组件核心的概念. Könemann 等 [42] 基于最小核框架给出了加权合作匹配博弈一种高效核心算法用于计算核仁. Westerink-Duijzer 等 [89] 探究了有限剂量疫苗稳定分配存在的条件并给出了市场价格分析表达式. 第二阶段研究大多以最小核心为近似核心概念的原因可能是最小核心的性质能更好地与核仁结合. 定义 3.7 总结了此类研究的共同点.

定义 3.7 在松弛联盟稳定约束的稳定解概念中, (2.1) 可改写为

$$\left\{\alpha \in \mathbb{R}^{|N|} \;\middle|\; \min \max_{S \subseteq N} \left(\sum_{j \in S} \alpha_j - c(S)\right), \sum_{j \in N} \alpha_j = c(N)\right\}. \tag{3.7}$$

沿用例 3.1 中的无容量设施选址博弈, 例 3.2 具体地阐明惩罚机制.

例 3.2 在例 3.1 所设定的参数下, 最优成本分摊为 26.5, 小于大联盟特征函数值 29, 因此合作博弈的核心不存在. 为使得大联盟稳定, 外部机构可以规定背离大联盟的子联盟一致需要缴纳 2 单位的罚金, 此时最优成本分摊为 29, 等于大联盟特征函数值, 一组稳定解为 $(4, 7, 10, 8)$.

3.1.3 稳定策略的经济学意义: 补贴与惩罚

本文根据松弛的约束类型将外部约束松弛角度下的研究分为两类, 分别对应经济学上的补贴与惩罚措施. 近似核心概念是对标准核心概念的拓展, 通过求解得到的收益分配值或成本分摊额与标准核心概念下的值存在差额. 这种差额的存在需要在非平衡博弈中引入第三方机构的协助来实现大联盟的稳定. 通常, 第三方机构会通过补贴或惩罚的方式填补这一差额, 以确保大联盟的稳定. 以 ε- 近似核心为例, 在引入第三方机构时, 第三方机构可通过对有背离大联盟意愿的子联盟施加额度为 z 的惩罚, 使得大联盟稳定. 与之类似, γ- 近似核心下允许局中人承担的总成本与大联盟最小成本存在一定的差额 $(1-\gamma)c(N)$. 此时, 第三方机构为使得大联盟稳定, 需要对所有局中人给予 $(1-\gamma)c(N)$ 的补贴.

为进一步说明补贴与惩罚在联盟稳定中的作用, 下面用图像进行类比说明. 如图 3 所示, 五角星形的边界表示合作博弈的当前状态, 圆形的边界表示合作博弈稳定的状态. 因此, 当五角星形的边界与圆形的边界没有完全重合时, 该五角星形代表的合作博弈是一个非平衡合作博弈. 为使得该非平衡合作博弈稳定, 有两种方式. 第一种方式是对五角星形进行填充, 即进行补贴 (参见文献 [12,46]). 第二

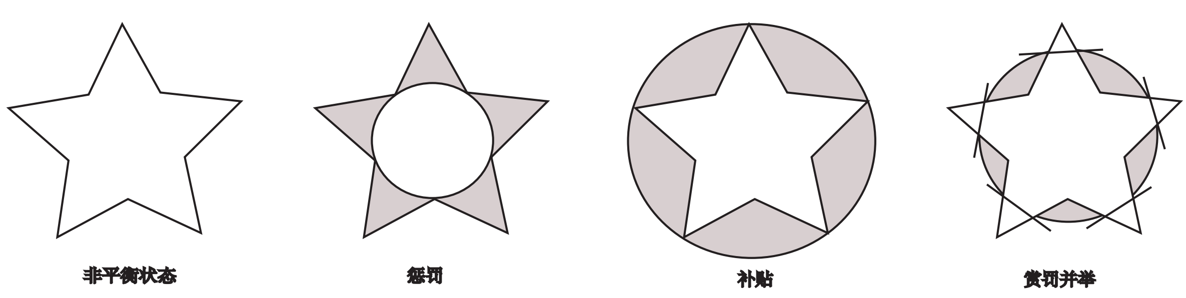

图 3 补贴与惩罚稳定大联盟示意图

种方式是对五角星形进行切割, 即施加惩罚 (参见文献 [9,52]). 此外, 还可以将两种方式结合起来, 对五角星形同时进行填充与切割, 即赏罚并举 (参见文献 [47]). 在图 3 中, 通过填充或补贴的方式使得非平衡合作博弈大联盟稳定, 满足联盟稳定约束和预算平衡约束. 图 3 中的填充部分即为补贴额, 切割部分即为惩罚值.

从补贴与惩罚角度重新考虑与外部约束松弛角度有关的大联盟稳定研究, 能为该领域的研究带来新的启发. 例如, 以往研究大多单独进行补贴或单独施加惩罚, 考虑一种同时使用补贴与惩罚的稳定大联盟方式能够为非平衡博弈的成本分摊提供一种适用性更强的解决方案[47]. 构建更加多样、更加符合实际的补贴与惩罚方案可能是该领域未来研究一个有潜力的方向.

3.2 内部结构修正角度

对于非平衡博弈的大联盟稳定, 除从外部约束松弛角度施加补贴或惩罚使得大联盟稳定外, 还可以通过内部结构修正使得大联盟稳定, 从而得到稳定收益分配或成本分摊. 该角度下的研究与外部约束松弛角度下的研究在稳定大联盟上的不同在于, 外部约束松弛角度下的研究是一种事后的视角, 即对于核心为空的合作博弈通过第三方机构进行补贴或惩罚使得大联盟稳定; 内部结构修正角度下的研究是一种事前的视角, 即通过调整合作博弈中相关结构使得大联盟稳定. 根据调整的结构不同, 内部结构修正角度的研究可以分为修正局中人合作对象的考虑权限结构限制的合作博弈、修正系数结构的考虑系数结构调整的合作博弈.

3.2.1 考虑权限结构限制

考虑权限结构限制的合作博弈主要可以分为两类: 具有联盟结构的合作博弈 (cooperative game with a coalition structure)、具有图结构的合作博弈 (graph-restricted cooperative game). 这两类研究本质上都属于不完全合作结构的合作博弈, 即打破了传统的任意局中人之间都能互相合作的假设. 在不完全的合作博弈中, 只有相互关联的局中人才能进行合作并分配收益或分摊成本. 对于具有联盟结构的合作博弈, 联盟结构是对全部局中人的一种划分, 划分中元素组成的优先联盟与其他局中人存在不同的合作规则. 对于具有图结构的合作博弈, 图结构是对局中人合作限制的一种拓扑结构, 只有连通图中相互连通的局中人才能相互合作.

Aumann 和 Dreze[6] 在 1974 年最早系统地研究了合作博弈中的联盟结构. 合取权限结构与析取权限结构是优先联盟内部一种基本的权限结构. 在具有合取权限结构的合作博弈中, 局中人的行为需要得到其他全部局中人的同意 (参见文献 [28,79]). 在具有析取权限结构的合作博弈中, 局中人需要得到其他至少一个局中人的同意 (参见文献 [26,27,78]). 分析具有联盟结构的合作博弈文献绝大多数以值理论的研究为主 (参见文献 [4,59,75,80,85,92]), 但是也有一些文献研究引入了联盟结构对大联盟稳定的影响. Demange[18] 通过对具有层级机构组织研究发现, 组织中层级结构的存在能以一种最优方式进行分配以实现组织中的大联盟稳定. Morelli 和 Park[53] 基于内部层级的角度, 在一般性的框架下讨论了局中人如何形成稳定联盟结构. Wen 等[88] 在对集团下不同子公司分配收益的研究中, 构建了一个考虑联盟结构的合作博弈模型, 并证明其核心是存在的. 在 Aumann 和 Dreze 的基础上, Myerson[56] 在 1977 年构造了更加复杂的权限结构, 即有图结构限制的合作博弈. 与联盟结构限制的合作博弈类似, 有大量文献基于值理论研究图结构限制合作博弈 (参见文献 [35,45,60]), 也有一些文献探索图结构限制下核心的存在性. van den Nouweland 和 Borm[81] 证明了一个具有完全圈连通图的凸性可以从消除图结构限制的合作博弈的凸性得到. Ambec 和 Sprumont[5] 在研究沿河流的水资源分配问题

中, 考虑到沿河流的局中人对水资源存在拟线性的偏好, 结合河流的结构构建了相应的合作博弈模型, 并证明了其核心是存在的. Saad 等 [63] 在 2009 年结合通信领域的实际需求, 将带有图结构限制的合作博弈运用到通信网络中, 用于分析节点行为, 并给出了核心非空的条件. Béal 等 [8] 给出了具有树结构的合作博弈核心存在的充分必要条件, 是少有的对具有树结构的合作博弈从核心角度进行的研究. Grabisch [31] 在 2013 年对具有图结构限制的合作博弈进行了一般性总结, 并根据图结构类型将其归为 3 类: 连通线图 (communication line-graphs)、无圈连通图 (cycle-free communication graphs)、完全圈连通图 (cycle-complete communication graphs). 定义 3.8 总结了此类研究的共同点.

定义 3.8　对于考虑权限结构限制的稳定解, (2.1) 可改写为

$$\sum_{j\in S}\alpha_j \leqslant c(S'), \quad \forall\, S' \subseteq N \text{ 且 } \sum_{j\in N}\alpha_j = c(N), \tag{3.8}$$

其中 S' 满足特定的权限结构, $|S'| \leqslant 2^{|N|}-1$.

本文从大联盟稳定的角度总结该类研究. 但是实际上大部分考虑权限结构限制的合作博弈研究都是基于值理论进行的. 这可能是因为对局中人之间的关系引入拓扑结构后增加了分析难度.

3.2.2　考虑系数结构调整

考虑系数结构调整的合作博弈旨在通过调整特征函数系数使得大联盟稳定. 具体来讲, 对给定大联盟的最优解, 通过调整合作博弈中的确定参数, 在保障大联盟稳定的同时, 使得大联盟内需要分担的总成本在一定范围内. 现有对于大联盟稳定解研究很少有从系数结构调整角度进行, 其原因可能在于, 一方面, 系数结构调整是针对的某种具体的合作博弈, 研究结果可能难以推广到其他问题; 另一方面, 对给定大联盟最优解, 很少有方法能够获得符合条件的系数结构调整方案.

对此类研究, 逆优化 (inverse optimization) 是一个非常自然且适用的数学工具. 一个优化问题的反问题 (inverse problem) 称为逆优化问题, 其中反问题指通过问题解的信息来获得问题定解条件. 逆优化在地球科学、医学成像、交通均衡等领域中有广泛应用 [3]. 面对交通运输网络中的机制设计问题, Agarwal 和 Ergun [2] 在 2010 年通过逆优化确定合适的成本向量, 通过为联盟成员提供额外激励, 引导运营商追求最优合作策略, 从而形成可持续的联盟. 但该研究构造的绝大部分算例的核心是存在的, 针对一般性问题的空核心系数调整模型仍待深入研究. 进一步地, Houghtalen 等 [38] 在 2011 年提出了一种机制, 运用逆优化方法, 通过合理设定资源价格来分配联盟资源和利润, 以激励货运公司做出符合整个联盟最优决策的选择. 随后, Zheng 等 [95] 在 2015 年提出了一种混合整数线性规划模型, 以解决关于班轮联盟的相关问题, 包括航运网络设计、船队部署、可变需求分配、班轮公司之间的船舶容量交换以及集装箱路由等. 模型引导班轮公司追求最佳的协作解决方案, 并通过支付容量交换成本作为激励, 该成本通过逆优化方法计算. 这些研究以成本征收为基础, 需要额外的努力向博弈的参与者解释. 最近, Liu 等 [48] 设计了一种以成本调整为基础的方法, 以实现大联盟的稳定. 该研究以整数最小化合作博弈为研究对象, 将如何优化成本调整量问题建模为一个有约束的逆优化问题. 该研究展示了这个有约束的逆优化问题是 NP (non-deterministic polynomial) 困难的, 并基于线性规划重述给出了相应的求解算法以及可行性条件. 由于逆优化方法的一般性, 基于逆优化的成本调整方法可以很好地推广到其他类似的合作博弈. 定义 3.9 总结了此类研究的共同点.

定义 3.9　对于考虑系数结构调整的稳定解, (2.1) 可改写为

$$\sum_{j\in S}\alpha_j \leqslant c'(S), \quad \forall\, S \subseteq N \text{ 且 } \sum_{j\in N}\alpha_j = c'(N), \tag{3.9}$$

其中 $c'(S)$ 为系数结构调整后的特征函数.

与外部约束松弛角度相比, 内部结构修正角度的稳定大联盟方案是事前视角而非事后视角. 这有利于提升局中人积极性并且可以控制大联盟预期合作方案与收益分配值或成本分摊额. 从这一点看, 这比外部约束松弛角度采取事后补贴或惩罚为大联盟提供了更多选择. 但是, 修正联盟结构的前提是所研究的合作博弈模型能进行相应的结构调整, 修正联盟结构降低了适用性, 使得非平衡博弈求解的场景受到一定限制.

同样使用例 3.1 中的无容量约束设施选址博弈在下面例 3.3 中具体地阐明结构限制和系数调整机制.

例 3.3 在例 3.1 所设定的参数下, 最优成本分摊为 26.5, 小于大联盟特征函数值 29, 因此合作博弈的核心不存在. 为使得大联盟稳定, 外部机构可以通过对系数进行调整来改变稳定解的存在. 例如, 若将 c_{14} 由 2 调整为 100, 则最优成本分摊为 28, 此时稳定解仍然不存在; 若将 c_{22} 由 1 调整为 100, 则最优成本分摊为 29, 此时稳定解存在, 一组稳定解为 $(3, 9, 13, 4)$. 从结构限制的角度, 外部机构可以限制设施 2 为局中人 2 提供服务, 同样可以达到使得稳定解存在的效果.

3.2.3 稳定策略的经济学意义: 直接干预与间接调控

本文在数学上根据修正的结构类型将内部结构修正角度下的研究分为两类: 考虑权限结构限制和考虑系数结构调整, 这两类研究分别对应经济学上的直接干预与间接调控思想. 在对特征函数修正以稳定大联盟过程中, 局中人的决策受到一定的限制或调整, 即可行域变小. 第三方机构通过控制可行域使得非平衡博弈大联盟稳定. 一方面, 第三方机构可以限制权限结构, 即限制局中人的部分合作行为, 用一种直接干预措施来稳定大联盟; 另一方面, 第三方结构可以调整系数结构, 即仅进行收益系数或成本系数的调整, 用一种间接调控措施来稳定大联盟. 直接干预措施更加直观, 但是可能缺乏效率; 间接调控措施有效率, 但是由于核心的复杂性难以确定最优调整范围.

为进一步说明直接干预与间接调控在联盟稳定中的作用, 下面同样用图像进行类比说明. 如图 4 所示, 五角星形的边界表示合作博弈的当前状态, 圆形的边界表示合作博弈稳定的状态. 因此, 当五角星形的边界与圆形的边界没有完全重合时, 该五角星形代表的合作博弈是一个非平衡合作博弈. 为使得该非平衡合作博弈稳定, 有两种方式. 第一种方式是对不重合的边界进行限制, 即直接干预措施. 第二种方式是对五角星形进行拉伸, 即间接调控措施. 在图 4 中, 通过限制或拉伸的方式使得非平衡合作博弈大联盟稳定, 满足联盟稳定约束和预算平衡约束.

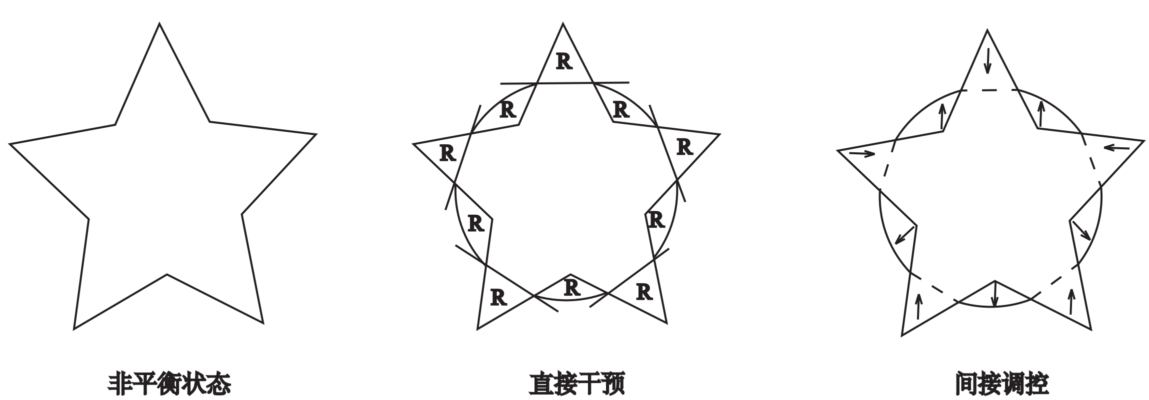

图 4 直接干预与间接调控稳定大联盟示意图

3.3 不同稳定解的应用场景

本小节概述了 4 种稳定解类型, 表 2 总结了不同稳定解的应用场景. 在外部约束松弛角度下, 两种稳定解分别对应着不同的应用场景: 一种是针对补贴加入大联盟的局中人, 另一种是针对惩罚脱离大联盟的小群体. 而在内部结构修正角度下, 另外两种稳定解也分别对应着不同的场景: 一种是限制局中人之间的合作, 另一种是改变定价以调整联盟成本. 以共享出行平台为例, 为了吸引顾客并保持一定的市场占有率, 平台可能会对部分顾客提供补贴. 同时, 为了防止司机放弃当前订单而接受其他更有吸引力的订单, 平台可能会对司机的违约行为进行罚款. 此外, 为了降低绕道成本, 平台会合理规划最优的等待时间阈值. 最后, 为了更好地服务各类顾客, 平台可以通过合理的定价来保障合作关系.

4 总结与展望

本文详细综述了与非平衡博弈大联盟稳定解相关的研究. 通过对大联盟稳定解这一领域现有文献的梳理, 本文在深入挖掘稳定解的定义的基础上, 从数学优化的视角提炼了该领域的研究框架, 创新地将其总结为两类研究: 外部约束松弛角度的研究和内部结构修正角度的研究. 基于该框架, 我们发现当前的稳定解在应对一些特殊问题时仍然存在一定局限. 例如, 对于合作博弈中特征函数为整数优化问题的情形, 现有稳定解仍存在求解速度较慢、近似误差较大等问题. 此外, 囿于理论工具的发展, 相关的合作博弈应用研究往往只能考虑具有特殊结构的问题以简化分析. 为填补现有理论研究的不足, 本文建议未来从理论层面寻找新的大联盟稳定解构造方法. 同时, 考虑到非平衡博弈分析工具的完善有利于应用研究的发展, 本文从应用层面探讨了适用性更强的非平衡博弈应用研究的前景.

(1) 寻找新的构造大联盟稳定解的方法.

寻找大联盟稳定解的过程可视为通过一定的措施将一组不在核心内的分配重新调整至核心内. 本质上, 这一过程将原本无可行解的优化问题转化为有解问题. 根据本文所提供的研究框架, 从外部约束松弛角度出发, 可以构造更多样的外部约束松弛解; 同时, 从内部结构修正角度出发, 则能提出更丰富的结构修正方式. 值得指出的是, 目前尚未有基于外部约束松弛和内部结构修正的双重模式定义新的稳定解. 未来研究也可以考虑同时融合这两种思路, 设计一种统一的稳定大联盟工具. 这种工具可以通过一些度量来比较不同大联盟稳定解之间的关系, 甚至分析稳定解是否落入到了 Shapley 值等其他解概念中.

(1.1) 构造更多样外部约束松弛解.

构造更多样外部约束松弛解是稳定大联盟的传统策略, 其中又以对近似核心的研究为主. 与合作博弈存在多种解概念与分析方法类似, 近似核心一样存在多种定义, 如本文所介绍的 γ- 近似核心和 ϵ-近似核心等, 但是联盟稳定约束的数量是指数级的, 这使得近似核心的求解往往变得相当困难. 未来研究可以在深入了解已有合作博弈近似核心概念的基础上, 提出新的近似核心概念或算法, 对经典的

表 2　不同稳定解的应用场景

稳定解类型	应用场景	具体措施 (以共享出行平台为例)
松弛预算平衡约束	补贴加入大联盟的局中人	对部分顾客实施补贴
松弛联盟稳定约束	惩罚脱离大联盟的小群体	司机取消订单的罚金
限制博弈权限结构	限制局中人之间的合作	限制订单的等待时间
调整博弈系数结构	改变定价调整联盟成本	合理定价以保障合作

近似核心分配方式进行改进, 以获得更优的近似分配或提高计算效率. 具体而言, 既可以尝试进一步松弛核心的概念, 以在求解时间上获得补偿, 也可以在现有近似核心概念的基础上, 结合强化学习、组合优化相关理论, 在计算方面做深入研究. 例如, 设计多样的联合型补贴与惩罚的近似核心求解算法, 对非平衡博弈同时施加补贴与惩罚, 以提供更加符合实际的稳定大联盟方案.

(1.2) 提出更丰富的结构修正方式.

修正合作博弈的内部结构是一种稳定大联盟的新思路. 相较近似核心是一种普适性的计算方法, 修正联盟结构需要建立在具有特殊结构的问题基础上, 这降低了其在一般性问题上的应用性. 但是修正合作博弈的内部结构具有其独特的优势, 即与近似核心相比, 它采用一种事前视角而不是事后视角的补贴或惩罚方式, 能够起到防患未然的作用. 此外, 修正联盟结构不会降低局中人参与的积极性, 在稳定大联盟的基础上有利于增强局中人对公平的感知. 未来研究一方面可以考虑更多符合实际的联盟结构, 突破传统的合作博弈理论, 以增强其在一般结构上的适用性; 另一方面, 可以将近似核心的计算与具备特殊联盟结构的合作博弈结合起来, 设计出针对特定合作博弈问题的高效求解算法.

(2) 解决更具适用性的非平衡博弈实际问题.

由于核心的存在条件比较苛刻, 非平衡博弈在现实中的存在十分广泛, 但因其理论上的分析和计算难度, 现有的合作博弈应用研究更加关注平衡博弈. 但随着近年来数字经济和人工智能的迅速发展, 非平衡博弈的研究焕发出了新的活力. 具体而言, 数字经济为非平衡博弈提供了丰富的应用场景, 人工智能则促进了其计算工具的发展. 解决实际情境中的非平衡博弈问题是未来研究的一个重要方向. 本文在此就数字经济和人工智能领域与非平衡博弈的交叉提供了一些未来可能的应用, 以供研究人员参考.

在数字经济方面, 尽管共享经济等核心应用场景一直备受关注, 但由于非平衡博弈稳定解的复杂性, 现有研究往往只能解决特定结构的平衡博弈, 这限制了合作博弈在共享经济中的应用. 然而, 随着对大联盟稳定解研究的不断涌现, 以前受限于非平衡博弈求解难度的应用研究正在受到更多关注. 在人工智能方面, 稳定解不仅具有丰富的经济学含义, 而且在计算上通常是一个 NP 困难问题, 因此如何快速求解也成为计算经济学领域研究人员关注的焦点. 未来, 研究人员可以尝试利用深度强化学习技术来解决稳定解中的组合优化问题, 并探索基于合作博弈的多智能体决策框架, 以解决复杂环境中的决策问题.

致谢 感谢编委会和审稿人的认真评阅与宝贵意见.

参考文献

1 Abe T. Decomposing a balanced game: A necessary and sufficient condition for the nonemptiness of the core. Econom Lett, 2019, 176: 9–13

2 Agarwal R, Ergun Ö. Network design and allocation mechanisms for carrier alliances in liner shipping. Oper Res, 2010, 58: 1726–1742

3 Ahuja R K, Orlin J B. Inverse optimization. Oper Res, 2001, 49: 771–783

4 Albizuri M J, Aurrecoechea J, Zarzuelo J M. Configuration values: Extensions of the coalitional Owen value. Games Econom Behav, 2006, 57: 1–17

5 Ambec S, Sprumont Y. Sharing a river. J Econom Theory, 2002, 107: 453–462

6 Aumann R J, Dreze J H. Cooperative games with coalition structures. Internat J Game Theory, 1974, 3: 217–237

7 Bachrach Y, Elkind E, Meir R, et al. The cost of stability in coalitional games. In: International Symposium on Algorithmic Game Theory. Berlin-Heidelberg: Springer, 2009, 122–134

8 Béal S, Rémila E, Solal P. Weighted component fairness for forest games. Math Soc Sci, 2012, 64: 144–151

9 Bläser M, Shankar Ram L. Approximately fair cost allocation in metric traveling salesman games. Theory Comput Syst, 2008, 43: 19–37

10 Bondareva O N. The theory of the core in an n-person game. Vestnik Leningrad Univ, 1962, 13: 141–142
11 Bondareva O N. Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games. Probl Kibernet, 1963, 10: 139
12 Caprara A, Letchford A N. New techniques for cost sharing in combinatorial optimization games. Math Program, 2010, 124: 93–118
13 Chen S, Pu S, Fang Y, et al. The new rule of digital economy. J Management Sci China, 2021, 24: 36–47 [陈收, 蒲石, 方颖, 等. 数字经济的新规律. 管理科学学报, 2021, 24: 36–47]
14 Chen X, Zhang J. Duality approaches to economic lot-sizing games. Prod Oper Manag, 2016, 25: 1203–1215
15 Chwe M S Y. Farsighted coalitional stability. J Econom Theory, 1994, 63: 299–325
16 Cournot A A. Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses. Paris: Hachette Livre, 1838
17 Curiel I. Cooperative Game Theory and Applications: Cooperative Games Arising From Combinatorial Optimization Problems. Berlin-Heidelberg: Springer, 2013
18 Demange G. On group stability in hierarchies and networks. J Polit Econ, 2004, 112: 754–778
19 Deng X, Ibaraki T, Nagamochi H. Algorithmic aspects of the core of combinatorial optimization games. Math Oper Res, 1999, 24: 751–766
20 Dubey P, Shapley L S. Totally balanced games arising from controlled programming problems. Math Program, 1984, 29: 245–267
21 Edgeworth F Y. Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences. London: Kegan Paul, 1881
22 Engelbrecht-Wiggans R, Granot D. On market prices in linear production games. Math Program, 1985, 32: 366–370
23 Faigle U, Fekete S P, Hochstättler W, et al. On approximately fair cost allocation in Euclidean TSP games. OR Spektrum, 1998, 20: 29–37
24 Faigle U, Kern W, Kuipers J. On the computation of the nucleolus of a cooperative game. Internat J Game Theory, 2001, 30: 79–98
25 Fiestras-Janeiro M G, García-Jurado I, Meca A, et al. Cooperative game theory and inventory management. European J Oper Res, 2011, 210: 459–466
26 Gilles R P, Owen G. Games with permission structures: The disjunctive approach. Working Paper. Blacksburg: Department of Economics, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1991
27 Gilles R P, Owen G. Cooperative games and disjunctive permission structures. CentER Discussion Paper. Tilburg: Vakgroep CentER, 1999
28 Gilles R P, Owen G, van den Brink R. Games with permission structures: The conjunctive approach. Internat J Game Theory, 1992, 20: 277–293
29 Gillies D B. Some theorems on n-person games. PhD Thesis. Princeton: Princeton University, 1953
30 Gopalakrishnan S, Granot D, Granot F. Consistent allocation of emission responsibility in fossil fuel supply chains. Manage Sci, 2021, 67: 7637–7668
31 Grabisch M. The core of games on ordered structures and graphs. Ann Oper Res, 2013, 204: 33–64
32 Granot D. A generalized linear production model: A unifying model. Math Program, 1986, 34: 212–222
33 Gutiérrez E, Llorca N, Sánchez-Soriano J, et al. Sustainable allocation of greenhouse gas emission permits for firms with Leontief technologies. European J Oper Res, 2018, 269: 5–15
34 Harari Y N. Sapiens: A Brief History of Humankind. New York: Random House, 2014
35 Hellman Z, Peretz R. Values for cooperative games over graphs and games with inadmissible coalitions. Games Econom Behav, 2018, 108: 22–36
36 Hezarkhani B, Slikker M, Van Woensel T. Gain-sharing in urban consolidation centers. European J Oper Res, 2019, 279: 380–392
37 Hoefer M. Strategic cooperation in cost sharing games. Internat J Game Theory, 2013, 42: 29–53
38 Houghtalen L, Ergun Ö, Sokol J. Designing mechanisms for the management of carrier alliances. Transp Sci, 2011, 45: 465–482
39 Jain K, Mahdian M. Cost sharing. In: Algorithmic Game Theory, vol. 15. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2007, 385–410
40 Kennedy D. 125. Science, 2005, 309: 19–19
41 Kern W, Paulusma D. Matching games: The least core and the nucleolus. Math Oper Res, 2003, 28: 294–308
42 Könemann J, Pashkovich K, Toth J. Computing the nucleolus of weighted cooperative matching games in polynomial

time. Math Program, 2020, 183: 555–581
43 Le P. Payoff allocation methods for several operational research games. PhD Thesis. Southampton: University of Southampton, 2017
44 Leng M, Luo C, Liang L. Multiplayer allocations in the presence of diminishing marginal contributions: Cooperative game analysis and applications in management science. Manage Sci, 2021, 67: 2891–2903
45 Li L, Shan E F. The Page-Shapley values for graph games. Syst Eng Theory Pract. 2019, 39: 2771–2783 [李理, 单而芳. 图上博弈的 Page-Shapley 值. 系统工程理论与实践, 2019, 39: 2771–2783]
46 Liu L, Qi X, Xu Z. Computing near-optimal stable cost allocations for cooperative games by Lagrangian relaxation. INFORMS J Computing, 2016, 28: 687–702
47 Liu L, Qi X, Xu Z. Simultaneous penalization and subsidization for stabilizing grand cooperation. Oper Res, 2018, 66: 1362–1375
48 Liu L, Qi X, Xu Z. Stabilizing grand cooperation via cost adjustment: An inverse optimization approach. INFORMS J Computing, 2024, 36: 635–656
49 Lozano S. Information sharing in DEA: A cooperative game theory approach. European J Oper Res, 2012, 222: 558–565
50 Lu W, Quadrifoglio L. Fair cost allocation for ridesharing services-modeling, mathematical programming and an algorithm to find the nucleolus. Trans Res Part B Methodol, 2019, 121: 41–55
51 Luo C, Zhou X, Lev B. Core, shapley value, nucleolus and nash bargaining solution: A Survey of recent developments and applications in operations management. Omega, 2022, 110: 102638
52 Maschler M, Peleg B, Shapley L S. Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts. Math Oper Res, 1979, 4: 303–338
53 Morelli M, Park I U. Internal hierarchy and stable coalition structures. Games Econom Behav, 2016, 96: 90–96
54 Meir R, Rosenschein J S, Malizia E. Subsidies, stability, and restricted cooperation in coalitional games. In: Proceedings of the Twenty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence. Menlo Park: AAAI Press, 2011, 14–26
55 Meir R, Zick Y, Elkind E, et al. Bounding the cost of stability in games over interaction networks. AAAI, 2013, 27: 690–696
56 Myerson R B. Graphs and cooperation in games. Math Oper Res, 1977, 2: 225–229
57 Nagarajan M, Sošić G. Game-theoretic analysis of cooperation among supply chain agents: Review and extensions. European J Oper Res, 2008, 187: 719–745
58 Owen G. On the core of linear production games. Math Program, 1975, 9: 358–370
59 Owen G. Values of games with *a priori* unions. In: Mathematical Economics and Game Theory. Berlin-Heidelberg: Springer, 1977, 76–88
60 Owen G. Values of graph-restricted games. SIAM J Algebraic Discrete Methods, 1986, 7: 210–220
61 Resnick E, Bachrach Y, Meir R, et al. The cost of stability in network flow games. In: International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science. Berlin-Heidelberg: Springer, 2009, 636–650
62 Ross D G. Using cooperative game theory to contribute to strategy research. Strategic Manage J, 2018, 39: 2859–2876
63 Saad W, Han Z, Debbah M, et al. Coalitional game theory for communication networks. IEEE Signal Process Mag, 2009, 26: 77–97
64 Schmeidler D. The nucleolus of a characteristic function game. SIAM J Appl Math, 1969, 17: 1163–1170
65 Schulz A S, Uhan N A. Sharing supermodular costs. Oper Res, 2010, 58: 1051–1056
66 Schulz A S, Uhan N A. Approximating the least core value and least core of cooperative games with supermodular costs. Discrete Optim, 2013, 10: 163–180
67 Shapley L S. Markets as Cooperative Games. Santa Monica: Rand Corporation, 1955
68 Shapley L S. On balanced sets and cores. Naval Res Logist, 1967, 14: 453–460
69 Shapley L S. Cores of convex games. Internat J Game Theory, 1971, 1: 11–26
70 Shapley L S, Kuhn H, Tucker A. Contributions to the theory of games. Ann Math Stud, 1953, 28: 307–317
71 Shapley L S, Shubik M. The Core of an Economy with Nonconvex Preferences. Santa Monica: Rand Corporation, 1963
72 Shapley L S, Shubik M. Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences. Econometrica, 1966, 34: 805–827
73 Shi X Q. Introduction to Cooperative Game Theory. Beijing: Peking Univ Press, 2012 [施锡铨. 合作博弈引论. 北京: 北京大学出版社, 2012]

74 Sošić G. Transshipment of inventories among retailers: Myopic vs. farsighted stability. Manage Sci, 2006, 52: 1493–1508

75 Sun H X, Zhang Q. Restricted Owen value in restricted games with coalition structure. Syst Eng Theory Pract, 2013, 33: 981–987 [孙红霞, 张强. 具有联盟结构的限制合作博弈的限制 Owen 值. 系统工程理论与实践, 2013, 33: 981–987]

76 Sziklai B, Fleiner T, Solymosi T. On the core and nucleolus of directed acyclic graph games. Math Program, 2017, 163: 243–271

77 Toriello A, Uhan N A. Technical note—On traveling salesman games with asymmetric costs. Oper Res, 2013, 61: 1429–1434

78 van den Brink R. An axiomatization of the disjunctive permission value for games with a permission structure. Internat J Game Theory, 1997, 26: 27–43

79 van den Brink R, Gilles R P. Axiomatizations of the conjunctive permission value for games with permission structures. Games Econom Behav, 1996, 12: 113–126

80 van den Brink R, He S, Huang J P. Polluted river problems and games with a permission structure. Games Econom Behav, 2018, 108: 182–205

81 van den Nouweland A, Borm P. On the convexity of communication games. Internat J Game Theory, 1991, 19: 421–430

82 von Neumann J. Zur theorie der gesellschaftsspiele. Math Ann, 1928, 100: 295–320

83 von Neumann J, Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton: Princeton Univ Press, 1944

84 van Zon M, Spliet R, van den Heuvel W. The joint network vehicle routing game. Transp Sci, 2021, 55: 179–195

85 Wang L M, Zhang Q, Chen G. A kind of games with coalition structures and restrictions within priori unions. Syst Eng Theory Pract, 2017, 37: 2171–2177 [王利明, 张强, 陈纲. 一类优先联盟内有限制的具有联盟结构的合作对策. 系统工程理论与实践, 2017, 37: 2171–2177]

86 Wang X J, Liu J. Stable coalition structures in cooperative game with externalities. Syst Eng Theory Pract, 2018, 38: 1173–1182 [王先甲, 刘佳. 具有外部性的合作博弈问题中的稳定的联盟结构. 系统工程理论与实践, 2018, 38: 1173–1182]

87 Wang Y, Li D F. Equilibrium analysis on climate change game. Syst Eng Theory Pract, 2021, 41: 3178–3198 [王荧, 李登峰. 气候变化博弈的均衡分析. 系统工程理论与实践, 2021, 41: 3178–3198]

88 Wen Y, Hu J, An Q, et al. Cooperative performance evaluation among homogeneous parallel decision making units with coalition structures. Comput Ind Eng, 2022, 168: 108103

89 Westerink-Duijzer L E, Schlicher L P J, Musegaas M. Core allocations for cooperation problems in vaccination. Prod Oper Manag, 2020, 29: 1720–1737

90 Xie S Y. Economic Game Theory. Shanghai: Fudan Univ Press, 2017 [谢识予. 经济博弈论. 上海: 复旦大学出版社, 2017]

91 Yang X G, Li S X, Cao Z G, et al. Game theory foundation of the digital economy. J Management Sci, 2022, 35: 50–54 [杨晓光, 李三希, 曹志刚, 等. 数字经济的博弈论基础. 管理科学, 2022, 35: 50–54]

92 Yu X H, Du Z P, Zhang Q, et al. Proportional Owen value for the coalition structure cooperative game under the incomplete information. Syst Eng Theory Pract, 2019, 39: 2105–2115 [于晓辉, 杜志平, 张强, 邹正兴. 信息不完全下联盟结构合作对策的比例 Owen 解. 系统工程理论与实践, 2019, 39: 2105–2115]

93 Yu Y G, Zheng S M, Huo B F, et al. Frontier topics of platform supply chain management theory and method. J Management Sci, 2021, 34: 60–66 [余玉刚, 郑圣明, 霍宝锋, 等. 平台供应链的管理理论与方法前沿课题. 管理科学, 2021, 34: 60–66]

94 Zhao J. Three little-known and yet still significant contributions of Lloyd Shapley. Games Econom Behav, 2018, 108: 592–599

95 Zheng J, Gao Z, Yang D, et al. Network design and capacity exchange for liner alliances with fixed and variable container demands. Transp Sci, 2015, 49: 886–899

Stable solutions of grand coalitions in unbalanced cooperative games

Lindong Liu, Zixiang Wu, Xucheng Liu & Xiaoguang Yang

Abstract With the rapid development of the digital economy, game theory, as one of its foundational theories, is encountering new opportunities for development. Due to its emphasis on collective rationality, cooperative game theory is widely applied to issues concerning cooperation. However, many cooperative games' cores are empty, namely, the so-called non-balanced games, which leads to instability in grand coalitions. Therefore, studying non-balanced games and finding their stable solutions is crucial for the development and application of cooperative game theory. In this paper, we first systematically review the research on stable solutions in grand coalitions both domestically and internationally, and categorize the research in this field into two perspectives: relaxation of external constraints and modification of internal structures. Furthermore, based on the types of relaxed constraints, we divide the research from the perspective of relaxation of external constraints into two categories: relaxation of budget balance constraints and relaxation of coalition stability constraints. Regarding the modified structural types, the research from the perspective of modification of internal structures is divided into two categories: considering authority structure restrictions and considering coefficient structure adjustments. Finally, we propose two research prospects from both theoretical and practical perspectives: finding new methods to construct stable solutions in grand coalitions and addressing real-world issues of unbalanced games with stronger applicability.

Keywords **cooperative game, core, unbalanced game, cost allocation, stable solution**

MSC(2020) **90C11, 90C27, 91A12, 91B32**

doi: 10.1360/SSM-2024-0152