

doi: 10.3969/j.issn.1002-0268.2023.12.010

# 体外预应力筋非线性有限元模型及其迭代算法

邓继华<sup>\*1,2</sup>, 杨倩<sup>1</sup>, 谭平<sup>3</sup>, 田仲初<sup>1</sup>

(1. 长沙理工大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410114;

2. 长沙理工大学 桥梁工程安全控制教育部重点实验室, 湖南 长沙 410114;

3. 广州大学 工程抗震研究中心, 广东 广州 510405)

**摘要:** 为了准确模拟体外预应力筋的非线性受力行为, 采用理论推导和程序研制开展了体外预应力筋非线性有限元模型及其算法的研究。首先, 基于体外预应力筋与转向块之间可自由滑动而导致体外预应力筋在全长范围内为常应变构件的受力特点, 建立了非线性体外预应力单元研究方法。其次, 以锚固块之间设置2个转向块的三段四节点平面体外筋为例, 基于变分法得到应变微分与平面梁单元节点位移矩阵微分的表达式, 再运用虚功原理推导出该类型体外预应力筋在结构坐标系下具体的非线性切线刚度矩阵。然后, 结合常规的平面线弹性梁单元, 提出了适用于结构分析的体外预应力梁非线性分析方法和计算程序。最后, 对2个简支体外预应力梁算例进行了数值分析, 其中算例1进行了本研究方法、Abaqus软件计算以及静载试验实测值的对比分析, 算例2进行了线性与非线性的对比分析。结果表明: 在算例1中, 2种方法得到的计算值均与实测值吻合良好, 相对而言, 前一种方法建立有限元模型更简单, 且更能准确体现体外预应力筋的受力特点; 在算例2中, 体外预应力梁的受力行为很容易表现出非线性特征, 且非线性对体外筋轴力比对节点位移的影响较大, 体外预应力结构受力分析时考虑非线性是很有必要的。

**关键词:** 桥梁工程; 非线性有限元模型; 迭代算法; 体外预应力筋; 多段多节点

中图分类号: TU378.2

文献标识码: A

文章编号: 1002-0268 (2023) 12-0082-07

## Nonlinear FEM and Iterative Algorithm on External Prestressed Tendon

DENG Ji-hua<sup>\*1,2</sup>, YANG Qian<sup>1</sup>, TAN Ping<sup>3</sup>, TIAN Zhong-chu<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan 410076, China;

2. Key Laboratory of Ministry of Education for Bridge Engineering Safety Control, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan 410114, China;

3. Earthquake Engineering Research and Test Center, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong 510405, China)

**Abstract:** In order to simulate the nonlinear behavior of external prestressed tendons accurately, the nonlinear FEM and its algorithm of external prestressed tendons are studied by theoretical deduction and program development. Firstly, the nonlinear external prestressing element research method is established based on the characteristic that the external prestressing tendon is a constant strain member in the whole length due to the free sliding between the external prestressing tendon and the steering block. Secondly, the expression of strain differential and displacement matrix differential of plane beam element is obtained based on the variational method, and the concrete nonlinear tangential stiffness matrix of this type of external prestressed reinforcement is derived by using the principle of virtual work in the structural coordinate system. Then, a nonlinear analysis method and calculation program for external prestressed beams are proposed based on the conventional planar linear elastic beam elements. Finally, 2 examples of simply supported external prestressed beams are numerically analyzed. Example 1 is compared with the proposed method, ABAQUS

收稿日期: 2021-12-17

基金项目: 国家自然科学基金项目 (52278142); 湖南省自然科学基金项目 (2023JJ30019); 湖南省教育厅项目 (21A0187); 桥梁结构健康与安全国家重点实验室开放基金项目 (BHSKL21-06-GF)

作者简介 (\* 通讯作者): 邓继华 (1975-), 男, 湖南冷水江人, 博士, 副教授. (jihudeng@csust.edu.cn)

software and static load test, and example 2 is compared with linear and nonlinear. The result shows that (1) in example 1, the calculated values obtained with the 2 methods are in good agreement with the measured values, and comparatively speaking, the FEM established with the former method is simpler and can reflect the stress characteristics of external prestressed tendons more accurately; (2) in example 2, the stress behavior of the external prestressed beam is easy to show nonlinear characteristics, and the nonlinear has a greater impact on the axial force ratio of the external reinforcement to the displacement of the joint, so it is necessary to consider nonlinear characteristics in the stress analysis of the external prestressed structure.

**Key words:** bridge engineering; nonlinear FEM; iterative algorithm; external prestressed tendon; multiple segments and nodes

## 0 引言

体外预应力筋由于具有预应力筋套管布置简单, 调整容易及可更换的优势, 在旧桥加固以及新建桥梁中均得到较广泛地运用<sup>[1-3]</sup>, 而体外预应力对结构性能的加固或提升的效果可通过静载试验来判定<sup>[4-6]</sup>。在静载试验中, 按等效于设计荷载对结构加载得到实测值, 再与对应的桥梁模型计算值进行比较进而作出评价, 在体外预应力梁中, 体外预应力筋在加载时产生的应力增量是体外预应力结构在正常使用状态下的应力和挠度, 以及极限状态下抗弯承载力验算的基础<sup>[7-8]</sup>, 因此, 准确计算出体外预应力筋的应力增量甚为关键。不同于体内有黏结预应力筋与周围混凝土处黏结, 体外预应力筋只在锚固块和转向块处与梁体有接触, 其变形和应变需基于结构的整体变形来计算, 截面内预应力筋和周围混凝土的应变协调关系不再适用<sup>[9]</sup>。因此, 从本质而言, 体外预应力筋的受力均处于非线性分析范畴, 建立一个准确的体外预应力筋计算模型势在必行。目前对体外预应力筋的模拟主要采用简化模型和精细有限元分析两种方法: 前者主要有常规带刚臂杆单元模型<sup>[10-11]</sup>、多段多节点杆单元模型<sup>[2,12]</sup>和等效节点荷载模型<sup>[13]</sup> (不计体外预应力筋刚度), 文献<sup>[14]</sup>对这些简化模型进行了比较研究, 应该讲这些模型都是属于线性分析模型; 后者则采用大型商业程序如 ANSYS、Abaqus 等建立体外预应力结构的精细有限元模型来进行分析, 如使用 ANSYS 程序中能同时受拉和受压的 LINK8 空间杆单元或只能承受单向拉伸或压缩的 Link10 空间杆单元来模拟锚固块与转向块或 2 个转向块之间的体外筋节段, 对于转向块处体外筋与梁体单元, 或是将两者共节点以实现共同受力<sup>[15-17]</sup>, 或是设置较复杂的三维接触对来考虑转向块与体外索的摩擦接触<sup>[1]</sup>; 对于 Abaqus 程序, 一般将体外预应力筋视为桁架单元, 混凝土梁

单元和桁架单元的端部节点用 Abaqus 的内在约束 MPC 连接, 在体外预应力梁的转向块处设置抗压刚度足够大但抗弯刚度很小的弹簧单元以考虑偏转效应<sup>[18-20]</sup>, 基于 OPENSEES 软件对体外预应力筋在转向块处的处理也基本相同<sup>[21]</sup>。除此之外, 部分研究者采用体外筋在转向块处能自由滑移 (基本得到试验证实) 的假定, 将体外筋视为常应变杆元, 基于非线性连续介质力学建立较为复杂的非线性体外筋单元<sup>[22-23]</sup>。应该讲, 目前上述 3 种主要计算方法并不完全适用于静载试验中的体外预应力筋梁的计算分析。静载试验中, 尽管体外预应力筋梁发生小变形, 但由于体外预应力筋受力的特殊性, 混凝土梁本身处于几何与材料均为线性的状态, 并不意味着对体外预应力筋进行线性分析就能满足精度要求, 算例 2 的对比分析表明采用上述的线性简化模型分析会带来较大的误差。对体外预应力筋梁采用 ANSYS, Abaqus 等具有较强的非线性分析功能的大型商业程序建立较复杂的有限元模型进行计算分析, 计算精度能满足要求, 但也存在至少两个缺点: 一是对从事静载试验的检测分析人员提出了较高的有限元理论和程序操作水平要求; 二是检测单位除购买常规的线弹性商业程序以应对常规桥梁的计算分析以外, 还需额外支付几十甚至上百万来购买非线性分析商业程序, 经济上有较大的压力; 并且, 当前的国际环境对自主研制工业程序提出了迫切要求, 某些著名大学被无端禁用 MATLAB 程序就是典型例子。基于非线性连续介质力学建立的复杂非线性体外筋单元更是难以为工程技术人员理解, 接受和应用。

基于此, 本研究在学习研究上述文献的基础上, 根据体外预应力梁中体外预应力筋与转向块之间可自由滑动而导致体外预应力筋在通长范围内为常应变构件的受力特点, 以锚固块之间设置两个转向块的三段四节点平面体外预应力筋梁为例, 采用变分以及虚功原理, 推导出体外预应力筋在结构坐标系

下的非线性切线刚度矩阵,结合常规的平面线弹性梁单元,提出了可用于静载试验的体外预应力梁非线性分析方法和计算程序,对两个简支体外预应力梁进行了分析比较。

## 1 体外预应力梁有限元模型

### 1.1 体外预应力梁

如图1所示体外预应力梁,其中: $i, \dots, n$ 为平面梁单元节点, $i', k', l', n'$ 分别处于 $i, k, l, n$ 的正下方,为锚固块和转向块处位置点(在后续公式表述中,当该位置点位于梁上时,加下标b,位于体外预应力筋上时,加下标p),当转向块数量不为两个时,可类似进行推导。

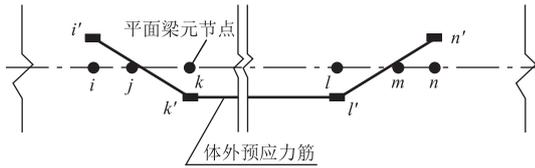


图1 体外预应力梁

Fig. 1 External prestressed beam

### 1.2 平面梁单元线性模型

考虑到静载试验一般都是模拟梁处于正常使用状态,此时材料完全处于弹性状态,且发生的是小变形,固无需考虑几何与材料非线性,可取线弹性平面梁单元来模拟梁结构,对于任一节点,如 $k$ ,其结构坐标系下的位移矩阵为 $\mathbf{u}_k = [u^k \ v^k \ \theta^k]^T$ 。对处于梁上的位置点 $i', k', l', n'$ ,可将其与对应梁节点 $i, k, l, n$ 之间的联系视为刚臂,根据刚臂受力后的运动和变形特点<sup>[24]</sup>,再结合静载试验中混凝土梁发生小变形的假定,可得到由对应梁节点位移表示的该位置点处的线位移,如对于 $k'$ 的位移,如图2所示。

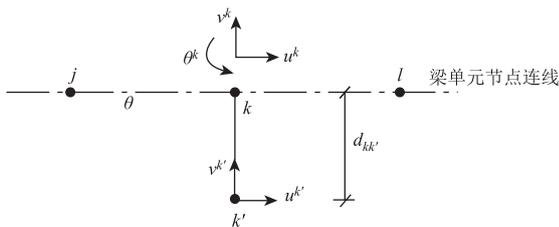


图2 位移关系图

Fig. 2 Schematic diagram of displacement

据此可得到 $k'$ 的位移,有:

$$\begin{bmatrix} u^{k_b} \\ v^{k_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{kk'} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^k \\ v^k \\ \theta^k \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中 $d_{kk'}$ 为 $k$ 与 $k'$ 之间的距离。

### 1.3 体外预应力筋非线性单元模型

与其他文献[22-23]相同,在忽略摩擦的情况下,本研究也认为体外筋在转向块处能自由滑移,因此可视体外筋在其通长范围内为常应变状态;同时,为便于推导,对于体外筋的各节点与混凝土梁相同位置处的位移关系,认为有:

$$\begin{cases} u^{i_p} = u^{i_b} & u^{k_p} = u^{k_b} & u^{l_p} = u^{l_b} & u^{n_p} = u^{n_b} \\ v^{i_p} = v^{i_b} & v^{k_p} = v^{k_b} & v^{l_p} = v^{l_b} & v^{n_p} = v^{n_b} \end{cases} \quad (2)$$

设体外筋各节点在初始时刻的坐标分别为 $(x_{i'}^0, y_{i'}^0)$ ,  $(x_{k'}^0, y_{k'}^0)$ ,  $(x_{l'}^0, y_{l'}^0)$ ,  $(x_{n'}^0, y_{n'}^0)$ ,受荷变形后各节点坐标为 $(x_{i'}, y_{i'})$ ,  $(x_{k'}, y_{k'})$ ,  $(x_{l'}, y_{l'})$ ,  $(x_{n'}, y_{n'})$ ,显然有:

$$\begin{cases} x_{i'} = x_{i'}^0 + u^{i_p} & y_{i'} = y_{i'}^0 + v^{i_p} \\ x_{k'} = x_{k'}^0 + u^{k_p} & y_{k'} = y_{k'}^0 + v^{k_p} \\ x_{l'} = x_{l'}^0 + u^{l_p} & y_{l'} = y_{l'}^0 + v^{l_p} \\ x_{n'} = x_{n'}^0 + u^{n_p} & y_{n'} = y_{n'}^0 + v^{n_p} \end{cases} \quad (3)$$

至此,可分别得到体外筋各段在初始时刻和受荷变形后的长度 $L_{i'k'}^0$ ,  $L_{k'l'}^0$ ,  $L_{l'n'}^0$ 和 $L_{i'k'}^t$ ,  $L_{k'l'}^t$ ,  $L_{l'n'}^t$ ,分别有:

$$\begin{cases} L_{i'k'}^0 = \sqrt{(x_{k'}^0 - x_{i'}^0)^2 + (y_{k'}^0 - y_{i'}^0)^2} \\ L_{k'l'}^0 = \sqrt{(x_{l'}^0 - x_{k'}^0)^2 + (y_{l'}^0 - y_{k'}^0)^2} \\ L_{l'n'}^0 = \sqrt{(x_{n'}^0 - x_{l'}^0)^2 + (y_{n'}^0 - y_{l'}^0)^2} \end{cases} \quad (4)$$

和

$$\begin{cases} L_{i'k'}^t = \sqrt{(x_{k'} - x_{i'})^2 + (y_{k'} - y_{i'})^2} \\ L_{k'l'}^t = \sqrt{(x_{l'} - x_{k'})^2 + (y_{l'} - y_{k'})^2} \\ L_{l'n'}^t = \sqrt{(x_{n'} - x_{l'})^2 + (y_{n'} - y_{l'})^2} \end{cases} \quad (5)$$

由此能得到体外筋各段的长度变化量 $\Delta L_{i'k'}$ ,  $\Delta L_{k'l'}$ ,  $\Delta L_{l'n'}$ 为:

$$\begin{cases} \Delta L_{i'k'} = L_{i'k'}^t - L_{i'k'}^0 \\ \Delta L_{k'l'} = L_{k'l'}^t - L_{k'l'}^0 \\ \Delta L_{l'n'} = L_{l'n'}^t - L_{l'n'}^0 \end{cases} \quad (6)$$

如前所述,体外预应力筋可视作在其全长范围内为常应变的构件,则其应变 $\varepsilon$ 为:

$$\varepsilon = \frac{(\Delta L_{i'k'} + \Delta L_{k'l'} + \Delta L_{l'n'})}{L_{i'k'l'n'}^0}, \quad (7)$$

式中, $L_{i'k'l'n'}^0 = L_{i'k'}^0 + L_{k'l'}^0 + L_{l'n'}^0$ 为体外预应力筋的初始总长度。

微分式(6)中的 $\Delta L_{i'k'}$ ,得到 $\delta \Delta L_{i'k'}$ 用节点 $i, k$

的位移矩阵的微分  $\delta \mathbf{u}_{ik} = [\delta u^i \ \delta v^i \ \delta \theta^i \ \delta u^k \ \delta v^k \ \delta \theta^k]^T$  表示为:

$$\delta \Delta L_{i'k'} = \frac{1}{L_{i'k'}} [(x_{i'} - x_{k'}) (y_{i'} - y_{k'}) (x_{i'} - x_{k'}) d_{i'} \\ (x_{k'} - x_{i'}) (y_{k'} - y_{i'}) (x_{k'} - x_{i'}) d_{k'}] \delta \mathbf{u}_{ik} \quad (8)$$

同理不难得到  $\delta \Delta L_{k'l'}$ ,  $\delta \Delta L_{l'n'}$  分别用  $\delta \mathbf{u}_{kl}$  与  $\delta \mathbf{u}_{ln}$  表示的计算式。

微分式 (7) 并联立  $\delta \Delta L_{i'k'}$ ,  $\delta \Delta L_{k'l'}$  和  $\delta \Delta L_{l'n'}$  的计算式, 可得到应变  $\varepsilon$  的微分  $\delta \varepsilon$  用平面梁单元节点  $i, k, l, n$  的位移矩阵微分  $\delta \mathbf{u}_{ikln} = [\delta u^i \ \delta v^i \ \delta \theta^i \ \delta u^k \ \delta v^k \ \delta \theta^k \ \delta u^l \ \delta v^l \ \delta \theta^l \ \delta u^n \ \delta v^n \ \delta \theta^n]^T$  表示为:

$$\delta \varepsilon = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_{ikln} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{B}$  为应变矩阵, 利用前面得到的  $\delta \Delta L_{i'k'}$ ,  $\delta \Delta L_{k'l'}$  与  $\delta \Delta L_{l'n'}$  很容易得到  $\mathbf{B}$  中各元素的具体值, 可看出其与梁单元节点位移有关, 因而是非线性的。

利用虚功原理, 可得到体外预应力筋在结构坐标系下的刚度矩阵  $\mathbf{K}_{i'k'l'n'}$  为:

$$\mathbf{K}_{i'k'l'n'} = \mathbf{EAB}^T \mathbf{B} / L_{i'k'l'n'}^0 \quad (10)$$

式中,  $E, A$  分别为体外预应力筋的弹性模量和截面面积。

不难看出, 上述布置两个转向块的体外预应力筋在结构坐标系下的刚度矩阵  $\mathbf{K}_{i'k'l'n'}$  为含 12 行与 12 列元素的矩阵, 当体外预应力筋的转向块数量变化时, 其单元切线刚度矩阵所含的行 (列) 数也将变化。

## 2 非线性分析流程

(1) 输入结构的几何、材料、边界以及荷载等参数, 特别是要明确体外筋在锚固块、转向块处与平面梁对应的位置。

(2) 对混凝土梁进行网格划分, 根据各单元的节点坐标、几何和材料特性形成结构坐标系下的单元刚度矩阵, 叠加形成梁在结构坐标系下的总体刚度矩阵  $\mathbf{K}_{\text{beam}}$  并保存。

(3) 根据静载试验中上桥加载的车辆荷载形成荷载矩阵  $\mathbf{P}$  并保存。

(4) 按式 (10) 计算出本次迭代体外预应力筋在结构坐标系下的刚度矩阵  $\mathbf{K}_{i'k'l'n'}$  (第 1 次迭代计算时  $\mathbf{u}_{ikln}$  取 0), 再按照“对号入座”的原则与  $\mathbf{K}_{\text{beam}}$  叠加, 形成体外预应力梁在结构坐标系下的总体刚度矩阵  $\mathbf{K}$ 。

(5) 对  $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{P}$  进行边界条件处理后解方程, 得

到第  $i$  次迭代梁的节点位移  $\mathbf{u}^i$ , 再由  $\mathbf{u}^i$  得到  $\mathbf{u}_{ikln}$ 。

(6) 收敛条件判断, 如不收敛, 则返回第 4 步进行下一次迭代; 如收敛, 则输出计算结果。

## 3 算例分析

算例 1 该算例取自文献 [6]。如图 3 所示, 该桥为配有 CFRP 束体外预应力的 20 m 简支梁桥, 设计荷载等级为公路-II 级, 文献 [25] 对该桥进行了横桥向对称和偏心加载的荷载试验研究, 本研究用该桥在横桥向对称加载下的试验实测值来验证比较, 该种加载共有锚固横梁上截面加载 (上 1 辆车, 上 2 辆车) 和跨中截面加载 (上 2 辆车, 退 1 辆车, 退 2 辆车) 5 个工况, 分别命名为工况 1-1, 1-2, 2-1, 2-2 和 2-3。该桥的其他几何, 材料参数具体值以及加载详见文献 [6, 25]。

采用本研究方法及 Abaqus 程序分别进行了计算, 用本研究方法进行分析时, 将梁划分成 5 个平面梁单元, 8 根体外束根据立面上位置不同划分成两个体外束单元。用 Abaqus 计算时, 对混凝土梁体采用八结点一阶减缩积分六面体实体单元 C3D8R, 共划分为 10 400 个单元, 打开几何非线性开关但不考虑材料非线性, CFRP 体外预应力筋采用常规两结点三维桁架单元 T3D2。实体单元和桁架单元的端部节点使用 Abaqus 内在约束 MPC 连接, 该约束使实体单元和桁架单元的端部节点具有相同的位移和曲率, 由此模拟端部锚具处体外预应力筋和混凝土之间变形协调; 转向块的作用由刚度很大的弹簧单元 (Springa) 模拟, 保证在转向块处体外预应力筋的偏心距为常量。

上述 5 个工况下左侧体外筋轴力的比较如图 4 所示, 可看出用本研究方法和 Abaqus 程序得到的计算值很接近, 两者与实测值略微有差距, 但完全符合工程精度要求。还应指出的是, 每 1 根体外筋轴力的 Abaqus 程序计算值实际上为 3 个桁架单元 T3D2 的平均值, 由图 5 看出, 每 1 根体外筋划分为 3 个桁架单元 T3D2 后计算得到的轴力值是略有差异的 (图 5 显示的是应力), 所以严格从理论意义上而言, Abaqus 程序只是近似模拟体外筋而并不是建立了完全意义上的体外筋单元。

算例 2 该算例取自文献 [12]。图 6 所示体外预应力简支梁桥, 混凝土弹性模量  $E_c = 30 \text{ GPa}$ , 混凝土梁截面面积  $A_c = 0.5 \text{ m}^2$ ,  $I_c = 1/24 \text{ m}^4$ , 体外预应力筋弹性模量  $E_s = 200 \text{ GPa}$ , 截面面积  $A_s = 0.0308 \text{ m}^2$ , 荷载  $P = 30 \text{ kN}$  对称作用于节点 2, 3 处 (为增大非

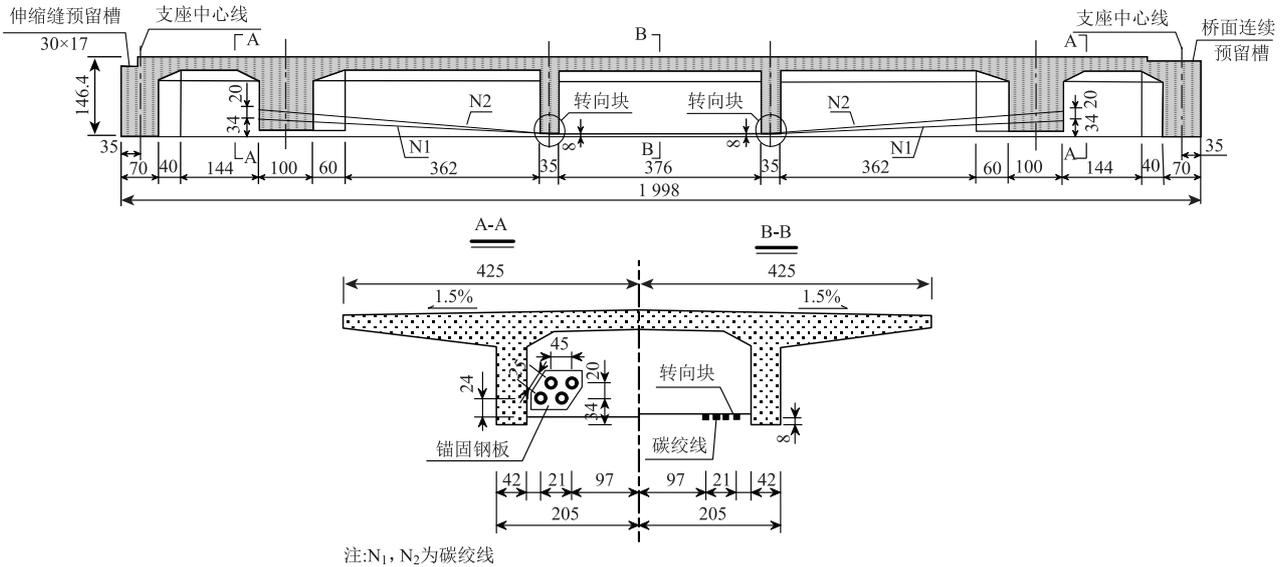


图3 CFRP束体外预应力简支梁 (单位: cm)

Fig. 3 External prestressed simply-supported beams with CFRP (unit: cm)

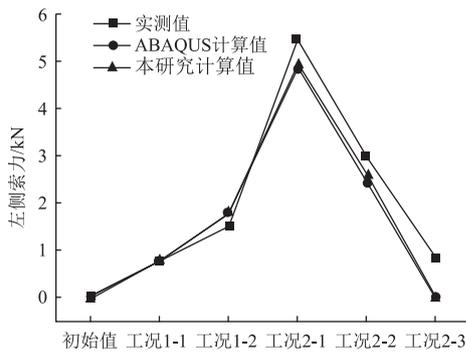


图4 各工况下左侧体外筋轴力

Fig. 4 Axial force of external tendon on left side under various working conditions

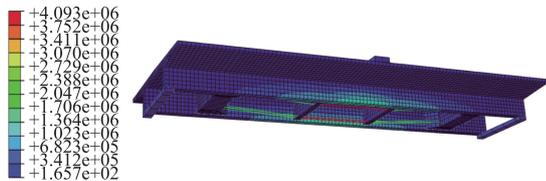


图5 Abaqus体外筋应力图 (单位: Pa)

Fig. 5 Abaqus external tendon stress (unit: Pa)

线性影响, 最终将荷载加大到40倍, 即荷载  $P$  达到了1 200 kN)。

本研究取此算例用于比较文献 [12] 推导的线性体外筋单元与本研究推导的非线性体外筋单元在位移及体外筋轴力计算结果上的差别, 还应说明的是, 该算例仅为验证本研究算法及增大几何非线性程度, 部分参数的取值并不完全符合工程实际。各级荷载下位移和体外筋轴力计算结果列于表1。

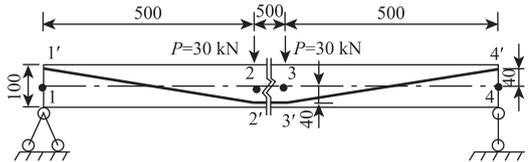


图6 集中力作用的体外预应力梁 (单位: cm)

Fig. 6 External prestressed beam under concentrated force (unit: cm)

表1 位移和体外筋轴力计算结果

Tab. 1 Calculation results for displacement and external tendon axial force

荷载值/ kN	2号节点竖向位移/mm			体外筋轴力/kN		
	线性	非线性	相对差/ %	线性	非线性	相对差/ %
	单元	单元	单元	单元	单元	单元
30	2.122	2.118	0.16	71.129	71.298	0.24
300	21.218	20.799	2.02	711.29	741.37	4.06
600	42.437	40.759	4.12	1 422.6	1 539.5	7.59
900	63.655	59.912	6.25	2 133.9	2 385.3	10.54
1 200	84.874	78.297	8.40	2 845.1	3 270.8	13.02

从表1可看出, 随着荷载值增大, 无论是节点位移还是体外筋轴力, 两种单元类型得到的计算结果相差值均增大, 且同样荷载水平下体外筋轴力差距大于节点位移差距。

#### 4 结论

(1) 本研究紧扣体外预应力筋在全长范围内为常应变构件的受力特点, 采用变分以及虚功原理, 推导出的非线性有限元模型能完全模拟体外预应力

筋的受力特性。

(2) 对配有 CFRP 束体外预应力的 20 m 简支梁桥计算表明, 本研究方法与 Abaqus 程序得到的体外筋索力计算值与实测值吻合较好, 完全符合工程精度要求, 两个计算值之间的差距基本可忽略不计, 可说明本研究推导的体外预应力筋非线性单元用于静载试验精度是完全有保证的。

(3) 基于体外预应力筋线性和非线性单元的计算比较表明, 两种方法得到的计算结果有一定的差距, 随着荷载值增大该差距也增大, 且体外筋轴力差距在同样荷载水平下大于节点位移差距, 说明体外预应力梁计算中很有必要采用非线性体外筋单元。

#### 参考文献:

#### References:

- [1] 高荣雄, 吴国俱, 乐颖, 等. 体外预应力加固 RC 梁受力性能试验 [J]. 中国公路学报, 2017, 30 (10): 69-80, 136.  
GAO Rong-xiong, WU Guo-ju, YUE Ying, et al. Experiment on Mechanical Property of RC Beams Strengthened by External Prestressing [J]. China Journal of Highway and Transport, 2017, 30 (10): 69-80, 136.
- [2] 邓继华, 许斌林, 黄学文, 等. 大跨径体内外混合配束连续刚构桥有限元分析 [J]. 长沙理工大学学报 (自然科学版), 2019, 2016 (1): 51-57.  
DENG Ji-hua, XU Bin-lin, HUANG Xue-wen, et al. Finite Element Analysis for Long-span Concrete Continuous Rigid Frame Bridge with Mixed Arrangement of Internal and External Tendons [J]. Journal of Changsha University of Science and Technology (Natural Science), 2019, 2016 (1): 51-57.
- [3] 张宝静, 尚守平. 变黏结预应力 CFRP 板加固受弯构件试验研究 [J]. 公路交通科技, 2018, 35 (11): 61-68.  
ZHANG Bao-jing, SHANG Shou-ping. Experimental Study on Flexural Member Strengthened with Variable Bonded Prestressed CFRP Plates [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2018, 35 (11): 61-68.
- [4] 袁博, 张小强, 张春雨, 等. 基于静载试验的 T 梁桥体外预应力加固效果评价 [J]. 长江工程职业技术学院学报, 2021, 38 (3): 4-9.  
YUAN Bo, ZHANG Xiao-qiang, ZHANG Chun-yu, et al. Effect Evaluation of External Prestressing Reinforcement of T-beam Bridge Based on Static Load Test [J]. Journal of Changjiang Institute of Technology, 2021, 38 (3): 4-9.
- [5] 郭蓉, 彭志会, 郭娇, 等. 有黏结预应力 CFRP 板加固 RC 梁抗弯疲劳试验与理论分析 [J]. 公路交通科技, 2018, 35 (7): 50-57, 85.  
GUO Rong, PENG Zhi-hui, GUO Jiao, et al. Experimental and Theoretical Analysis on Bending Fatigue Performance of RC Beam Reinforced with Bonded Prestressed CFRP Plate [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2018, 35 (7): 50-57, 85.
- [6] 杨炯, 丁汉山, 张纪波, 等. CFRP 体外预应力桥梁的荷载试验研究 [J]. 特种结构, 2009, 26 (4): 88-92.  
YANG Jiong, DING Han-shan, ZHANG Ji-bo, et al. Load Test Study of CFRP External Prestressed Bridge [J]. Special structures, 2009, 26 (4): 88-92.
- [7] 贺志启, 刘钊, 王景全. 基于挠度的体外预应力梁应力增量统一算法 [J]. 土木工程学报, 2008, 41 (9): 90-96.  
HE Zhi-qi, LIU Zhao, WANG Jing-quan. A Unified Algorithm for Calculating Stress Increment of External Tendons Based on Deflection [J]. China Civil Engineering Journal, 2008, 41 (9): 90-96.
- [8] 李立峰, 李铁盔. 体外预应力筋极限应力增量的理论与试验研究 [J]. 建筑科学与工程学报, 2015, 32 (1): 27-34.  
LI Li-feng, LI Tie-kui. Theoretical Analysis and Experiment Study on Ultimate Stress Increment of Externally Prestressed Tendons [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2015, 32 (1): 27-34.
- [9] LOU T J, XIANG Y Q. Numerical Analysis of Second-order Effects of Externally Prestressed Concrete Beams [J]. Structural Engineering & Mechanics, 2010, 35 (5): 388-398.
- [10] EL-ARISS B. Stiffness of Reinforced Concrete Beams with External Tendons [J]. Engineering Structures, 2004, 26 (14): 2047-2051.
- [11] 黄海东, 向中富, 牛洪, 等. 连续刚构桥体外索加固约束效应分析 [J]. 重庆交通大学学报 (自然科学版), 2008, 27 (4): 520-524.  
HUANG Hai-dong, XIANG Zhong-fu, NIU Hong, et al. Analysis of the Restraint in Continuous Rigid Frame Bridge Retrofitted by External Posttensioning [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University of Science and Technology (Natural Science), 2008, 27 (4): 520-524.
- [12] 李传习, 夏桂云, 贺玲凤, 等. 体外预应力混凝土梁有限元分析 [J]. 华南理工大学学报 (自然科学版), 2003, 31 (增 1): 104-106.

- LI Chuan-xi, XIA Gui-yun, HE Ling-feng, et al. Finite Element Analysis of Externally Prestressed Concrete Bridge [J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2003, 31 (S1): 104-106.
- [13] LOU T J, XIANG Y Q. Finite Element Modeling of Concrete Beams Prestressed with External Tendons [J]. Engineering Structures, 2006, 28 (14): 1919-1926.
- [14] 邓继华, 涂文强, 黄学文, 等. 体外预应力筋不同有限元模型比较分析 [J]. 交通科学与工程, 2018, 34 (4): 22-26.
- DENG Ji-hua, TU Wen-qiang, HUANG Xue-wen, et al. Comparing and Analysis on External Prestressing Tendon to Different Finite Element Modals [J]. Journal of Transport Science and Engineering, 2018, 34 (4): 22-26.
- [15] 钟春玲, 梁东, 张云龙, 等. 体外预应力钢-混凝土组合简支梁自振频率计算 [J]. 吉林大学学报 (工学版), 2020, 212 (6): 224-231.
- ZHONG Chun-ling, LIANG Dong, ZHANG Yun-long, et al. Calculation of Natural Vibration Frequency of External Prestressed Steel-concrete Composite Simply Supported Beam [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2020, 212 (6): 224-231.
- [16] 周长东, 刘斌. 快速复合方法加固铁路桥梁的力学性能研究 [J]. 铁道工程学报, 2015, 32 (5): 42-48.
- ZHOU Chang-dong, LIU Bin. Research on the Mechanical Properties of Railway Bridge Strengthened with Quick-composite Reinforcement Methods [J]. Journal of Railway Engineering Society, 2015, 32 (5): 42-48.
- [17] REN Y, WANG Y, WANG B, et al. Flexural Behavior of Steel Deep Beams Prestressed with Externally Unbonded Straight Multi-tendons [J]. Thin-walled Structures, 2018, 131 (10): 519-530.
- [18] 阎西康, 温家鹏, 杜闯, 等. 预应力活性粉末混凝土道面板的抗弯性能 [J]. 公路交通科技, 2022, 39 (2): 20-29, 48.
- YAN Xi-kang, WEN Jia-peng, DU Chuang, et al. Flexural Performance of Prestressed Reactive Powder Concrete Pavement Slabs [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2022, 39 (2): 20-29, 48.
- [19] KIM M Y, NABZAD N, HAYAT U. Effects of Unbonded Deviators on the Out-of-plane Buckling of Steel H-beams Pre-stressed by a Straight Tendon Cable [J]. Engineering Structures, 2020, 214: 1-11.
- [20] 楼铁炯. 无粘结预应力梁的有限元建模与性能分析研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2005: 35-41.
- LOU Tie-jiong. Finite Element Modeling and Analytical Study on the Behavior of Beams Prestressed with Unbonded Tendon [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2005: 35-41.
- [21] 张峰, 陆小蕊, 叶见曙, 等. 波形钢腹板组合梁体外预应力极限应力模型试验及建议公式 [J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2018, 48 (5): 834-842.
- ZHANG Feng, LU Xiao-rui, YE Jian-shu, et al. Test and Formula for Ultimate Stress of Externally Prestressed Tendons in Corrugated Steel Web Composite Beam [J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2018, 48 (5): 834-842.
- [22] MOREIRA L S, SOUSA J B M, EVANDRO P. Nonlinear Finite Element Simulation of Unbonded Prestressed Concrete Beams [J]. Engineering Structures, 2018, 170: 167-177.
- [23] DALL'ASTA A, RAGNI L, ZONA A. Analytical Model for Geometric and Material Nonlinear Analysis of Externally Prestressed Beams [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133 (1): 117-121.
- [24] 邓继华, 邵旭东. 基于共旋坐标法的带刚臂平面梁元非线性分析 [J]. 工程力学, 2012, 29 (11): 143-151.
- DENG Ji-hua, SHAO Xu-dong. Co-rotational Formulation for Nonlinear Analysis of Plane Beam Element with Rigid Arms [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29 (11): 143-151.
- [25] 罗伟. CFRP 体外预应力简支梁桥实桥试验研究 [D]. 南京: 东南大学, 2008.
- LUO Wei. Experimental Study on the He-wei Simply-supported Externally Prestressed Bridge with CFCC Tendons [D]. Nanjing: Southeast University, 2008.