一类随机延迟微分方程截断型 theta-EM 算法的收敛性

献给严士健教授 90 华诞

谭利^{1,2}, 袁成桂^{3*}

1. 江西财经大学统计学院, 南昌 330013;

2. 江西财经大学应用统计研究中心, 南昌 330013;

3. Department of Mathematics, Swansea University, Swansea SA1 8EN, UK

E-mail: tltanli@126.com, C.Yuan@swansea.ac.uk

收稿日期: 2018-10-10; 接受日期: 2018-11-08; 网络出版日期: 2019-08-05; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11561027 和 11661039) 和江西省科技厅自然科学基金 (批准号: 20181BAB201005 和 2018ACB21001) 资助项目

摘要 本文主要考察随机延迟微分方程截断型 theta-EM (Euler-Maruyama) 算法的强收敛性问题. 将截断型 EM 算法推广到一般形式, 提出截断型 theta-EM 算法, 并讨论随机延迟微分方程在非全局 Lipschitz 条件下的强收敛率, 得到其强收敛阶数.

关键词 随机延迟微分方程 截断型 theta-EM 算法 局部 Lipschitz 条件 强收敛率

MSC (2010) 主题分类 65C30, 65L20

1 引言

对于难以获得精确解的微分方程, 数值方法是研究其收敛性的有力工具. 其中一大经典算法就是 Euler-Maruyama (EM) 算法, 最初由 Maruyama^[1] 于 1955 年把常微分方程的 Euler 方法推广到随机微分方程. 在此之后, EM 算法发展迅速, 取得了很大进展. 例如, Kloeden 和 Platen^[2] 考察了全局 Lipschitz 条件下随机微分方程 EM 算法的收敛性问题; Higham 等^[3] 对局部 Lipschitz 条件下非线性随机微分方程的 EM 算法强收敛性进行了研究; Bao 和 Yuan^[4] 给出了延迟项超线性的随机延迟微分方程 EM 算法的强收敛率; Menoukeu Pamen 和 Taguchi^[5] 对漂移系数 Hölder 连续的随机微分方程 EM 算法的强收敛性进行了分析; 其他的还有关于指数平均稳定性^[6] 和几乎处处稳定性^[7] 的分析等等.

EM 算法作为一个显式算法, 计算简单, 但是精度较低. 为了保证微分方程的收敛性、稳定性, 或者提高收敛率, 部分学者改进 EM 算法, 提出了优化的 EM 算法和隐式算法. 由于局部 Lipschitz 条件

英文引用格式: Tan L, Yuan C G. Convergence rates of truncated theta-EM scheme for SDDEs (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 137–154, doi: 10.1360/N012018-00246

下 EM 算法在有限时间内的绝对矩可能发散到无穷^[8], Hutzenthaler 等^[9] 提出了改进的 EM 算法, 将漂移项进行处理以保证数值解的矩的有限性. Mao 在文献 [10] 中基于经典的截断方法, 提出了截断型 EM 算法, 并在文献 [11] 中给出了截断型 EM 算法的强收敛阶数. Lan 和 Xia^[12] 在此基础上提出了改进的截断型 EM 算法, 其他的关于截断型 EM 算法的收敛性和稳定性研究可参见文献 [13–18]. 除了显式算法, 包括向后 Euler 方法^[19]、分步向后 Euler 方法^[20] 和 theta-EM 方法^[21] 等在内的隐式算法也发展迅速. 对于 theta-EM 方法, 当 $\theta = 0$ 时即为 EM 算法, 当 $\theta = 1$ 时, 退化为向后 Euler 方法. 由于 theta-EM 方法的隐式性及参数 θ 的存在, 要得到局部 Lipschitz 条件下的强收敛率是比较困难的. 此外, Mao^[10] 没有考虑系统延时, 对于带有延迟的随机微分方程, 截断型 EM 算法强收敛性会如何呢? 为了解决这个问题, 本文扩展截断型 EM 算法, 提出截断型 theta-EM 算法, 并且分析局部 Lipschitz 条件下随机延迟微分方程截断型 theta-EM 算法的强收敛性. 由于算法的隐式性, 本文增加保证数值解存在唯一性的条件, 然后给出漂移项和扩散项系数满足局部 Lipschitz 条件, 并且给出扩散系数超线性增长时截断型 theta-EM 算法的强收敛率.

2 截断型 theta-EM 算法介绍

本文用 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 表示一个完备的概率空间, $W(t)$ 是定义在该概率空间上的 d 维 Brown 运动. 记 $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, |\cdot|)$ 为 n 维 Euclid 空间, $\mathbb{R}^{n \times d}$ 为 $n \times d$ 阶矩阵集合, 矩阵 A 的迹范数定义为 $\|A\| = \sqrt{\text{trace}(A^T A)}$, 其中 A^T 是矩阵 A 的转置. 现考虑 $\mathbb{R}^n$ 上如下随机延迟微分方程:

$$dX(t) = b(X(t), X(t - \tau))dt + \sigma(X(t), X(t - \tau))dW(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

其中初始值为 $\xi \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}_0}^p([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, 即 ξ 是 $\mathcal{F}_0$ 可测的取值于 $\mathbb{R}^n$ 上且 p ($p \geq 2$) 阶矩有限的随机变量. 在 (2.1) 中, $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ 都是连续函数. 为了保证方程解的存在唯一性, 我们引入一些条件. 假设对于任意 $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,

(A1) 存在正常数 L_1 和 $p > 2$ 使得

$$\langle x, b(x, y) \rangle + \frac{p-1}{2} \|\sigma(x, y)\|^2 \leq L_1(1 + |x|^2 + |y|^2);$$

(A2) 对任意 $R \geq 1$, 存在正常数 M_R 使得对 $|x| \vee |y| \vee |\bar{x}| \vee |\bar{y}| \leq R$, 有

$$|b(x, y) - b(\bar{x}, \bar{y})| \vee \|\sigma(x, y) - \sigma(\bar{x}, \bar{y})\| \leq M_R(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|);$$

(A3) 存在正常数 L_2 和 $l \geq 2$ 使得

$$\|\sigma(x, y)\|^2 \leq L_2(1 + |x|^l + |y|^l).$$

引理 2.1 对任意 $T > 0$, 若条件 (A1)–(A3) 成立, 且 $p > l$, $\bar{p} = 2 + p - l$, 则方程 (2.1) 存在唯一解 $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$, 并且满足 $E(\sup_{t \in [0, T]} |X(t)|^{\bar{p}}) \leq C$, 其中 C 为正常数.

引理 2.1 的证明可参见文献 [10].

定义严格单调递减的函数 $g: (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ 使得对任意 $\Delta \in (0, 1]$, 有

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} g(\Delta) = \infty \quad \text{且} \quad M_{g(\Delta)} \Delta^{1/4} \leq 1. \quad (2.2)$$

注 2.1 满足 (2.2) 的函数是存在的. 例如, 令

$$g(\Delta) = \Delta^{-1/8} \quad \text{且} \quad M_R = M_{g(\Delta)} = g(\Delta).$$

显然, g 关于 Δ 严格单调递减. 对 $\Delta \in (0, 1]$, $\lim_{\Delta \rightarrow 0} g(\Delta) = \infty$. 此外, 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $M_{g(\Delta)} \Delta^{1/4} = \Delta^{1/8} \rightarrow 0$.

给定步长 $\Delta \in (0, 1]$, 对 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 定义如下截断函数:

$$b_\Delta(x, y) = b\left((|x| \wedge g(\Delta)) \frac{x}{|x|}, (|y| \wedge g(\Delta)) \frac{y}{|y|}\right) \quad \text{和} \quad \sigma_\Delta(x, y) = \sigma\left((|x| \wedge g(\Delta)) \frac{x}{|x|}, (|y| \wedge g(\Delta)) \frac{y}{|y|}\right),$$

其中当 $x = 0$ 时, 规定 $x/|x| = 0$.

引理 2.2 若条件 (A1) 成立, 则存在正常数 $\bar{L}_1$ 使得

$$\langle x, b_\Delta(x, y) \rangle + \frac{p-1}{2} \|\sigma_\Delta(x, y)\|^2 \leq \bar{L}_1(1 + |x|^2 + |y|^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

若条件 (A3) 成立, 则有

$$\|\sigma_\Delta(x, y)\|^2 \leq L_2(1 + |x|^l + |y|^l), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

证明 由 b_Δ 和 σ_Δ 的定义可知, 若 $(|x| \vee |y|) \leq g(\Delta)$, 则有 $b_\Delta(x, y) = b(x, y)$ 和 $\sigma_\Delta(x, y) = \sigma(x, y)$. 因此利用条件 (A1) 得

$$\langle x, b_\Delta(x, y) \rangle + \frac{p-1}{2} \|\sigma_\Delta(x, y)\|^2 = \langle x, b(x, y) \rangle + \frac{p-1}{2} \|\sigma(x, y)\|^2 \leq L_1(1 + |x|^2 + |y|^2).$$

若 $(|x| \wedge |y|) > g(\Delta)$, 由条件 (A1) 和 $g(\Delta) > g(1)$ ($\Delta \in (0, 1]$) 推得

$$\begin{aligned} & \langle x, b_\Delta(x, y) \rangle + \frac{p-1}{2} \|\sigma_\Delta(x, y)\|^2 \\ &= \left(\frac{|x|}{g(\Delta)} - 1 \right) \left\langle g(\Delta) \frac{x}{|x|}, b\left(g(\Delta) \frac{x}{|x|}, g(\Delta) \frac{y}{|y|}\right) \right\rangle \\ & \quad + \left\langle g(\Delta) \frac{x}{|x|}, b\left(g(\Delta) \frac{x}{|x|}, g(\Delta) \frac{y}{|y|}\right) \right\rangle + \frac{p-1}{2} \left\| \sigma\left(g(\Delta) \frac{x}{|x|}, g(\Delta) \frac{y}{|y|}\right) \right\|^2 \\ &\leq \left(\frac{|x|}{g(\Delta)} - 1 \right) L_1(1 + 2[g(\Delta)]^2) + L_1(1 + 2[g(\Delta)]^2) \\ &\leq \frac{|x|}{g(1)} L_1(1 + 2[g(\Delta)]^2) \leq \bar{L}_1(1 + |x|^2 + |y|^2). \end{aligned}$$

若 $|x| > g(\Delta)$ 且 $|y| \leq g(\Delta)$, 则有

$$\begin{aligned} \langle x, b_\Delta(x, y) \rangle + \frac{p-1}{2} \|\sigma_\Delta(x, y)\|^2 &= \left(\frac{|x|}{g(\Delta)} - 1 \right) \left\langle g(\Delta) \frac{x}{|x|}, b\left(g(\Delta) \frac{x}{|x|}, y\right) \right\rangle \\ & \quad + \left\langle g(\Delta) \frac{x}{|x|}, b\left(g(\Delta) \frac{x}{|x|}, y\right) \right\rangle + \frac{p-1}{2} \left\| \sigma\left(g(\Delta) \frac{x}{|x|}, y\right) \right\|^2 \\ &\leq \left(\frac{|x|}{g(\Delta)} - 1 \right) L_1(1 + [g(\Delta)]^2 + |y|^2) + L_1(1 + [g(\Delta)]^2 + |y|^2) \\ &\leq L_1|x| \left(\frac{1}{g(\Delta)} + g(\Delta) + \frac{|y|^2}{g(\Delta)} \right) \leq 2L_1(1 + |x|^2 + |y|^2). \end{aligned}$$

类似可得 $|x| \leq g(\Delta)$ 且 $|y| > g(\Delta)$ 的结论, 即 (2.3) 成立. 接下来证明 (2.4). 若 $(|x| \vee |y|) \leq g(\Delta)$, 结论显然成立. 若 $(|x| \wedge |y|) > g(\Delta)$, 由条件 (A3)、 $|g(\Delta)|^l \leq |x|^l$ 和 $|g(\Delta)|^l \leq |y|^l$ 可知,

$$\|\sigma_\Delta(x, y)\|^2 = \left\| \sigma\left(g(\Delta)\frac{x}{|x|}, g(\Delta)\frac{y}{|y|}\right) \right\|^2 \leq L_2 \left(1 + \left| g(\Delta)\frac{x}{|x|} \right|^l + \left| g(\Delta)\frac{y}{|y|} \right|^l \right) \leq L_2(1 + |x|^l + |y|^l).$$

若 $|x| > g(\Delta)$ 且 $|y| \leq g(\Delta)$, 则有

$$\|\sigma_\Delta(x, y)\|^2 = \left\| \sigma\left(g(\Delta)\frac{x}{|x|}, y\right) \right\|^2 \leq L_2 \left(1 + \left| g(\Delta)\frac{x}{|x|} \right|^l + |y|^l \right) \leq L_2(1 + |x|^l + |y|^l).$$

类似可得 $|x| \leq g(\Delta)$ 且 $|y| > g(\Delta)$ 时的结论. 证毕. $\square$

引理 2.3 若条件 (A2) 成立, 则对满足 $M_{g(\Delta)} \geq 1$ 的任意 $\Delta \in (0, 1]$, b_Δ 和 σ_Δ 是全局 Lipschitz 的, 且 Lipschitz 系数为 $2M_{g(\Delta)}$. 同时, b_Δ 满足全局单边 Lipschitz 条件, 其系数为 $5M_{g(\Delta)}^2$, 即对任意 $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$|b_\Delta(x, y) - b_\Delta(\bar{x}, \bar{y})| \vee \|\sigma_\Delta(x, y) - \sigma_\Delta(\bar{x}, \bar{y})\| \leq 2M_{g(\Delta)}(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|),$$

且

$$\langle x - \bar{x}, b_\Delta(x, y) - b_\Delta(\bar{x}, \bar{y}) \rangle \leq 5M_{g(\Delta)}^2(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2).$$

证明 将证明过程分为若干种情形讨论.

情形 1 $|x|$ 、 $|y|$ 、 $|\bar{x}|$ 和 $|\bar{y}|$ 中没有一个大于 $g(\Delta)$, 也即 $(|x| \vee |y| \vee |\bar{x}| \vee |\bar{y}|) \leq g(\Delta)$. 由条件 (A2) 易得

$$|b_\Delta(x, y) - b_\Delta(\bar{x}, \bar{y})| = |b(x, y) - b(\bar{x}, \bar{y})| \leq M_{g(\Delta)}(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|).$$

情形 2 $|x|$ 、 $|y|$ 、 $|\bar{x}|$ 和 $|\bar{y}|$ 中有一个大于 $g(\Delta)$, 例如, 设 $(|x| \vee |y| \vee |\bar{x}|) \leq g(\Delta)$ 且 $|\bar{y}| > g(\Delta)$. 由条件 (A2) 得

$$\begin{aligned} |b_\Delta(x, y) - b_\Delta(\bar{x}, \bar{y})| &= \left| b(x, y) - b\left(\bar{x}, g(\Delta)\frac{\bar{y}}{|\bar{y}|}\right) \right| \\ &\leq M_{g(\Delta)} \left(|x - \bar{x}| + \left| y - g(\Delta)\frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} \right| \right) \\ &\leq 2M_{g(\Delta)}(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|), \end{aligned}$$

其中最后一步利用了当 $|y| \leq g(\Delta) < |\bar{y}|$ 时, $|\bar{y}| - g(\Delta) \leq |\bar{y}| - |y| \leq |y - \bar{y}|$.

情形 3 $|x|$ 、 $|y|$ 、 $|\bar{x}|$ 和 $|\bar{y}|$ 中有两个大于 $g(\Delta)$, 例如, 设 $(|x| \vee |y|) \leq g(\Delta)$ 且 $(|\bar{x}| \wedge |\bar{y}|) > g(\Delta)$, 则

$$|b_\Delta(x, y) - b_\Delta(\bar{x}, \bar{y})| = \left| b(x, y) - b\left(g(\Delta)\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}, g(\Delta)\frac{\bar{y}}{|\bar{y}|}\right) \right| \leq 2M_{g(\Delta)}(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|).$$

情形 4 $|x|$ 、 $|y|$ 、 $|\bar{x}|$ 和 $|\bar{y}|$ 中有三个大于 $g(\Delta)$, 例如, 设 $|x| \leq g(\Delta)$ 且 $(|y| \wedge |\bar{x}| \wedge |\bar{y}|) > g(\Delta)$. 与情形 3 类似可得结论.

情形 5 所有的 $|x|$ 、 $|y|$ 、 $|\bar{x}|$ 和 $|\bar{y}|$ 都大于 $g(\Delta)$, 也即 $(|x| \wedge |y| \wedge |\bar{x}| \wedge |\bar{y}|) > g(\Delta)$, 则有

$$|b_\Delta(x, y) - b_\Delta(\bar{x}, \bar{y})| = \left| b\left(g(\Delta)\frac{x}{|x|}, g(\Delta)\frac{y}{|y|}\right) - b\left(g(\Delta)\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}, g(\Delta)\frac{\bar{y}}{|\bar{y}|}\right) \right| \leq 2M_{g(\Delta)}(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|).$$

类似可以证明 σ_Δ 的情形. 进一步有

$$\langle x - \bar{x}, b_\Delta(x, y) - b_\Delta(\bar{x}, \bar{y}) \rangle \leq \frac{1}{2}|x - \bar{x}|^2 + \frac{1}{2}|b_\Delta(x, y) - b_\Delta(\bar{x}, \bar{y})|^2 \leq 5M_{g(\Delta)}^2(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2).$$

证毕. $\square$

注 2.2 由引理 2.3 易得

$$|b_\Delta(x, y)| \leq 2M_{g(\Delta)}(|x| + |y|) + |b(0, 0)|, \quad (2.5)$$

$$\|\sigma_\Delta(x, y)\| \leq 2M_{g(\Delta)}(|x| + |y|) + \|\sigma(0, 0)\|. \quad (2.6)$$

现在构造 (2.1) 的截断型 theta-EM 算法. 对给定的时间 $T > 0$, 不妨假设存在两个正整数 m 和 M 使得 $\Delta = \frac{\tau}{m} = \frac{T}{M}$. 对 $k = -m, \dots, 0$, 令 $y_{t_k} = \xi(k\Delta)$, 对 $k = 0, 1, \dots, M-1$, 定义

$$y_{t_{k+1}} = y_{t_k} + \theta b_\Delta(y_{t_{k+1}}, y_{t_{k+1-m}})\Delta + (1 - \theta)b_\Delta(y_{t_k}, y_{t_{k-m}})\Delta + \sigma_\Delta(y_{t_k}, y_{t_{k-m}})\Delta W_{t_k}, \quad (2.7)$$

其中 $t_k = k\Delta$, $\Delta W_{t_k} = W(t_{k+1}) - W(t_k)$. 由单调算子理论^[22], 对给定的 y_{t_k} , 为了保证 (2.7) 中 $y_{t_{k+1}}$ 的存在唯一性, 步长要求满足 $5M_{g(\Delta)}^2\theta\Delta < 1$. 通过 (2.2) 可知, $M_{g(\Delta)}^2\Delta^{\frac{1}{2}} \leq 1$, 即有 $\theta^2\Delta < \frac{1}{25}$. 将 (2.7) 改写成如下形式:

$$y_{t_{k+1}} - \theta b_\Delta(y_{t_{k+1}}, y_{t_{k+1-m}})\Delta = y_{t_k} - \theta b_\Delta(y_{t_k}, y_{t_{k-m}})\Delta + b_\Delta(y_{t_k}, y_{t_{k-m}})\Delta + \sigma_\Delta(y_{t_k}, y_{t_{k-m}})\Delta W_{t_k}.$$

两边从 0 到 k 求和得到

$$\begin{aligned} & y_{t_{k+1}} - \theta b_\Delta(y_{t_{k+1}}, y_{t_{k+1-m}})\Delta \\ &= \xi(0) - \theta b_\Delta(\xi(0), \xi(-\tau))\Delta + \sum_{i=0}^k b_\Delta(y_{t_i}, y_{t_{i-m}})\Delta + \sum_{i=0}^k \sigma_\Delta(y_{t_i}, y_{t_{i-m}})\Delta W_{t_i}. \end{aligned}$$

定义 (2.7) 的连续形式如下: 对 $t \in [-\tau, 0]$, 令 $Y(t) = \xi(t)$. 对 $t \in [0, T]$, 定义

$$\begin{aligned} Y(t) - \theta b_\Delta(Y(t), Y(t - \tau))\Delta &= \xi(0) - \theta b_\Delta(\xi(0), \xi(-\tau))\Delta + \int_0^t b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s - \tau))ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s - \tau))dW(s), \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中 $\bar{Y}(t)$ 定义为

$$\bar{Y}(t) := y_{t_k}, \quad \text{当 } t \in [t_k, t_{k+1}),$$

因此, $\bar{Y}(t - \tau) = y_{t_{k-m}}$. 由于后面的计算过程中还要求 $\theta^2\Delta < \frac{1}{64}$ 且 $M_{g(\Delta)} \geq 1$, 因此, 取 $\Delta_1 \in (0, \frac{1}{25\theta^2})$ 且 $\Delta_2 \in (0, \frac{1}{64\theta^2})$. 当 $\theta \in (0, 1]$ 时, 令 $\Delta \in (0, \Delta_1 \wedge \Delta_2]$. 当 $\theta = 0$ 时, 令 $\Delta \in (0, 1]$. 为了计算方便, 记 $Z(t) = Y(t) - \theta b_\Delta(Y(t), Y(t - \tau))\Delta$ 且 $\bar{Z}(t) = \bar{Y}(t) - \theta b_\Delta(\bar{Y}(t), \bar{Y}(t - \tau))\Delta$, 用 C 表示独立于 Δ 和 R 的正常数.

引理 2.4 若条件 (A1) 和 (A2) 成立, 则存在正常数 C 使得

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}|Y(t)|^p \leq C.$$

证明 该证明过程类似于文献 [23, 引理 2.2]. 由 (2.8) 知,

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))ds + \int_0^t \sigma_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))dW(s),$$

其中 $Z(0) = \xi(0) - \theta b_\Delta(\xi(0), \xi(-\tau))\Delta$. 对 $x > 0$, 令 $\lfloor x \rfloor$ 为 x 的向下取整. 利用 Itô 公式知,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[1 + |Z(t)|^2]^{\frac{p}{2}} &\leq \mathbb{E}[1 + |Z(0)|^2]^{\frac{p}{2}} + \frac{p}{2}\mathbb{E} \int_0^t [1 + |Z(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} 2\langle Z(s), b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\ &\quad + \frac{1}{2}p(p-1)\mathbb{E} \int_0^t [1 + |Z(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} \|\sigma_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))\|^2 ds \\ &\leq \mathbb{E}[1 + |Z(0)|^2]^{\frac{p}{2}} + \frac{p}{2}\mathbb{E} \int_0^t [1 + |Z(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} (p-1) \|\sigma_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))\|^2 ds \\ &\quad + \frac{p}{2}\mathbb{E} \int_0^t [1 + |Z(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} 2\langle \bar{Y}(s), b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\ &\quad + p\mathbb{E} \int_0^t [1 + |Z(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} \langle Z(s) - \bar{Z}(s), b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\ &=: \mathbb{E}[1 + |Z(0)|^2]^{\frac{p}{2}} + E_1(t) + E_2(t) + E_3(t). \end{aligned}$$

因此, 由 (2.2)–(2.5) 和 Young 不等式得

$$\begin{aligned} E_1(t) + E_2(t) &\leq C\mathbb{E} \int_0^t [1 + |Z(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} (1 + |\bar{Y}(s)|^2 + |\bar{Y}(s-\tau)|^2) ds \\ &\leq C\mathbb{E} \int_0^t (|Y(s)|^p + |Y(s-\tau)|^p + |\bar{Y}(s)|^p + |\bar{Y}(s-\tau)|^p) ds \\ &\quad + CM_{g(\Delta)}^p \Delta^p \mathbb{E} \int_0^t (1 + |Y(s)|^p + |Y(s-\tau)|^p) ds \\ &\leq C + C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E}|Y(u)|^p ds. \end{aligned}$$

进一步, 将 $E_3(t)$ 改写为如下形式:

$$\begin{aligned} E_3(t) &= p\mathbb{E} \int_0^t [1 + |\bar{Z}(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} \langle Z(s) - \bar{Z}(s), b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\ &\quad + p\mathbb{E} \int_0^t \{[1 + |Z(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} - [1 + |\bar{Z}(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}}\} \langle Z(s) - \bar{Z}(s), b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\ &=: pE_{31}(t) + pE_{32}(t), \end{aligned}$$

其中

$$Z(s) - \bar{Z}(s) = \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s b_\Delta(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau))du + \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s \sigma_\Delta(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau))dW(u).$$

利用 (2.2)、(2.5) 和 Young 不等式得

$$\begin{aligned} E_{31}(t) &= \mathbb{E} \int_0^t [1 + |\bar{Z}(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} \left\langle \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s b_\Delta(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau))du, b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \right\rangle ds \\ &\quad + \mathbb{E} \int_0^t [1 + |\bar{Z}(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} \left\langle \mathbb{E} \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s \sigma_\Delta(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau))dW(u) \Big|_{\mathcal{F}_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}}, b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \right\rangle ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E} \int_0^t [1 + |\bar{Z}(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s |b_{\Delta}(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau))| du |b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))| ds \\
&\leq \Delta \mathbb{E} \int_0^t [1 + |\bar{Z}(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} |b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))|^2 ds \\
&\leq CM_{g(\Delta)}^2 \Delta \mathbb{E} \int_0^t (1 + |\bar{Y}(s)|^p + |\bar{Y}(s-\tau)|^p) ds \\
&\quad + CM_{g(\Delta)}^2 \Delta M_{g(\Delta)}^p \Delta^p \mathbb{E} \int_0^t (1 + |\bar{Y}(s)|^p + |\bar{Y}(s-\tau)|^p) ds \\
&\leq C + C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} |Y(u)|^p ds.
\end{aligned}$$

再次利用 Itô 公式可得

$$\begin{aligned}
[1 + |Z(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} - [1 + |\bar{Z}(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}} &\leq (p-2) \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-4}{2}} \langle Z(u), b_{\Delta}(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau)) \rangle du \\
&\quad + \frac{1}{2} (p-2)(p-3) \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-4}{2}} \|\sigma_{\Delta}(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau))\|^2 du \\
&\quad + (p-2) \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-4}{2}} \langle Z(u), \sigma_{\Delta}(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau)) dW(u) \rangle.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
E_{32}(t) &\leq (p-2) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-4}{2}} \langle Z(u), b_{\Delta}(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau)) \rangle du \\
&\quad \times \langle Z(s) - \bar{Z}(s), b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\
&\quad + \frac{1}{2} (p-2)(p-3) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-4}{2}} \|\sigma_{\Delta}(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau))\|^2 du \\
&\quad \times \langle Z(s) - \bar{Z}(s), b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\
&\quad + (p-2) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-4}{2}} \langle Z(u), \sigma_{\Delta}(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau)) dW(u) \rangle \\
&\quad \times \langle Z(s) - \bar{Z}(s), b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\
&=: (p-2) E_{321} + \frac{1}{2} (p-2)(p-3) E_{322} + (p-2) E_{323}.
\end{aligned}$$

由 (2.2)、(2.5)–(2.6)、Young 不等式、Hölder 不等式和 BDG (Burkholder-Davis-Gundy) 不等式, 计算可得

$$\begin{aligned}
E_{321}(t) &\leq \mathbb{E} \int_0^t \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-4}{2}} \langle Z(u), b_{\Delta}(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau)) \rangle du \\
&\quad \times \left\langle \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s b_{\Delta}(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau)) du, b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \right\rangle ds \\
&\quad + \mathbb{E} \int_0^t \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-4}{2}} \langle Z(u), b_{\Delta}(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau)) \rangle du \\
&\quad \times \left\langle \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s \sigma_{\Delta}(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau)) dW(u), b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \right\rangle ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \Delta \mathbb{E} \int_0^t \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-3}{2}} |b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))|^3 du ds \\
 &\quad + C \mathbb{E} \int_0^t \left[\left(\int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-3}{2}} |b_\Delta(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau))| du |b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))| \right)^{\frac{p}{p-1}} \right. \\
 &\quad \left. + \left| \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s \sigma_\Delta(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau)) dW(u) \right|^p \right] ds \\
 &\leq C M_{g(\Delta)}^3 \Delta^2 \mathbb{E} \int_0^t (|Y(s)|^p + |Y(s-\tau)|^p + |\bar{Y}(s)|^p + |\bar{Y}(s-\tau)|^p) ds \\
 &\quad + C M_{g(\Delta)}^3 \Delta^2 M_{g(\Delta)}^p \Delta^p \mathbb{E} \int_0^t (|Y(s)|^p + |Y(s-\tau)|^p) ds \\
 &\quad + C \mathbb{E} \int_0^t \left(\int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-3}{2}} |b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))|^2 du \right)^{\frac{p}{p-1}} ds \\
 &\quad + C \mathbb{E} \int_0^t \left(\int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s \|\sigma_\Delta(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau))\|^2 du \right)^{\frac{p}{2}} ds \\
 &\leq C + C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} |Y(u)|^p ds.
 \end{aligned}$$

利用同样技巧可得

$$E_{322}(t) \leq C + C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} |Y(u)|^p ds.$$

再由 (2.2)、(2.5)–(2.6) 和 Young 不等式得

$$\begin{aligned}
 E_{323}(t) &= \mathbb{E} \int_0^t \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-4}{2}} \langle Z(u), \sigma_\Delta(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau)) dW(u) \rangle \\
 &\quad \times \left\langle \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s \sigma_\Delta(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau)) dW(u), b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \right\rangle ds \\
 &\leq \mathbb{E} \int_0^t \int_{\lfloor \frac{s}{\Delta} \rfloor \Delta}^s [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p-3}{2}} \|\sigma_\Delta(\bar{Y}(u), \bar{Y}(u-\tau))\|^2 du |b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))| ds \\
 &\leq C M_{g(\Delta)}^3 \Delta^3 \mathbb{E} \int_0^t (|Y(s)|^p + |Y(s-\tau)|^p + |\bar{Y}(s)|^p + |\bar{Y}(s-\tau)|^p) ds \\
 &\quad + C M_{g(\Delta)}^3 \Delta^3 M_{g(\Delta)}^p \Delta^p \mathbb{E} \int_0^t (|Y(s)|^p + |Y(s-\tau)|^p) ds \\
 &\leq C + C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} |Y(u)|^p ds.
 \end{aligned}$$

整理这些不等式可得

$$E_3(t) \leq C + C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} |Y(u)|^p ds.$$

因此, 由 $E_1(t)$ 、 $E_2(t)$ 和 $E_3(t)$ 的估计可知,

$$\sup_{0 \leq u \leq t} \mathbb{E} |Z(u)|^p \leq \sup_{0 \leq u \leq t} \mathbb{E} [1 + |Z(u)|^2]^{\frac{p}{2}} \leq C + C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} |Y(u)|^p ds.$$

由于 $|x - y|^p \geq 2^{1-p}|x|^p - |y|^p$, 利用 (2.5), 可得

$$\begin{aligned} |Z(t)|^p &\geq 2^{1-p}|Y(t)|^p - \theta^p \Delta^p |b_\Delta(Y(t), Y(t-\tau))|^p \\ &\geq 2^{1-p}|Y(t)|^p - 2^{2p-2} \theta^p \Delta^p M_{g(\Delta)}^p (|Y(t)|^p + |Y(t-\tau)|^p) - 2^{p-1} \theta^p \Delta^p |b(0, 0)|^p \\ &= (2^{1-p} - 2^{2p-2} \theta^p \Delta^p M_{g(\Delta)}^p) |Y(t)|^p - 2^{2p-2} \theta^p \Delta^p M_{g(\Delta)}^p |Y(t-\tau)|^p - 2^{p-1} \theta^p \Delta^p |b(0, 0)|^p. \end{aligned}$$

注意到 $\Delta < \frac{1}{64\theta^2}$, 因此有

$$\sup_{0 \leq u \leq t} E|Y(u)|^p \leq C + C \sup_{0 \leq u \leq t} E|Z(u)|^p \leq C + C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} E|Y(u)|^p ds.$$

由 Gronwall 公式即得结论. 证毕. $\square$

引理 2.5 若条件 (A1) 和 (A2) 成立, 则存在正常数 C 使得

$$\sup_{t \in [0, T]} E|Z(t) - \bar{Z}(t)|^p \leq CM_{g(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p}{2}} \quad \text{且} \quad \sup_{t \in [0, T]} E|Y(t) - \bar{Y}(t)|^p \leq CM_{g(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p}{2}}.$$

证明 对任意 $t \in [0, T]$, 存在 k 使得 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 因此即要证明

$$\sup_{0 \leq k \leq M-1} \sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} E|Y(t) - Y(t_k)|^p \leq CM_{g(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p}{2}}.$$

对 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 由 Hölder 不等式和 BDG 不等式, 可得

$$\begin{aligned} E|Z(t) - Z(t_k)|^p &\leq 2^{p-1} E \left| \int_{t_k}^t b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) ds \right|^p + 2^{p-1} E \left| \int_{t_k}^t \sigma_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) dW(s) \right|^p \\ &\leq 2^{p-1} \Delta^{p-1} E \int_{t_k}^t |b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))|^p ds + 2^{p-1} \Delta^{\frac{p}{2}-1} E \int_{t_k}^t \|\sigma_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))\|^p ds. \end{aligned}$$

由引理 2.4、(2.5) 和 (2.6) 得

$$\begin{aligned} E|Z(t) - Z(t_k)|^p &\leq 2^{p-1} \Delta^{p-1} E \int_{t_k}^t |2M_{g(\Delta)}(|\bar{Y}(s)| + |\bar{Y}(s-\tau)|) + |b(0, 0)||^p ds \\ &\quad + 2^{p-1} \Delta^{\frac{p}{2}-1} E \int_{t_k}^t |2M_{g(\Delta)}(|\bar{Y}(s)| + |\bar{Y}(s-\tau)|) + \|\sigma(0, 0)\||^p ds \\ &\leq CM_{g(\Delta)}^p \Delta^p + C \Delta^p + CM_{g(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p}{2}} + C \Delta^{\frac{p}{2}} \leq CM_{g(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

第一部分得到证明. 再利用与引理 2.4 类似的技巧可得

$$\sup_{t \in [0, T]} E|Y(t) - Y(t_k)|^p \leq C \sup_{t \in [0, T]} E|Z(t) - Z(t_k)|^p \leq CM_{g(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p}{2}}.$$

证毕. $\square$

引理 2.6 若条件 (A1)–(A3) 成立, 并假设 $p > l$, 令 $\bar{p} = 2 + p - l$, 则存在正常数 C 使得

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} |Y(t)|^{\bar{p}} \right) \leq C.$$

证明 由 Itô 公式知,

$$\begin{aligned}
 |Z(t)|^{\bar{p}} &\leq |Z(0)|^{\bar{p}} + \bar{p} \int_0^t |Z(s)|^{\bar{p}-2} \langle Z(s), \sigma_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) dW(s) \rangle \\
 &\quad + \bar{p} \int_0^t |Z(s)|^{\bar{p}-2} \left[\langle Z(s), b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle + \frac{\bar{p}-1}{2} \|\sigma_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))\|^2 \right] ds \\
 &\leq |Z(0)|^{\bar{p}} + \bar{p} \int_0^t |Z(s)|^{\bar{p}-2} \langle Z(s), \sigma_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) dW(s) \rangle \\
 &\quad + \bar{p} \int_0^t |Z(s)|^{\bar{p}-2} \left[\langle \bar{Y}(s), b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle + \frac{\bar{p}-1}{2} \|\sigma_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))\|^2 \right] ds \\
 &\quad + \bar{p} \int_0^t |Z(s)|^{\bar{p}-2} \langle Z(s) - \bar{Y}(s), b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\
 &=: |Z(0)|^{\bar{p}} + J_1(t) + J_2(t) + J_3(t).
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

由 (2.4)、引理 2.4 和 BDG 不等式得

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |J_1(t)| \right) &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Z(t)|^{\bar{p}} \right) + CE \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}-2} (1 + |\bar{Y}(s)|^l + |\bar{Y}(s-\tau)|^l) ds \\
 &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Z(t)|^{\bar{p}} \right) + CE \int_0^T (|Z(s)|^{\bar{p}} + |\bar{Y}(s)|^{\bar{p}} + |\bar{Y}(s-\tau)|^{\bar{p}}) ds \\
 &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Z(t)|^{\bar{p}} \right) + C.
 \end{aligned}$$

由 (2.3)、引理 2.4 和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |J_2(t)| \right) &\leq CE \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}-2} (1 + |\bar{Y}(s)|^2 + |\bar{Y}(s-\tau)|^2) ds \\
 &\leq CE \int_0^T (|Z(s)|^{\bar{p}} + |\bar{Y}(s)|^{\bar{p}} + |\bar{Y}(s-\tau)|^{\bar{p}}) ds \leq C.
 \end{aligned}$$

进一步由 (2.5) 得

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |J_3(t)| \right) &= \bar{p} \mathbb{E} \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}-2} \langle Y(s) - \bar{Y}(s), b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\
 &\quad - \bar{p} \mathbb{E} \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}-2} \langle \theta b_{\Delta}(Y(s), Y(s-\tau)) \Delta, b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\
 &\leq CE \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}-2} |Y(s) - \bar{Y}(s)| [2M_{g(\Delta)}(|Y(s)| + |Y(s-\tau)|) + |b(0,0)|] ds \\
 &\quad + CE \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}} ds + CE \int_0^T \Delta^{\frac{\bar{p}}{2}} |b_{\Delta}(Y(s), Y(s-\tau))|^{\frac{\bar{p}}{2}} |b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))|^{\frac{\bar{p}}{2}} ds \\
 &=: C + J_{31}(t) + J_{32}(t) + J_{33}(t),
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 J_{31}(t) &= CE \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}-2} |Y(s) - \bar{Y}(s)| M_{g(\Delta)}(|Y(s)| + |Y(s-\tau)|) ds, \\
 J_{32}(t) &= CE \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}-2} |Y(s) - \bar{Y}(s)| ds,
 \end{aligned}$$

$$J_{33}(t) = CE \int_0^T \Delta^{\frac{\bar{p}}{2}} |b_{\Delta}(Y(s), Y(s-\tau))|^{\frac{\bar{p}}{2}} |b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))|^{\frac{\bar{p}}{2}} ds.$$

由 Young 不等式、引理 2.4 和 2.5 得

$$\begin{aligned} J_{31}(t) &\leq CE \int_0^T M_{g(\Delta)}^{\bar{p}} |Y(s) - \bar{Y}(s)|^{\bar{p}} ds + CE \int_0^T |Z(s)|^{\frac{\bar{p}(\bar{p}-2)}{\bar{p}-1}} (|Y(s)| + |Y(s-\tau)|)^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}} ds \\ &\leq CE \int_0^T M_{g(\Delta)}^{\bar{p}} |Y(s) - \bar{Y}(s)|^{\bar{p}} ds + CE \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}} ds + CE \int_0^T (|Y(s)| + |Y(s-\tau)|)^{\bar{p}} ds \\ &\leq C + CM_{g(\Delta)}^{2\bar{p}} \Delta^{\frac{\bar{p}}{2}} \leq C. \end{aligned}$$

再次利用引理 2.4 和 2.5 可得

$$\begin{aligned} J_{32}(t) &= CE \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}-2} |Y(s) - \bar{Y}(s)| ds \leq CE \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}-2} (1 + |Y(s) - \bar{Y}(s)|^2) ds \\ &\leq C + CE \int_0^T |Z(s)|^{\bar{p}} ds + CE \int_0^T |Y(s) - \bar{Y}(s)|^p ds \leq C. \end{aligned}$$

类似可得

$$J_{33}(t) \leq C + CM_{g(\Delta)}^{\bar{p}} \Delta^{\frac{\bar{p}}{2}} \leq C.$$

将 $J_1(t)$ 、 $J_2(t)$ 和 $J_3(t)$ 代入 (2.9) 得 $E(\sup_{t \in [0, T]} |Z(t)|^{\bar{p}}) \leq C$. 利用与引理 2.4 类似的技巧可得

$$E\left(\sup_{t \in [0, T]} |Y(t)|^{\bar{p}}\right) \leq C + E\left(\sup_{t \in [0, T]} |Z(t)|^{\bar{p}}\right) \leq C.$$

证毕. □

3 局部 Lipschitz 条件下的强收敛率

为了得到强收敛率, 我们进一步引入如下条件:

(A4) 存在正常数 L_3 和 $q \geq 2$ 使得

$$\langle x - \bar{x}, b(x, y) - b(\bar{x}, \bar{y}) \rangle + \frac{q-1}{2} \|\sigma(x, y) - \sigma(\bar{x}, \bar{y})\|^2 \leq L_3(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2).$$

引理 3.1 定义停时 $\tau_R = \inf\{t \geq 0, |X(t)| \geq R\}$, 若条件 (A1) 和 (A2) 成立, 则

$$P(\tau_R \leq T) \leq \frac{C}{R^p}.$$

证明 类似引理 2.1 的证明, 可得 $E|X(T \wedge \tau_R)|^p \leq C$, 也即 $R^p P(\tau_R \leq T) \leq C$, 因此结论成立. □

引理 3.2 定义停时 $\rho_R = \inf\{t \geq 0, |Y(t)| \geq R\}$, 若条件 (A1) 和 (A2) 成立, 则

$$P(\rho_R \leq T) \leq \frac{C}{R^p}.$$

引理 3.3 若条件 (A1)–(A4) 成立, 则存在正常数 C 使得对任意 $R \leq g(\Delta)$, 有

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E|X(t \wedge \nu_R) - Y(t \wedge \nu_R)|^q \leq CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}},$$

其中 $\nu_R = \tau_R \wedge \rho_R$.

证明 记 $e(t) = X(t) - Z(t)$, 由 Itô 公式得

$$\begin{aligned}
 |e(t \wedge \nu_R)|^q &\leq \theta^q |b_\Delta(\xi(0), \xi(-\tau))|^q \Delta^q + q \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^{q-2} \left[\langle e(s), b(X(s), X(s-\tau)) \right. \\
 &\quad \left. - b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle + \frac{q-1}{2} \|\sigma(X(s), X(s-\tau)) - \sigma_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))\|^2 \right] ds \\
 &\quad + q \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^{q-2} \langle e(s), (\sigma(X(s), X(s-\tau)) - \sigma_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))) dW(s) \rangle \\
 &\leq CM_{g(\Delta)}^q \Delta^q + q \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^{q-2} \langle X(s) - \bar{Y}(s), b(X(s), X(s-\tau)) - b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\
 &\quad + \frac{q(q-1)}{2} \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^{q-2} \|\sigma(X(s), X(s-\tau)) - \sigma_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))\|^2 ds \\
 &\quad + q \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^{q-2} \langle \bar{Y}(s) - Y(s), b(X(s), X(s-\tau)) - b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\
 &\quad + q \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^{q-2} \langle \theta b_\Delta(Y(s), Y(s-\tau)) \Delta, b(X(s), X(s-\tau)) - b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) \rangle ds \\
 &\quad + q \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^{q-2} \langle e(s), (\sigma(X(s), X(s-\tau)) - \sigma_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))) dW(s) \rangle \\
 &=: CM_{g(\Delta)}^q \Delta^q + H_1(t) + H_2(t) + H_3(t) + H_4(t) + H_5(t). \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

由于对 $0 \leq s \leq t \wedge \nu_R$, 有 $b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) = b(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))$, 且有 $\sigma_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) = \sigma(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))$, 因此, 由 (A4)、(2.5)、引理 2.4 和 2.5 得

$$\begin{aligned}
 EH_1(t) + EH_2(t) &\leq qL_3 E \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^{q-2} (|X(s) - \bar{Y}(s)|^2 + |X(s-\tau) - \bar{Y}(s-\tau)|^2) ds \\
 &\leq CE \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} (|X(s) - \bar{Y}(s)|^q + |X(s-\tau) - \bar{Y}(s-\tau)|^q) ds \\
 &\leq C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} E|X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q ds + CM_{g(\Delta)}^q \Delta^q + CM_{g(\Delta)}^q \Delta^{\frac{q}{2}}.
 \end{aligned}$$

进一步, 由引理 2.3 和 2.5 得到

$$\begin{aligned}
 EH_3(t) &\leq CE \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} M_{g(\Delta)}^{\frac{q}{2}} |\bar{Y}(s) - Y(s)|^{\frac{q}{2}} \\
 &\quad \times (|X(s) - \bar{Y}(s)| + |X(s-\tau) - \bar{Y}(s-\tau)|)^{\frac{q}{2}} ds \\
 &\leq CE \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} M_{g(\Delta)}^q |\bar{Y}(s) - Y(s)|^q ds \\
 &\quad + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} (|X(s) - \bar{Y}(s)|^q + |X(s-\tau) - \bar{Y}(s-\tau)|^q) ds \\
 &\leq C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} E|X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q ds + CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}} + CM_{g(\Delta)}^q \Delta^{\frac{q}{2}}.
 \end{aligned}$$

类似地, 由 (2.5)、引理 2.3 和 2.5 得

$$EH_4(t) \leq CE \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} \Delta^{\frac{q}{2}} |b_\Delta(Y(s), Y(s-\tau))|^{\frac{q}{2}}$$

$$\begin{aligned}
& \times |b_{\Delta}(X(s), X(s-\tau)) - b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))|^{\frac{q}{2}} ds \\
& \leq CE \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^q (1 + |Y(s)| + |Y(s-\tau)|)^q ds \\
& \quad + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} (|X(s) - \bar{Y}(s)|^q + |X(s-\tau) - \bar{Y}(s-\tau)|^q) ds \\
& \leq C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} E|X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q ds + CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^q + CM_{g(\Delta)}^q \Delta^{\frac{q}{2}}.
\end{aligned}$$

由 Brown 运动期望为 0 可知 $EH_5(t) = 0$. 将 $H_1(t)$ 、 $H_2(t)$ 、 $H_3(t)$ 、 $H_4(t)$ 和 $H_5(t)$ 代入 (3.1) 得到

$$\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} E|e(u)|^q \leq C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} E|X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q ds + CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} E|X(u) - Y(u)|^q & \leq CM_{g(\Delta)}^q \Delta^q + C \sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} E|e(u)|^q \\
& \leq C \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} E|X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q ds + CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}.
\end{aligned}$$

最后, 由 Gronwall 不等式即可得到结论. 证毕. $\square$

定理 3.1 若条件 (A1)–(A4) 成立, 且存在 $q < p$ 使得

$$[M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}]^{\frac{-1}{p-q}} \leq g(\Delta),$$

则存在正常数 C 使得

$$E|X(t) - Y(t)|^q \leq CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}} \quad \text{且} \quad E|X(t) - \bar{Y}(t)|^q \leq CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}.$$

证明 由 Young 不等式, 对任意 $\eta > 0$, 有

$$E|X(t) - Y(t)|^q = E(\mathbf{I}_{\{\tau_R > T, \rho_R > T\}} |X(t) - Y(t)|^q) + \frac{q\eta}{p} E|X(t) - Y(t)|^p + \frac{p-q}{p\eta^{\frac{q}{p-q}}} P(\tau_R \leq T \text{ 或 } \rho_R \leq T).$$

利用引理 3.1 和 3.2 得

$$E|X(t) - Y(t)|^q \leq E|X(t \wedge \nu_R) - Y(t \wedge \nu_R)|^q + \frac{q\eta C}{p} + \frac{2(p-q)C}{p\eta^{\frac{q}{p-q}} R^p}.$$

选取 $\eta = M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}$ 和 $R = [M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}]^{\frac{-1}{p-q}}$, 注意到

$$R = [M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}]^{\frac{-1}{p-q}} \leq g(\Delta),$$

利用引理 3.3 得

$$E|X(t) - Y(t)|^q \leq CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}. \quad (3.2)$$

第二部分由 (3.2) 和引理 2.5 即可得到. 证毕. $\square$

若条件 (A2)–(A4) 用下面的 (A2')–(A4') 代替, 则可以得到更强的结论.

(A2') 对任意 $R \geq 1$, 存在正常数 M_R 使得对任意 $(|x| \vee |y| \vee |\bar{x}| \vee |\bar{y}|) \leq R$, 有

$$|b(x, y) - b(\bar{x}, \bar{y})| \leq M_R(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|);$$

(A3') 存在正常数 $\bar{L}_2$ 和 $\bar{l} = \frac{l}{2} - 1$ ($l \geq 2$) 使得

$$\|\sigma(x, y) - \sigma(\bar{x}, \bar{y})\| \leq \bar{L}_2(1 + |x|^{\bar{l}} + |\bar{x}|^{\bar{l}} + |y|^{\bar{l}} + |\bar{y}|^{\bar{l}})(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|);$$

(A4') 存在正常数 L_3 使得

$$\langle x - \bar{x}, b(x, y) - b(\bar{x}, \bar{y}) \rangle \leq L_3(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2).$$

注 3.1 由于条件 (A2') 和 (A3') 隐含了条件 (A2) 和 (A3), 因此, 引理 2.1–2.6 在条件 (A1)、(A2') 和 (A3') 下仍然成立. 此时我们需将引理 2.5 的结论推广到更强的形式.

引理 3.4 若条件 (A1) 和 (A2) (或条件 (A1)、(A2')、(A3')) 成立, 则存在正常数 C 使得

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |Y(t) - \bar{Y}(t)|^p \right) \leq CM_{g(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p}{2}}.$$

证明 对任意 $t \in [0, T]$, 存在 k 使得 $t \in [t_k, t_{k+1})$. 因此, 原结论等价于证明

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq k \leq M-1} \sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |Y(t) - Y(t_k)|^p \right) \leq CM_{g(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p}{2}}.$$

利用 Hölder 不等式和 BDG 不等式, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |Z(t) - Z(t_k)|^p \right) &\leq 2^{p-1} \mathbb{E} \left(\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} \left| \int_{t_k}^t b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) ds \right|^p \right) \\ &\quad + 2^{p-1} \mathbb{E} \left(\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} \left| \int_{t_k}^t \sigma_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau)) dW(s) \right|^p \right) \\ &\leq 2^{p-1} \Delta^{p-1} \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |b_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))|^p ds \\ &\quad + 2^{p-1} \Delta^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma_{\Delta}(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s-\tau))\|^p ds. \end{aligned}$$

由 (2.5)、(2.6) 和引理 2.4, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |Z(t) - Z(t_k)|^p \right) &\leq 2^{p-1} \Delta^{p-1} \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |2M_{g(\Delta)}(|\bar{Y}(s)| + |\bar{Y}(s-\tau)|) + |b(0, 0)||^p ds \\ &\quad + 2^{p-1} \Delta^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |2M_{g(\Delta)}(|\bar{Y}(s)| + |\bar{Y}(s-\tau)|) + \|\sigma(0, 0)\|^p ds \\ &\leq CM_{g(\Delta)}^p \Delta^p + C\Delta^p + CM_{g(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p}{2}} + C\Delta^{\frac{p}{2}} \leq CM_{g(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

进一步, 由引理 2.3 得

$$\begin{aligned} |Z(t) - Z(t_k)|^p &\geq 2^{1-p} |Y(t) - Y(t_k)|^p - \theta^p \Delta^p |b_{\Delta}(Y(t), Y(t-\tau)) - b_{\Delta}(Y(t_k), Y(t_k-\tau))|^p \\ &\geq 2^{1-p} |Y(t) - Y(t_k)|^p - 2^{p-1} \theta^p \Delta^p M_{g(\Delta)}^p (|Y(t) - Y(t_k)|^p + |Y(t-\tau) - Y(t_k-\tau)|^p) \end{aligned}$$

$$= (2^{1-p} - 2^{p-1}\theta^p \Delta^p M_{g(\Delta)}^p) |Y(t) - Y(t_k)|^p - 2^{p-1}\theta^p \Delta^p M_{g(\Delta)}^p |Y(t-\tau) - Y(t_k-\tau)|^p.$$

因此,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |Y(t) - Y(t_k)|^p\right) \leq C \mathbb{E}\left(\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |Z(t) - Z(t_k)|^p\right) \leq C M_{g(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p}{2}}.$$

证毕. $\square$

引理 3.5 若条件 (A1) 和 (A2')-(A4') 成立, R 是满足 $R \leq g(\Delta)$ 的实数, 则存在正常数 C 使得对 $q \leq p$ 和 $q\bar{l} \leq p$, 有

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t \wedge \nu_R) - Y(t \wedge \nu_R)|^q\right) \leq C M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}},$$

其中 $\nu_R = \tau_R \wedge \rho_R$.

证明 沿用前面的符号, 则

$$|e(t \wedge \nu_R)|^q \leq C M_{g(\Delta)}^q \Delta^q + H_1(t) + H_2(t) + H_3(t) + H_4(t) + H_5(t),$$

其中 $H_1(t)$ 、 $H_2(t)$ 、 $H_3(t)$ 、 $H_4(t)$ 和 $H_5(t)$ 如引理 3.3 所定义. 现在重新估计 (A1) 和 (A2')-(A4') 条件下的 $H_1(t)$ 、 $H_2(t)$ 、 $H_3(t)$ 、 $H_4(t)$ 和 $H_5(t)$. 由条件 (A4') 和引理 3.4 得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} |H_1(u)|\right) &\leq q L_3 \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^{q-2} (|X(s) - \bar{Y}(s)|^2 + |X(s-\tau) - \bar{Y}(s-\tau)|^2) ds \\ &\leq C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_R} (|X(s) - \bar{Y}(s)|^q + |X(s-\tau) - \bar{Y}(s-\tau)|^q) ds \\ &\leq C \int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq u \leq s} |X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q\right) ds + C M_{g(\Delta)}^q \Delta^{\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

利用条件 (A3')、引理 2.1、2.6 和 3.4 得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} |H_2(u)|\right) &\leq C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_R} (1 + |X(s)|^{\bar{l}} + |\bar{Y}(s)|^{\bar{l}} \\ &\quad + |X(s-\tau)|^{\bar{l}} + |\bar{Y}(s-\tau)|^{\bar{l}})^q (|X(s) - \bar{Y}(s)| + |X(s-\tau) - \bar{Y}(s-\tau)|)^q ds \\ &\leq C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + C \int_0^{t \wedge \nu_R} \mathbb{E}[(1 + |X(s)|^{\bar{l}} + |\bar{Y}(s)|^{\bar{l}} + |X(s-\tau)|^{\bar{l}} \\ &\quad + |\bar{Y}(s-\tau)|^{\bar{l}})^{2q}]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[(|X(s) - \bar{Y}(s)| + |X(s-\tau) - \bar{Y}(s-\tau)|)^{2q}]^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq C \int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq u \leq s} |X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q\right) ds + C M_{g(\Delta)}^q \Delta^{\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

进一步, 由条件 (A2') 和引理 3.4 得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} |H_3(u)|\right) &\leq C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_R} M_{g(\Delta)}^{\frac{q}{2}} |\bar{Y}(s) - Y(s)|^{\frac{q}{2}} \\ &\quad \times (|X(s) - \bar{Y}(s)| + |X(s-\tau) - \bar{Y}(s-\tau)|)^{\frac{q}{2}} ds \\ &\leq C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_R} M_{g(\Delta)}^q |\bar{Y}(s) - Y(s)|^q ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} (|X(s) - \bar{Y}(s)|^q + |X(s - \tau) - \bar{Y}(s - \tau)|^q) ds \\
 & \leq C \int_0^t E \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q \right) ds + CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}} + CM_{g(\Delta)}^q \Delta^{\frac{q}{2}}.
 \end{aligned}$$

类似地, 由条件 (A2')、(2.5) 和引理 3.4 可得

$$\begin{aligned}
 E \left(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} |H_4(u)| \right) & \leq CE \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} \Delta^{\frac{q}{2}} |b_\Delta(Y(s), Y(s - \tau))|^{\frac{q}{2}} \\
 & \quad \times |b_\Delta(X(s), X(s - \tau)) - b_\Delta(\bar{Y}(s), \bar{Y}(s - \tau))|^{\frac{q}{2}} ds \\
 & \leq CE \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^q (1 + |Y(s)| + |Y(s - \tau)|)^q ds \\
 & \quad + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} (|X(s) - \bar{Y}(s)|^q + |X(s - \tau) - \bar{Y}(s - \tau)|^q) ds \\
 & \leq C \int_0^t E \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q \right) ds + CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^q + CM_{g(\Delta)}^q \Delta^{\frac{q}{2}}.
 \end{aligned}$$

另外, 由条件 (A3') 和 BDG 不等式, 从引理 2.1 和 2.6 推知,

$$\begin{aligned}
 E \left(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} |H_5(u)| \right) & \leq \frac{1}{2} E \left(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} |e(u)|^q \right) + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds \\
 & \quad + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} (1 + |X(s)|^{\bar{l}} + |\bar{Y}(s)|^{\bar{l}} + |X(s - \tau)|^{\bar{l}} + |\bar{Y}(s - \tau)|^{\bar{l}})^q \\
 & \quad \times (|X(s) - \bar{Y}(s)| + |X(s - \tau) - \bar{Y}(s - \tau)|)^q ds \\
 & \leq \frac{1}{2} E \left(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} |e(u)|^q \right) + CE \int_0^{t \wedge \nu_R} |e(s)|^q ds \\
 & \quad + C \int_0^{t \wedge \nu_R} E[(1 + |X(s)|^{\bar{l}} + |\bar{Y}(s)|^{\bar{l}} + |X(s - \tau)|^{\bar{l}} + |\bar{Y}(s - \tau)|^{\bar{l}})^{2q}]^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times E[(|X(s) - \bar{Y}(s)| + |X(s - \tau) - \bar{Y}(s - \tau)|)^{2q}]^{\frac{1}{2}} ds \\
 & \leq \frac{1}{2} E \left(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} |e(u)|^q \right) + C \int_0^t E \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q \right) ds \\
 & \quad + CM_{g(\Delta)}^q \Delta^{\frac{q}{2}}.
 \end{aligned}$$

将 $H_1(t)$ 、 $H_2(t)$ 、 $H_3(t)$ 、 $H_4(t)$ 和 $H_5(t)$ 代入 (3.1) 得

$$E \left(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} |e(u)|^q \right) \leq C \int_0^t E \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q \right) ds + CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
 E \left(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} |X(u) - Y(u)|^q \right) & \leq CM_{g(\Delta)}^q \Delta^q + CE \left(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge \nu_R} |e(u)|^q \right) \\
 & \leq C \int_0^t E \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |X(u \wedge \nu_R) - Y(u \wedge \nu_R)|^q \right) ds + CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}.
 \end{aligned}$$

最后利用 Gronwall 不等式得到结论. 证毕. $\square$

定理 3.2 若条件 (A1) 和 (A2')–(A4') 成立, 且存在 $q \leq p$ 和 $q\bar{l} \leq p$ 使得

$$[M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}]^{\frac{-1}{p-q}} \leq g(\Delta),$$

则存在正常数 C 使得

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)|^q \right) \leq CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}} \quad \text{且} \quad \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - \bar{Y}(t)|^q \right) \leq CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}.$$

证明 由 Young 不等式, 对任意 $\eta > 0$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)|^q \right) &= \mathbb{E} \left(\mathbf{I}_{\{\tau_R > T, \rho_R > T\}} \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)|^q \right) \\ &\quad + \frac{q\eta}{\bar{p}} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)|^{\bar{p}} \right) + \frac{\bar{p}-q}{\bar{p}\eta^{\frac{q}{\bar{p}-q}}} \mathbb{P}(\tau_R \leq T \text{ 或 } \rho_R \leq T). \end{aligned}$$

利用引理 2.1 和 2.6 得

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)|^q \right) \leq \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t \wedge \nu_R) - Y(t \wedge \nu_R)|^q \right) + \frac{q\eta C}{\bar{p}} + \frac{2(\bar{p}-q)C}{\bar{p}\eta^{\frac{q}{\bar{p}-q}} R^{\bar{p}}}.$$

选取 $\eta = M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}$ 和 $R = [M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}]^{\frac{-1}{p-q}}$, 注意到

$$R = [M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}]^{\frac{-1}{p-q}} \leq g(\Delta),$$

利用引理 3.5 得到

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)|^q \right) \leq CM_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}}. \quad (3.3)$$

第二部分由 (3.3) 和引理 3.4 可以得到. 证毕. $\square$

例 3.1 下面通过一个例子来说明截断型 theta-EM 算法的收敛率. 考虑 $\mathbb{R}$ 上如下方程:

$$dX(t) = (X(t) - X^3(t) + \sin(X(t - \tau)))dt + |X(t)|^{3/2}dW(t). \quad (3.4)$$

显然, (3.4) 满足条件 (A1) 和 (A2')–(A4'), 其中 $p > 3$, $M_R = 3\sqrt{R}$, $\bar{l} = \frac{1}{2}$. 对 $\epsilon \in (0, 1)$, 定义 $g(\Delta) = \frac{1}{9}\Delta^{-\frac{\epsilon}{2}}$. 显然, 对 $\Delta \rightarrow 0$, 有 $g(\Delta) \rightarrow \infty$, 且当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $M_{g(\Delta)}^4 \Delta = \Delta^{1-\epsilon} \rightarrow 0$. 对 $\epsilon \leq \frac{2}{3}$, 选取 $q = 4$ 和 $p = 5$ 使得 $(M_{g(\Delta)}^{2q} \Delta^{\frac{q}{2}})^{\frac{-1}{p-q}} = \Delta^{\epsilon-1} \leq \frac{1}{9}\Delta^{-\frac{\epsilon}{2}} = g(\Delta)$. 因此, 由定理 3.2 可知,

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)|^4 \right) \leq C\Delta^{2(1-\epsilon)}.$$

致谢 感谢审稿人对本文工作提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Maruyama G. Continuous Markov processes and stochastic equations. Rend Circ Mat Palermo (2), 1955, 4: 48–90
- 2 Kloeden P E, Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1992
- 3 Higham D J, Mao X, Stuart A M. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations. SIAM J Numer Anal, 2002, 40: 1041–1063
- 4 Bao J, Yuan C. Convergence rate of EM scheme for SDDEs. Proc Amer Math Soc, 2013, 141: 3231–3243

- 5 Menoukeu Pamen O, Taguchi D. Strong rate of convergence for the Euler-Maruyama approximation of SDEs with Hölder continuous drift coefficient. *Stochastic Process Appl*, 2017, 127: 2542–2559
- 6 Higham D J, Mao X, Stuart A M. Exponential mean-square stability of numerical solutions to stochastic differential equations. *LMS J Comput Math*, 2003, 6: 297–313
- 7 Liu W, Mao X. Almost sure stability of the Euler-Maruyama method with random variable stepsize for stochastic differential equations. *Numer Algorithms*, 2017, 74: 573–592
- 8 Hutzenhaler M, Jentzen A, Kloeden P E. Strong and weak divergence in finite time of Euler’s method for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 2011, 467: 1563–1576
- 9 Hutzenhaler M, Jentzen A, Kloeden P E. Strong convergence of an explicit numerical method for SDEs with nonglobally Lipschitz continuous coefficients. *Ann Appl Probab*, 2012, 22: 1611–1641
- 10 Mao X. The truncated Euler-Maruyama method for stochastic differential equations. *J Comput Appl Math*, 2015, 290: 370–384
- 11 Mao X. Convergence rates of the truncated Euler-Maruyama method for stochastic differential equations. *J Comput Appl Math*, 2016, 296: 362–375
- 12 Lan G, Xia F. Strong convergence rates of modified truncated EM method for stochastic differential equations. *J Comput Appl Math*, 2018, 334: 1–17
- 13 Hu L, Li X, Mao X. Convergence rate and stability of the truncated Euler-Maruyama method for stochastic differential equations. *J Comput Appl Math*, 2018, 337: 274–289
- 14 Guo Q, Liu W, Mao X, et al. The truncated Milstein method for stochastic differential equations with commutative noise. *J Comput Appl Math*, 2018, 338: 298–310
- 15 Guo Q, Liu W, Mao X, et al. The partially truncated Euler-Maruyama method and its stability and boundedness. *Appl Numer Math*, 2017, 115: 235–251
- 16 Guo Q, Mao X, Yue R. The truncated Euler-Maruyama method for stochastic differential delay equations. *Numer Algorithms*, 2018, 78: 599–624
- 17 Guo Q, Liu W, Mao X. A note on the partially truncated Euler-Maruyama method. *Appl Numer Math*, 2018, 130: 157–170
- 18 Zhang W, Song M H, Liu M Z. Strong convergence of the truncated Euler-Maruyama method for stochastic functional differential equations. *Int J Comput Math*, 2018, 95: 2363–2387
- 19 Mao X, Shen Y, Gray A. Almost sure exponential stability of backward Euler-Maruyama discretizations for hybrid stochastic differential equations. *J Comput Appl Math*, 2011, 235: 1213–1226
- 20 Foroush Bastani A, Tahmasebi M. Strong convergence of split-step backward Euler method for stochastic differential equations with non-smooth drift. *J Comput Appl Math*, 2012, 236: 1903–1918
- 21 Mao X, Szpruch L. Strong convergence and stability of implicit numerical methods for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients. *J Comput Appl Math*, 2013, 238: 14–28
- 22 Zeidler E. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II*. New York: Springer-Verlag, 1990
- 23 Tan L. Almost sure convergence rate of theta-EM scheme for neutral SDDEs. *J Comput Appl Math*, 2018, 342: 25–36

Convergence rates of truncated theta-EM scheme for SDDEs

Li Tan & Chenggui Yuan

Abstract This paper is concerned with strong convergence of a truncated theta-EM (Euler-Maruyama) scheme for stochastic differential delay equations (SDDEs). Based on the truncated EM scheme, we generalize it to a truncated theta-EM scheme and discuss strong convergence rate for stochastic differential delay equations under local Lipschitz condition.

Keywords stochastic differential delay equations, truncated theta-EM scheme, local Lipschitz condition, strong convergence

MSC(2010) 65C30, 65L20

doi: 10.1360/N012018-00246