中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 12 期: 1891～1908
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

无穷矩阵方法、(op) 型空间、不变性及泛线性分析

献给吴从炘教授 85 华诞

武俊德[1*], 钟书慧[2]

1. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310027;
2. 天津大学数学学院, 天津 300350
E-mail: wjd@zju.edu.cn, shuhuizhong@126.com

收稿日期: 2020-06-15; 接受日期: 2020-08-24; 网络出版日期: 2020-12-10; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10471124 和 11126165) 资助项目

摘要 本文概述泛函空间理论的研究工作, 包括无穷矩阵方法、(op) 型空间的刻画、不变性、非线性开映射定理、非线性闭图像定理、泛线性等度连续定理、泛线性对偶理论和泛线性广义函数理论等.

关键词 无穷矩阵方法 拓扑向量空间 泛对偶理论 泛广义函数理论

MSC (2010) 主题分类 46A03

1 无穷矩阵收敛定理与一致收敛原理

20 世纪 50 年代末, Mikusinski 和 Sikorski [1,2] 建立了一个分布的序列理论. 为了证明该理论与 Schwartz [3] 基于泛函分析的分布论等价, Mikusinski 注意到有必要发展一个非拓扑方法去取代泛函分析中广泛应用的 Baire 纲方法. Mikusinski 提出了一个取值于 Banach 空间的无穷矩阵对角定理 [4], 该定理就是要寻找的工具. 20 世纪 80 年代, Antosik 证明了一个新的无穷矩阵对角定理. 自从 Antosik 定理出现以来, 无穷矩阵方法取得了巨大进展. Antosik 和 Swartz [5]、Swartz [6] 系统地应用该定理处理了测度论和泛函分析中的一系列问题. 现在, 称这个定理为 Antosik-Mikusinski 定理, 它陈述为: 设 (G,τ) 是一个 Abel 拓扑群, 对 $i,j\in\mathbb{N}$, $x_{ij}\in G$. 如果

(1) 对每个 $j\in\mathbb{N}$, $\lim_i x_{ij}=x_j$ 存在;

(2) 对每个严格递增的正整数序列 $\{m_j\}$, 存在一个子序列 $\{n_j\}$ 使得 $\{\sum_j x_{in_j}\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个 τ-Cauchy 序列,

那么 $\lim_i x_{ij}=x_j$ 关于 $j\in\mathbb{N}$ 一致成立. 特别地, $\lim_i x_{ii}=0$.

英文引用格式: Wu J D, Zhong S H. Infinite matrix method, (op) type space, invariance and demi-linear analysis (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1891–1908, doi: 10.1360/SSM-2020-0194

© 2020《中国科学》杂志社

但是, 当人们研究具有符号 - 弱滑脊性序列空间的 β- 对偶空间的弱序列完备性时, Antosik-Mikusinski 定理不再适用. 为此, Stuart [7,8] 证明了如下的符号 Antosik-Mikusinski 定理和等距 Antosik-Mikusinski 定理:

符号 Antosik-Mikusinski 定理 设 (G,τ) 是一个 Abel 拓扑群, 对 $i,j\in\mathbb{N}$, $x_{ij}\in G$. 如果

(1) 对每个 $j\in\mathbb{N}$, $\lim_i x_{ij}=x_j$ 存在;

(2) 对每个严格递增的正整数序列 $\{m_j\}$, 存在一个子序列 $\{n_j\}$ 和一个符号序列 $\{\theta_j\}\subseteq\{1,-1\}$ 使得 $\{\sum_{j=1}^{\infty}\theta_j x_{in_j}\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个 τ-Cauchy 序列,

那么 $\lim_i x_{ij}=x_j$ 关于 $j\in\mathbb{N}$ 一致成立. 特别地, $\lim_i x_{ii}=0$.

设 G 是一个 Abel 群. G 上的一个函数 P 称为是一个拟范, 如果对任何 $x,y\in G$, $P(0)=0$, $P(-x)=P(x)$ 并且 $P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$. 如果 (G,τ) 是一个 Abel 拓扑群, 那么拓扑 τ 能由 G 上的一族拟范所生成 [9].

设 (G,P) 是一个 Abel 拟范群. 称 $s:(G,P)\to(G,P)$ 是一个可加等距, 如果对任何 $x,y\in G$, 有 $s(x+y)=s(x)+s(y)$, 并且 $P(s(x))=P(x)$.

等距 Antosik-Mikusinski 定理 设 (G,P) 是一个 Abel 拟范群, 对 $i,j\in\mathbb{N}$, $x_{ij}\in G$. 如果

(1) 对每个 $j\in\mathbb{N}$, $\lim_i x_{ij}=x_j$ 存在;

(2) 对每个严格递增的正整数序列 $\{m_j\}$, 存在一个子序列 $\{n_j\}$ 和一个可加等距序列 $\{s_j\}:(G,P)\to(G,P)$ 使得 $\{\sum_{j=1}^{\infty}s_j(x_{in_j})\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个 P-Cauchy 序列,

那么 $\lim_i x_{ij}=x_j$ 关于 $j\in\mathbb{N}$ 一致成立. 特别地, $\lim_i x_{ii}=0$.

文献 [6–8,10,11] 给出了符号 Antosik-Mikusinski 定理和等距 Antosik-Mikusinski 定理一些有趣的应用.

设 Ω 是一个非空集, (G,P) 是一个 Abel 拟范群, $\mathcal{F}$ 是一族定义在 Ω 上取值于 (G,P) 的函数. 称 $\mathcal{F}$ 中函数列 $\{f_k\}$ 是关于 $\mathcal{F}$ 逐点等距 $\mathcal{K}$- 收敛的, 如果对 $\{f_k\}$ 的每个子列 $\{f_{m_k}\}$, 存在 $\{f_{m_k}\}$ 的一个子列 $\{f_{n_k}\}$、一列可加等距 $\{s_k\}$ 和一个函数 $f\in\mathcal{F}$ 使得对每个 $t\in\Omega$, $\sum_{k=1}^{\infty}s_k(f_{n_k}(t))=f(t)$.

如果 (G,τ) 是一个 Abel 拓扑群, $\mathcal{F}$ 是一族定义在 Ω 上取值于 (G,P) 的函数. 称 $\mathcal{F}$ 中函数列 $\{f_k\}$ 关于 $\mathcal{F}$ 逐点符号 $\mathcal{K}$- 收敛, 如果对 $\{f_k\}$ 的每个子列 $\{f_{m_k}\}$, 存在 $\{f_{m_k}\}$ 的一个子列 $\{f_{n_k}\}$、一列符号序列 $\{\theta_k\}\subseteq\{1,-1\}$ 和一个函数 $f\in\mathcal{F}$ 使得对每个 $t\in\Omega$, $\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k f_{n_k}(t)=f(t)$.

称 $B\subseteq\Omega$ 是 $\mathcal{F}$ 序列条件紧集, 如果对每个序列 $\{t_j\}\subseteq B$, 存在 $\{t_j\}$ 的一个子列 $\{t_{n_j}\}$, 使得对每个 $f\in\mathcal{F}$, $\lim_j f(t_{n_j})$ 存在.

设 (Ω,τ_1) 是一个 Hausdorff 拓扑空间. 记 $C_G(\Omega)$ 是连续函数 $f:(\Omega,\tau_1)\to(G,P)$ 全体.

Swartz [6] 证明了下面的一致收敛原理:

一致收敛原理 I 设 (Ω,τ_1) 是一个序列紧 Hausdorff 拓扑空间, (G,τ) 是一个 Abel 拓扑群, $\mathcal{F}\subseteq C_G(\Omega)$. 如果 $\{f_j\}$ 关于 $\mathcal{F}$ 逐点 $\mathcal{K}$- 收敛, 那么 $\{f_j\}$ 在 Ω 上一致收敛于 0.

一致收敛原理 II 设 (Ω,τ_1) 是一个紧 Hausdorff 拓扑空间, (G,P) 是一个 Abel 拟范群, $\mathcal{F}=C_G(\Omega)$. 如果 $\{f_j\}$ 关于 $\mathcal{F}$ 逐点 $\mathcal{K}$- 收敛, 那么 $\{f_j\}$ 在 Ω 上一致收敛于 0.

一致收敛原理 III 设 Ω 是一个非空集, (G,P) 是一个 Abel 拟范群, $\mathcal{F}$ 是一族定义在 Ω 上取值于 (G,P) 的函数, Ω 是 $\mathcal{F}$ 序列条件紧集. 如果 $\{f_j\}$ 关于 $\mathcal{F}$ 逐点 $\mathcal{K}$- 收敛, 那么 $\{f_j\}$ 在 Ω 上一致收敛于 0.

Li [12] 建立了一个比一致收敛原理 I 强的收敛原理. 应用该收敛原理, Li 等 [13] 研究了一类无穷矩阵的求和问题. Qu 和 Wu [14] 指出了 Li 等的一致收敛原理等价于 Antosik-Mikusinski 无穷矩阵收敛定理.

Wu 等[15] 证明了下面定理:

定理 1.1 设 (G,P) 是一个 Abel 拟范群. 下列陈述等价并且都成立:

(I) 如果对 $i,j\in\mathbb{N}$, $z_{ij}\in G$, 并且

(1) $\lim_i z_{ij}=0$ 对每个 $j\in\mathbb{N}$ 成立;

(2) 对每个严格递增的正整数序列 $\{m_j\}$, 存在 $\{m_j\}$ 的一个子序列 $\{n_j\}$ 和一列可加等距 $\{s_j\}:(G,P)\to(G,P)$ 使得 $\lim_i\sum_{j=1}^{\infty}s_j(z_{in_j})=0$,
那么 $\lim_i z_{ii}=0$.

(II) (等距 Antosik-Mikusinski 定理) 如果对 $i,j\in\mathbb{N}$, $x_{ij}\in G$, 并且

(3) $\lim_i x_{ij}=x_j$ 对每个 $j\in\mathbb{N}$ 存在;

(4) 对每个严格递增的正整数序列 $\{m_j\}$, 存在 $\{m_j\}$ 的一个子序列 $\{n_j\}$ 和一列可加等距 $\{s_j\}:(G,P)\to(G,P)$ 使得 $\{\sum_{j=1}^{\infty}s_j(x_{in_j})\}_{i=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列,
那么 $\lim_i x_{ij}=x_j$ 关于 $j\in\mathbb{N}$ 一致成立. 特别地, $\lim_i x_{ii}=0$.

(III) 设 Ω 是一个非空集, (G,P) 是一个 Abel 拟范群, $\mathcal{F}$ 是一族定义在 Ω 上取值于 (G,P) 的函数. 如果 $\mathcal{F}$ 中函数列 $\{f_k\}$ 关于 $\mathcal{F}$ 逐点等距 $\mathcal{K}$- 收敛, 并且 Ω 是 $\mathcal{F}$ 序列条件紧集, 那么 $\{f_i\}$ 在 Ω 上一致收敛于 0.

(IV) 设 (Ω,τ_1) 是一个序列紧 Hausdorff 拓扑空间, (G,P) 是一个 Abel 拟范群, $\mathcal{F}\subseteq C_G(\Omega)$. 如果 $\mathcal{F}$ 中函数列 $\{f_j\}$ 关于 $\mathcal{F}$ 逐点等距 $\mathcal{K}$- 收敛, 那么 $\{f_j\}$ 在 Ω 上一致收敛于 0.

(V) 设 (Ω,τ_1) 是一个可数紧 Hausdorff 拓扑空间, (G,P) 是一个 Abel 拟范群, $\mathcal{F}\subseteq C_G(\Omega)$. 如果 $\mathcal{F}$ 中函数列 $\{f_j\}$ 关于 $\mathcal{F}$ 逐点等距 $\mathcal{K}$- 收敛, 那么 $\{f_j\}$ 在 Ω 上一致收敛于 0.

(VI) 设 (Ω,τ_1) 是一个紧 Hausdorff 拓扑空间, (G,P) 是一个 Abel 拟范群, $\mathcal{F}\subseteq C_G(\Omega)$. 如果 $\mathcal{F}$ 中函数列 $\{f_j\}$ 关于 $\mathcal{F}$ 逐点等距 $\mathcal{K}$- 收敛, 那么 $\{f_j\}$ 在 Ω 上一致收敛于 0.

由于 Abel 拓扑群的拓扑可由一族拟范生成, 所以可以得到 Antosik-Mikusinski 定理和符号 Antosik-Mikusinski 定理的等价形式.

定理 1.1 表明, 20 世纪 70 年代的 Thomas 定理[16] 非常接近于 80 年代的 Antosik-Mikusinski 定理.

2 不含 c_0 的局部凸空间

有的 Banach 空间 X 具有性质 (a_0): 凡有界线性算子 $T:c_0\to X$ 都是紧算子. 这类空间中已知的有 l_p, $1\leqslant p<\infty$. 若把 c_0 换成 c 而称为性质 (a), 则序列弱完备的 Banach 空间具有性质 (a), 从而也具有性质 (a_0). 现在研究一类重要的局部凸空间如下:

定义 2.1[17] 若一个 Banach 空间不含有与 c_0 拓扑同构的子空间, 那么称它为 (op) 型空间.

Jiang 和 Zou[17] 研究了 (op) 型空间的一些有趣性质和它上的谱型算子. (op) 型空间是谱型算子理论中, 许多人关心的事实得以成立的最佳可能空间 (参见文献 [17]). 因此给出这类空间的刻画是空间理论研究的一个重要问题. Li 从 20 世纪 80 年代开始, 对这类空间给出了一系列鲜明的刻画 (参见文献 [18–20]). 现在介绍 Li 给出的刻画.

设 X 是一个 Banach 空间, X^* 是 X 的对偶空间. 由 Alaoglu 定理知, X^* 的闭单位球 U_{X^*} 依 X^* 上弱 $*$ 拓扑的相对拓扑构成紧 Hausdorff 空间. 对 $x\in X$, 记 $x(x^*)=x^*(x)$, $\forall x^*\in U_{X^*}$, 则映射 $x\to x(\cdot)$ 是从 X 到 $C(U_{X^*})$ 的等距同构嵌入. 所以, 对 $x,y\in X$, 可令 $x=x(\cdot)$, $xy=x(\cdot)y(\cdot)$, $\overline{x}=\overline{x(\cdot)}$,

再令 $\{\overline{X}=\overline{x}:x\in X\}$, e 是代数 $C(U_{X^*})$ 的乘法单位.

引理 2.1 如下形式的多项式在 $C(U_{X^*})$ 中稠:

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}+\cdots+z_1^{r_1}z_2^{r_2}\cdots z_m^{r_m}+te, \tag{2.1}$$

式中的加项为有限个, $x_i,z_j\in X\cup\overline{X}$, a_i 和 r_j 是正整数, t 是复数.

证明 两 (2.1) 型多项式的和显然是 (2.1) 型多项式. 对复数 λ, 若 $x\in X$, 则 $\lambda x\in X$; 若 $x=\overline{y}\in\overline{X}$, 则 $\lambda x=\lambda\overline{y}=\lambda\overline{y(\cdot)}=\overline{\overline{\lambda}y(\cdot)}=\overline{\overline{\lambda}y}\in\overline{X}$. 所以, 由 $\lambda(x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k})=(\lambda x_1)^1x_1^{a_1-1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}$ 易知 (2.1) 型多项式乘以标量仍得 (2.1) 型多项式, 从而可知两 (2.1) 型多项式的积仍是 (2.1) 型多项式.

令 $A=\{f\in C(U_{X^*}):$ 有一串 (2.1) 型多项式收敛到 $f\}$. 设 $f_n\in A$, $f_n\to f$. 对 f_n, 有 (2.1) 型多项式 p_n, 使得 $\|f_n-p_n\|<\frac{1}{n}$, 从而, $\|f-p_n\|\leqslant\|f-f_n\|+\frac{1}{n}\to 0$, 所以, A 闭于 $C(U_{X^*})$.

再设 $f,g\in A$, λ 是复数. 取 (2.1) 型多项式序列 $\{p_n\}$ 和 $\{Q_n\}$, 使得 $p_n\to f$, $Q_n\to g$. 于是由

$$\|f+\lambda g-(p_n+\lambda Q_n)\|\leqslant\|f-p_n\|+|\lambda|\|g-Q_n\|\to 0$$

知 $f+\lambda g\in A$. 注意 $\|g-Q_n\|\to 0\Rightarrow\|Q_n\|\to\|g\|$, 从而不妨认为 $\|Q_n\|\leqslant\|g\|+1$, $n=1,2,\ldots$, 有

$$\begin{aligned}\|fg-p_nQ_n\|&=\sup_{x^*\in U_{X^*}}|f(x^*)g(x*)-p_n(x^*)Q_n(x^*)|\\&\leqslant\sup_{x^*\in U_{X^*}}\{|f(x^*)g(x*)-f(x^*)Q_n(x^*)|+|f(x^*)Q_n(x^*)-p_n(x^*)Q_n(x^*)|\}\\&\leqslant\|f\|\|g-Q_n\|+(\|g\|+1)\|f-p_n\|\to 0,\end{aligned}$$

所以 $fg\in A$. 至此已证得 A 是 $C(U_{X^*})$ 的闭子代数, 并且 $e\in A$, $X\subseteq A$.

易知 (2.1) 型多项式的复数共轭仍是 (2.1) 型多项式, 所以由等式

$$\|\overline{f}-\overline{p_n}\|=\sup_{U_{X^*}}|\overline{f(\cdot)}-\overline{p_n(\cdot)}|=\sup_{U_{X^*}}|f(\cdot)-p_n(\cdot)|=\|f-p_n\|$$

易知 $f\in A\Rightarrow\overline{f}\in A$. 又若 $x^*,y^*\in U_{x^*}$, 则有 $x\in X\subseteq A$ 使得 $x(x^*)\neq x(y^*)$ (当$x^*\neq y^*$ 时). 于是由 Stone-Weierstrass 定理使得 $A=C(U_{X^*})$. 证毕. □

所得引理有一些重要应用, 其中本文需要的是下面的引理:

引理 2.2 X 是可分空间, $\{u_n\}$ 于 X 中稠. 于是 $C(U_{X^*})$ 也可分, 并且如下形式的多项式全体是 $C(U_{X^*})$ 中的可数稠密集:

$$a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_k^{a_k}+\cdots+C_1^{r_1}C_2^{r_2}\cdots C_m^{r_m}+\lambda e, \tag{2.2}$$

式中的加项为有限个, $a_i,C_j\in\{u_n\}\cup\{\overline{u_n}\}$, a_i 和 r_j 是正整数, 复数 λ 的实部和虚部都是有理数.

证明 若对 $x\in X$ 有 $u_{n_k}\to x$, 则因 $\|\overline{x}-\overline{u_{n_k}}\|=\|x-u_{n_k}\|$, 故有 $\overline{u_{n_k}}\to\overline{x}$. 又对 $x,y\in X\cup\overline{X}$, 若 $\{u_n\}$ 或 $\{\overline{u_n}\}$ 的子列 $\{\nu_n\}$ 和 $\{\omega_n\}$ 分别收敛于 x 和 y, 则通过类似前面的计算可知 $\|xy-\nu_n\omega_n\|\to 0$. 于是注意 (2.1) 型多项式里只出现有限多个文字, 可知 (2.1) 型多项式可用 (2.2) 型多项式序列逼近. 由引理 2.1 知, (2.2) 型多项式于 $C(U_{X^*})$ 中稠.

现在令

$$D=\bigcup_{n=0}^{\infty}(D_n\cup\overline{D_n}),$$

其中 D_0 是复平面上有理坐标点全体, $\overline{D_0}=\phi$; $D_n=\{u_n,u_n,\ldots\}$ 和 $\overline{D_n}=\{\overline{u_n},\overline{u_n},\ldots\}$ 是常值序列, $n=1,2,\ldots$

D 是一列可数集的并, 因而也是可数集. 但 (2.2) 型多项式全体的势显然不大于集

$$F\cup(F\times F)\cup(F\times F\times F)\cup\cdots$$

的势, 其中 F 是 D 的有穷子集全体. 于是易知 (2.2) 型多项式的全体可数. 证毕. □

引理 2.3 X 是 Banach 空间, $\widetilde{T}:C(U_{c_0})\to X$ 是弱紧算子. 于是, $\widetilde{T}$ 在 c_0 上的限制 $T=\widetilde{T}\mid c_0$ 是紧算子.

证明 因 $c_0^*=l_1$, 所以, c_0 是 $C(U_{l_1})$ 的闭线性子空间, 再由 $\widetilde{T}$ 的弱紧性知 T 将 c_0 的有界集映成 X 的弱列紧集, 所以 T 是弱紧的. 由熟知的 Gelfand 定理知, T^* 也是弱紧的, 从而将 X^* 的有界集映成 $c_0^*=l_1$ 中的弱列紧集, 但 l_1 中强列收敛与弱列收敛一致, 所以, $T^*U_{X^*}$ 的强闭包是紧集. 这说明 T^* 是紧算子. 于是由 Schauder 定理知 T 是紧算子. 证毕. □

定理 2.1 Banach 空间 X 是 (op) 型空间当且仅当每个有界线性算子 $T:c_0\to X$ 都是紧算子.

证明 c_0 是 $C(U_{l_1})$ 的可分闭线性子空间. 由引理 2.2 知, $C(U_{l_1})$ 可分. 再由 Sobczyk 定理 [21] 有射影算子 $P:C(U_{l_1})\to c_0$ 使得 $PC(Ul_1)=c_0$ 且 $\|P\|\leqslant 2$.

今设 X 不含 c_0, $T:c_0\to X$ 是任一有界线性算子. 若令 $\widetilde{T}=T\circ P$, 则 $\widetilde{T}:C(U_{l_1})\to X$ 是有界线性算子, 从而由 Pelczynski-Rosenthal 定理 [22,23] 可知 $\widetilde{T}$ 是弱紧的. 于是, 注意 $\widetilde{T}\mid c_0=T$, 由引理 2.3 得知 T 是紧算子.

次设 X 含有拓扑同构于 c_0 的子空间 Y, $T:c_0\to Y$ 是拓扑同构映射. 于是, T 是一对一的有界线性算子并且 $T^{-1}:Y\to c_0$ 也是有界线性算子 [24]. 令 $\{e_n\}$ 是 c_0 的单位向量基底, 是有界序列: $\|e_n\|=1$, $n=1,2,\ldots$ 若 T 是紧算子, 则 $\{Te_n\}$ 有收敛子列 $\{Te_{n_k}\}$ 是 Cauchy 序列, 从而 $\{e_{n_k}\}=\{T^{-1}(Te_{n_k})\}$ 也是 Cauchy 序列:

$$\|e_{n_l}-e_{n_m}\|=\|T^{-1}(Te_{n_l}-Te_{n_m})\|\leqslant\|T^{-1}\|\|Te_{n_l}-Te_{n_m}\|\to 0\quad(m,l\to\infty).$$

这与 $\|e_{n_l}-e_{n_m}\|=1\,(l\neq m)$ 矛盾. 于是有界线性算子便不是紧算子 $T:c_0\to X\,(Tc_0=Y)$. 证毕. □

Bu [25] 进一步研究了这类空间.

3 全程不变性

设 $[X,Y]$ 是一个对偶对, X 上的局部凸拓扑 T 是 X 上关于对偶对 $[X,Y]$ 的相容拓扑. 相容拓扑中最弱者为 $\sigma(X,Y)$, 而最强者为 Mackey 拓扑 $\tau(X,Y)$. 设 A 是 Y 中的一族 $\sigma(Y,X)$ 有界集, 如果在 A 中集上一致收敛的拓扑 T_A 使得 $\sigma(X,Y)\subseteq T_A$, 那么称 T_A 是 X 上关于对偶对 $[X,Y]$ 的可允许极拓扑. 可允许极拓扑中最弱者为 $\sigma(X,Y)$, 最强者为 $\beta(X,Y)$. 一般地, $\sigma(X,Y)\subseteq\tau(X,Y)\subseteq\beta(X,Y)$.

若某种性质 P 对某个可允许极拓扑成立蕴涵 P 关于所有其他可允许极拓扑都成立, 则称该性质为可允许极拓扑全体上的不变性, 简称为全程不变性; 若某性质 P 的不变范围只是由弱拓扑 $\sigma(X,Y)$ 到 Mackey 拓扑 $\tau(X,Y)$, 则称 P 为对偶不变性. 关于对偶不变性的研究已有许多重要的结果, 是泛函分析空间理论的核心内容之一. 而最引人关注的重要问题是寻找非平凡的全程不变性.

设 ω 是所有数值序列空间. 一个非零序列 $\{z^{(n)}\} \in \omega$ 称为是一个块序列, 如果存在一个严格递增的正整数序列 $\{k_n\}$, 使得 $k_0 = 0$ 并且

$$z^{(n)} = (0, 0, \ldots, 0, z^{(n)}_{k_{n-1}+1}, \ldots, z^{(n)}_{k_n}, 0, \ldots).$$

一个标量值序列空间 λ 称为有符号 - 弱滑脊性, 如果给定 $t = (t_i) \in \lambda$ 和任何块序列 $\{t^{(k)}\}$, 使得在逐点和的意义下有 $t = \sum_{k=1}^{\infty} t^{(k)}$, 并且对每个指标序列 $\{m_k\}$, 有一个子列 $\{n_k\}$ 和符号序列 $\{s_k\}$, 其中 $s_k = 1$ 或 $s_k = -1$ $(k \in \mathbb{N})$, 使得在逐点和的意义下有 $\tilde{t} = \sum_{k=1}^{\infty} s_k t^{(n_k)} \in \lambda$ (参见文献 [26]).

设 m_0 是所有如下序列 $x = (x_i)$, 其中 $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是一个有限集 [27].

一个标量值序列空间 λ 称为是单调的, 如果对每个 $x \in m_0$ 和 $y \in \lambda$, $x \cdot y = (x_i y_i) \in \lambda$. 显然, 每个单调序列空间都有符号 - 弱滑脊性, 反之不然 [26].

(X, τ_1) 中级数 $\sum_i x_i$ 称为是子级数 τ_1- 收敛, 如果对每个严格递增的正整数序列 $\{n_i\}$, 级数 $\sum_i x_{n_i}$ 都是 τ_1- 收敛.

(X, τ_1) 中级数 $\sum_i x_i$ 称为是 λ- 数乘 τ_1- 收敛, 如果对每个 $t = (t_i) \in \lambda$, 级数 $\sum_i t_i x_i$ 都是 τ_1- 收敛.

熟知的 c_0- 数乘收敛、l^∞- 数乘收敛和 l^p- 数乘收敛 $(1 \leqslant p)$ 等在泛函分析与向量测度理论中有重要应用. 早在 20 世纪 50 年代开始, Bessaga 和 Pełczyński [28] 及 Schwartz [29] 对此进行过详细研究. 著名的 Orlicz-Pettis 定理表明子级数收敛性具有对偶不变性 [30, 31].

1998 年, Li 等 [32] 证明了如下重要结论: 如果 $\lambda = c_0$ 或 $\lambda = l^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, 那么 λ- 数乘级数的收敛性具有全程不变性.

随后不久, Wu 和 Li [33] 用无穷矩阵方法证明了, 如果 $0 < p < 1$, 那么 l^p- 数乘级数的收敛性也具有全程不变性. 进一步地, Wu 等 [34] 给出了 λ- 数乘级数的收敛性具有全程不变性的刻画.

设 c_{00} 是仅有有限个非零坐标的标量序列全体. 序列空间 λ 的 β- 对偶空间定义为 $\lambda^\beta = \{u = (u_i) \in \omega : \sum_i u_i t_i$ 对每个 $(t_i) \in \lambda$ 收敛$\}$. 如果 $c_{00} \subseteq \lambda$, 那么 λ 和 λ^β 关于双线性泛函 $\langle t, u \rangle = \sum_i u_i t_i$ $(t = (t_i) \in \lambda,\ u = (u_i) \in \lambda^\beta)$ 是一个分离的对偶对. λ 关于这个对偶对的弱拓扑记为 $\sigma(\lambda, \lambda^\beta)$. 相似地, 我们能记 λ^β 关于这个对偶对的弱拓扑.

称 ω 中序列 $\{t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 坐标收敛于 $t^{(0)} \in \omega$, 如果对每个 $i \in \mathbb{N}$, $\{t_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $t_i^{(0)}$.

引理 3.1 设 $c_{00} \subseteq \lambda$ 和 $M \subseteq \lambda^\beta$. 下列陈述等价:

(1) M 是 $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)$- 紧集;

(2) M 是 $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)$- 序列紧集;

(3) M 是 $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)$- 有界集, 并对 ω 中的序列 $\{t^{(n)}\} \subseteq M$, 如果该序列坐标收敛到 $t^{(0)} \in \lambda$, 那么 $\{t^{(n)}\}$ 关于拓扑 $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)$ 一定也收敛到 $t^{(0)}$ 并且 $t^{(0)} \in M$.

设 (X, τ_1) 和 (Y, τ_2) 是 Hausdorff 局部凸空间. 一个算子 $T \in L(X, Y)$ 称为是紧算子, 如果对每个 (X, τ_1) 的有界集 A, $T(A)$ 是 (Y, τ_2) 的相对紧子集. 记 $K(X, Y)$ 是 $L(X, Y)$ 中的所有紧算子全体.

设 WOT (weak operator topology)、SOT (strong operator topology) 和 UOT (uniform convergence operator topology) 是 $K(X, Y)$ 上的弱算子拓扑、强算子拓扑和一致收敛算子拓扑, 也就是说, $\lim_\alpha T_\alpha = 0$ 关于 WOT $\Leftrightarrow$ 对每个 $x \in X$, $y' \in Y^*$, $\lim_\alpha y'(T_\alpha x) = 0$; $\lim_\alpha T_\alpha = 0$ 关于 SOT $\Leftrightarrow$ 对每个 $x \in X$, $\lim_\alpha T_\alpha(x) = 0$; $\lim_\alpha T_\alpha = 0$ 关于 UOT $\Leftrightarrow$ 对 X 的每个有界子集 A, $\lim_\alpha T_\alpha x = 0$ 关于 $x \in A$ 一致成立.

引理 3.2 设 $c_{00} \subseteq \lambda$, λ 有符号 - 弱滑脊性, $A \subseteq \lambda^\beta$ 是 $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)$- 相对紧集, 那么对每个 $t = (t_i) \in \lambda$, 级数 $\sum_i t_i u_i$ 关于 $u = (u_i) \in A$ 一致收敛.

Wu 和 Lu [11] 证明了下面的 λ- 数乘收敛紧算子级数的全程不变性:

定理 3.1 设 (X,τ_1) 和 (Y,τ_2) 是 Hausdorff 局部凸拓扑空间, $Y\neq\{0\}$, $c_{00}\subseteq\lambda$, λ 有符号 - 弱滑脊性, 则 $K(X,Y)$ 中每个 λ- 数乘 WOT- 收敛级数 $\sum_i T_i$ 关于 WOT 和 UOT 之间的所有拓扑都是 λ- 数乘收敛级数的充分必要条件是每个连续线性算子 $T:(X,\tau_1)\to(\lambda^\beta,\sigma(\lambda^\beta,\lambda))$ 是紧算子.

Kalton [35] 证明了下面著名的 Orlicz-Pettis 定理:

设 $(E,\|\cdot\|)$ 和 $(F,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, $(E^*,\|\cdot\|)$ 不拓扑同胚地包含 l^∞. 如果 $K(X,Y)$ 中级数 $\sum_i T_i$ 是子级数 WOT- 收敛, 那么 $\sum_i T_i$ 是范数拓扑子级数收敛.

因为 m_0 是一个单调空间, 所以 m_0 有符号 - 弱滑脊性. 不难证明 $(m_0)^\beta=l^1$. 由著名的 Schur 引理 (参见文献 [36, 定理 1.3.2 和注记 15.2.3]), 有 $(l^1,\sigma(l^1,m_0))$、$(l^1,\sigma(l^1,l^\infty))$ 和 $(l^1,\|\cdot\|)$ 有相同的相对序列紧集, 由引理 3.1 知, $(l^1,\sigma(l^1,m_0))$、$(l^1,\sigma(l^1,l^\infty))$ 和 $(l^1,\|\cdot\|)$ 有相同的相对紧集. 这样, 有下面的定理:

定理 3.2 设 (X,τ_2) 和 (Y,τ_2) 是 Hausdorff 局部凸拓扑空间, $Y\neq\{0\}$, 则 $K(X,Y)$ 中每个 WOT- 子级数收敛的级数 $\sum_i T_i$ 是 UOT- 子级数收敛级数的充分必要条件是每个连续线性算子 $T:(X,\tau_1)\to(l^1,\|\cdot\|)$ 是紧算子.

定理 3.3 设 (X,τ_2) 和 (Y,τ_2) 是 Hausdorff 局部凸拓扑空间, $Y\neq\{0\}$, 则 $K(X,Y)$ 中每个 WOT- 有界数乘收敛级数 $\sum_i T_i$ 是 UOT- 有界数乘收敛级数的充分必要条件是每个连续线性算子 $T:(X,\tau_1)\to(l^1,\|\cdot\|)$ 是紧算子.

Wu 和 Li [37] 证明了, 如果 (X,τ_1) 是一个桶型局部凸空间, 那么 $(X^*,\beta(X^*,X))$ 不拓扑同胚地包含 $(l^\infty,\|\cdot\|)$ 的充分必要条件是每个连续线性算子 $T:(X,\tau_1)\to(l^1,\|\cdot\|)$ 是紧算子. 由这个结论和定理 3.1, 有下面的定理:

定理 3.4 设 (X,τ_2) 和 (Y,τ_2) 是 Hausdorff 局部凸拓扑空间, (X,τ_1) 是一个桶型空间, $Y\neq\{0\}$, 则 $K(X,Y)$ 中每个 WOT- 子级数收敛的级数 $\sum_i T_i$ 是 UOT- 子级数收敛级数充分必要条件是 $(X^*,\beta(X^*,X))$ 不拓扑同胚地包含 $(l^\infty,\|\cdot\|)$.

定理 3.4 表明 Kalton 的 Orlicz-Pettis 定理的逆定理也成立.

4 开映射定理

自从 21 世纪初开始, 李容录和钟书慧等通过弱化空间结构和线性映射的要求, 将开映射定理、闭图像定理和等度连续性定理实质性地提升到了非线性情形, 以此为工具建立了相应的非线性对偶理论, 特别是将著名的 Schwartz 基于对偶理论所建立的分布理论提升到了一大类非线性水平. 这些工作已较完整地发表在文献 [38–45]. 现在介绍这些工作.

经典的开映射定理如下:

Banach 开映射定理 设 X 和 Y 是 Banach 空间. 如果 $f:X\to Y$ 是连续线性满射, 则 f 是开映射. 更一般地, 若 X 和 Y 是 Fréchet 空间, $f:X\to Y$ 是连续线性满射, 则 f 是开映射.

定义 4.1 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Hausdorff 准范空间, Y 是拓扑线性空间.

$(p\ell1)$ 对任意的 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$ 有 $\delta>0$ 使得 $f(x)+f(U_\delta)\subset f(x+U_\varepsilon)$;

$(p\ell2)$ 对任意的 $\delta>0$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 有 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $f(nU_\delta)\subset mf(U_\delta)$;

$(p\ell3)$ 对任意的 $\delta>0$ 有 $\eta(\delta)>0$ 使得 $-f(U_\delta)\subset f(U_{\eta(\delta)})$, 且 $\lim_{\delta\to0}\eta(\delta)=0$.

记 $p\ell(X,Y)=\{f\in Y^X: f(0)=0$ 且 f 满足条件 $(p\ell1)$、$(p\ell2)$ 和 $(p\ell3)\}$.

$(p\ell 4)$ 有常数 $C>0$ 使得对任意的 $\{x_i\}\subset X$, $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|<+\infty$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)$ 收敛, 有 $\{u_i\}\subset X$ 使得 $\|u_i\|\leqslant C\|x_i\|$, $\forall\, i\in\mathbb{N}$, 且 $\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)=f(\sum_{i=1}^{\infty}u_i)$.
进一步, 记 $PL(X,Y)=\{f\in p\ell(X,Y): f$ 满足条件 $(p\ell 4)\}$.

显然, $p\ell(X,Y)$ 包括从 X 到 Y 的所有线性映射. 下面定理指出 $PL(X,Y)$ (X 是 Banach 空间, Y 是拓扑线性空间) 含有很多从 X 到 Y 的非线性映射.

定理 4.1 设 X 是 Banach 空间, Y 是拓扑线性空间. 如果 T 是从 X 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续线性算子且 $f\in PL(\mathbb{R}^n,Y)$, 则 $f\circ T\in PL(X,Y)$. 进而, $PL(X,Y)$ 包含与连续线性算子一样多的非线性映射.

我们给出了不需要线性和连续条件的新的开映射定理:

定理 4.2 设 X 和 Y 是 Fréchet 空间. 如果 $f\in p\ell(X,Y)$ 且是满射, 则 f 是开映射.

对于几乎开的映射, 我们也给出了相应的新开映射定理.

定义 4.2 若映射 $f:X\to Y$ 满足对每个 $U\in\mathcal{N}(X)$ 都有 $\overline{f(U)}\in\mathcal{N}(Y)$, 则称其为在 $0\in X$ 处是几乎开的.

定理 4.3 设 X 和 Y 是可分离的准范空间 (即距离线性空间). 如果 $f:X\to Y$ 满足条件 $(p\ell 1)$ 和 $(p\ell 4)$ 且 f 在 $0\in X$ 处是几乎开的, 则 f 是开映射.

推论 4.1 设 X 和 Y 是可分离的准范空间, 则线性映射 $f:X\to Y$ 是开映射当且仅当 f 满足条件 $(p\ell 4)$ 且 f 在 $0\in X$ 处是几乎开的.

5 闭图像定理

经典的闭图像定理如下:

Banach 闭图像定理 设 X 和 Y 是 Banach 空间. 如果映射 $f:X\to Y$ 是线性的且具有闭图像, 则 f 是连续的. 更一般地, 若 X 和 Y 是 Fréchet 空间, 映射 $f:X\to Y$ 是线性的且具有闭图像, 则 f 是连续的.

定义 5.1 设 X 是线性空间, Y 是拓扑线性空间. 映射 $f:X\to Y$ 被称为是拟线性的, 若对任意的 $x,u,x_n,u_n\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 成立

(1) 若 $f(x_n)\to 0$ 并且 $f(u_n)\to 0$, 则 $f(x_n+u_n)\to 0$;

(2) 若 $f(x_n-x)\to 0$ 并且在数域 $\mathbb{K}$ 中 $t_n\to t$, 则 $f(t_nx_n-tx)\to 0$;

(3) $f(x_n)\to f(u)$ 当且仅当 $f(x_n-u)\to 0$.

记 $ql(X,Y)=\{f:X\to Y\mid f$ 是拟线性的$\}$, 可以看出, 线性算子全体 $\subset ql(X,Y)$. 我们给出了从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的拟线性映射的刻画, 构造了从 l^p 到 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的不是线性的拟线性映射, 特别指出了对于 X 和 Y 是赋范空间, 存在很多从 X 到 Y 的不是线性的拟线性映射.

定理 5.1 一个非零的映射 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是拟线性的当且仅当

(1) $\varphi(0)=0$;

(2) φ 连续且严格单调.

定理 5.2 设 $p\in(0,\infty]$ 且 $(\varphi_n)_n\subset ql(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}t, & t\leqslant 0,\\ 2t, & t>0.\end{cases}$$

定义 $f:\ell^p\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 为

$$f((t_n)_n)=(\varphi_n(t_n))_n,\quad \forall\,(t_n)_n\in\ell^p.$$

显然, f 不是线性的但满足定义 5.1(1)–5.1(3), 所以, $f \in ql(\ell^p, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. 因为 ℓ^p 上的通常拓扑强于坐标收敛拓扑, 所以, 由 φ_n 的连续性知 f 是连续的.

定理 5.3 设 $\varphi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 是严格单调增的连续函数并且满足

$$0 < \mu = \inf_{t \geqslant 0} \varphi(t) \leqslant \sup_{t \geqslant 0} \varphi(t) = M < +\infty.$$

设 X 和 Y 是赋范空间, $T : X \to Y$ 是线性同胚嵌入. 定义 $f : X \to Y$ 为

$$f(x) = \varphi(\|x\|)\, T(x), \quad \forall\, x \in X,$$

则 f 是拟线性的, 并且除了平凡情形, f 都是非线性的.

基于拟线性映射, 有下面的闭图像定理:

定理 5.4 设 X 和 Y 是 Fréchet 空间. 如果映射 $f : X \to Y$ 是拟线性的, 并且 f 具有闭图像, 则 f 是连续的.

进一步地, 我们可以弱化定义 5.1(3), 引入弱拟线性映射:

定义 5.2 设 X 和 Y 是拓扑线性空间. 映射 $f : X \to Y$ 被称为是弱拟线性的, 若对任意的 $x, u, x_n, u_n \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 成立

(1) 若 $f(x_n) \to 0$ 并且 $f(u_n) \to 0$, 则 $f(x_n + u_n) \to 0$;

(2) 若 $f(x_n - x) \to 0$ 并且在数域 $\mathbb{K}$ 中 $t_n \to t$, 则 $f(t_n x_n - tx) \to 0$;

(3′) 若 $x_n - u \to 0$, 则 $f(x_n) \to f(u)$ 当且仅当 $f(x_n - u) \to 0$.

记 $wql(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f$ 是弱拟线性的$\}$. 显然, 线性算子全体 $\subset ql(X, Y) \subset wql(X, Y)$. 我们也给出了从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的弱拟线性映射的刻画, 并指出了存在很多不是线性、甚至不是拟线性的弱拟线性映射.

定理 5.5 一个非零的映射 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是弱拟线性的当且仅当

(1) $\varphi(0) = 0$;

(2) φ 连续, $x \neq 0$ 时 $\varphi(x) \neq 0$, $x_n \to \infty$ 时 $\varphi(x_n) \nrightarrow 0$.

定理 5.6 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是不平凡的准范空间, $\varphi \in wql(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. 定义映射 $f : X \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \varphi(\|x\|), \quad \forall\, x \in X,$$

则 $f \in wql(X, \mathbb{R})$, 即 f 是弱拟线性的. 但除了平凡情形之外, f 不是拟线性的.

定理 5.7 设 $\varphi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 连续并且满足

$$0 < \mu = \inf_{t \geqslant 0} \varphi(t) \leqslant \sup_{t \geqslant 0} \varphi(t) = M < +\infty.$$

设 X 和 Y 是赋范空间, $T : X \to Y$ 是线性同胚嵌入. 定义 $f : X \to Y$ 为

$$f(x) = \varphi(\|x\|)\, T(x), \quad \forall\, x \in X,$$

则 $f \in wql(X, Y)$, 即 $f : X \to Y$ 是弱拟线性的.

定理 5.8 设 X 和 Y 是 Fréchet 空间. 如果映射 $f : X \to Y$ 是弱拟线性的并且具有闭图像, 则 f 是连续的.

定理 5.9 设 $(X, \mathcal{T})$ 和 $(Y, \mathcal{I})$ 是 Fréchet 空间, τ 是 Y 上 Hausdorff 拓扑, 弱于 $\mathcal{I}$. 如果映射 $f : X \to (Y, \mathcal{I})$ 是弱拟线性的并且 $\mathcal{T}$-τ 连续, 则 f 是 $\mathcal{T}$-$\mathcal{I}$ 连续的.

6 等度连续定理

1927 年, Banach 和 Steinhaus[6] 提出了 Banach 空间上的 Banach-Steinhaus 等度连续定理, 随后, 该结果被推广到如下拓扑线性空间上:

等度连续定理 设 X 是第二纲的拓扑线性空间, Y 是拓扑线性空间, $\Gamma \subset L(X,Y)$. 如果对每个 $x \in X$, $\{f(x) : f \in \Gamma\}$ 是有界的, 则 Γ 在 X 上等度连续.

一致有界原理 设 X 是第二纲的拓扑线性空间, Y 是拓扑线性空间, $\Gamma \subset L(X,Y)$. 如果对每个 $x \in X$, $\{f(x) : f \in \Gamma\}$ 是有界的, 则 Γ 在有界集上一致有界.

现在引入泛线性映射和弱泛线性映射, 建立新的等度连续定理和一致有界原理.

设 X 和 Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, 每个线性算子 $T : X \to Y$ 有解剖性质:

$$T(x+tu) = T(x) + tT(u)$$

对所有的 $x, u \in X$ 和 $t \in \mathbb{K}$ 成立. 如果 X 非零并且 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ 是一个非零范数, 那么 $\|\cdot\|$ 非线性但有下面的解剖性质: 如果 $x, u \in X$ 并且 $t \in \mathbb{K}$, 则

$$\|x+tu\| = \|x\| + s\|u\|$$

对某个 $s \in [-|t|, |t|]$ 成立.

进一步地, 很多非线性函数 $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 有某种局部解剖性质, 如

$$f \in \left\{ \sin x, \mathrm{e}^x - 1, \frac{x}{\sqrt{1+|x|}} \right\},$$

那么对每个 $x \in \mathbb{R}$ 和 $u, t \in [-1,1]$, 存在 $r, s \in \mathbb{R}$ 使得 $|r-1| \leqslant 10|t|$, $|s| \leqslant 10|t|$ 并且

$$f(x+tu) = rf(x) + sf(u).$$

定义 6.1 设 $C \geqslant 1$ 并且 $\delta > 0$.

(1) 记 $\mathscr{L}_{C,\delta}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是下面函数全体:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(ii) $f(0) = 0$;

(iii) 对所有的 $x, u, t \in \mathbb{R}$, $|u| \leqslant \delta$, $|t| \leqslant 1$ 存在 $r, s \in \mathbb{R}$ 满足 $|r-1| \leqslant C|t|$, $|s| \leqslant C|t|$ 和

$$f(x+tu) = rf(x) + sf(u).$$

(2) 记 $\mathscr{K}_{C,\delta}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是下面函数全体:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(ii) $f(0) = 0$;

(iii) 对所有的 $x, u, t \in \mathbb{R}$, $|u| \leqslant \delta$, $|t| \leqslant 1$ 存在 $s \in \mathbb{R}$ 使得 $|s| \leqslant C|t|$ 并且

$$f(x+tu) = f(x) + sf(u).$$

显然对所有的 $C \geqslant 1$, $\delta > 0$, 有

$$\text{线性泛函全体} \subset \mathscr{K}_{C,\delta}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}_{C,\delta}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

引理 6.1 每个 $f \in \mathscr{L}_{C,\delta}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是连续的.

证明 如果 $x_n \to x$ 在 $\mathbb{R}$ 中, 那么对充分大的 $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - x|/\delta < 1$ 并且

$$f(x_n) = f\left(x + \frac{x_n - x}{\delta}\delta\right) = r_n f(x) + s_n f(\delta),$$

其中 $|r_n - 1| \leqslant C|x_n - x|/\delta$ 和 $|s_n| \leqslant C|x_n - x|/\delta$. 这样有 $f(x_n) \to f(x)$. 证毕. □

引理 6.2 如果 $f \in \mathscr{L}_{C,\delta}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f \neq 0$, 那么 $f(u) \neq 0$ 对每个 $0 < |u| \leqslant \delta$ 成立.

证明 假设 $0 < |u| \leqslant \delta$ 和 $f(u) = 0$. 对非零 $x \in \mathbb{R}$, 取 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $|x/(nu)| \leqslant 1$, 则

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(n\frac{x}{nu}u\right) = f\left[(n-1)\frac{x}{nu}u + \frac{x}{nu}u\right] \\
&= r_1 f\left[(n-1)\frac{x}{nu}u\right] + s_1 f(u) = r_1 f\left[(n-2)\frac{x}{nu}u + \frac{x}{nu}u\right] \\
&= r_1 r_2 f\left[(n-2)\frac{x}{nu}u\right] = \cdots \\
&= r_1 r_2 \cdots r_{n-1} f\left(\frac{x}{nu}u\right) = r_1 r_2 \cdots r_{n-1} f\left(0 + \frac{x}{nu}u\right) \\
&= r_1 r_2 \cdots r_{n-1} r_n f(0) + r_1 r_2 \cdots r_{n-1} s_n f(u) = 0,
\end{aligned}$$

其中 $|r_i - 1| \leqslant C|x/(nu)|$, $|s_i| \leqslant C|x/(nu)|$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 这样, 对每个 $x \in \mathbb{R}$ 有 $f(x) = 0$. 证毕. □

定理 6.1 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个满足 $f(0) = 0$ 和 $f'(x_0) \neq 0$ (对某个 $x_0 \in \mathbb{R}$) 的函数, 又设 $\delta > 0$, 则 $f \in \mathscr{K}_{C,\delta}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 对某个 $C \geqslant 1$ 成立的充分必要条件是

(1) f 连续;

(2) $f(u) \neq 0$ 对每个 $0 < |u| \leqslant \delta$;

(3) $\inf_{0<|u|\leqslant\delta} |f(u)/u| > 0$;

(4) $\sup_{x,u\in\mathbb{R},\, 0<|u|\leqslant\delta} |(f(x+u) - f(x))/u| < +\infty$.

证明 假设 $f \in \mathscr{K}_{C,\delta}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 其中 $C \geqslant 1$. 由引理 6.1 和 6.2 知, (1) 和 (2) 成立. 由 $\inf_{0<|u|\leqslant\delta} |f(u)/u| = 0$ 知, 存在一列 $\{u_n\} \subset [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$ 使得 $f(u_n)/u_n \to 0$. 不妨假定 $u_n \to u_0 \in [-\delta, \delta]$. 如果 $u_0 \neq 0$, 那么由 (1) 和 (2), 有 $f(u_n)/u_n \to f(u_0)/u_0 \neq 0$. 所以, $u_0 = 0$ 并且 $u_n \to 0$.

因为 $f \in \mathscr{K}_{C,\delta}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 对所有的 $n \in \mathbb{N}$, 有 $f(x_0 + u_n) = f(x_0) + s_n f(u_n)$, 其中 $|s_n| \leqslant C|1| = C$. 这样由 (2) 得

$$\begin{aligned}
f(x_0 + u_n) &= f(x_0) + f(x_0 + u_n) - f(x_0) \\
&= f(x_0) + \frac{[f(x_0 + u_n) - f(x_0)]/u_n}{f(u_n)/u_n} f(u_n),
\end{aligned}$$

但是

$$\frac{f(x_0 + u_n) - f(x_0)}{u_n} \to f'(x_0) \neq 0$$

和 $f(u_n)/u_n \to 0$, 所以,

$$s_n = \frac{[f(x_0 + u_n) - f(x_0)]/u_n}{f(u_n)/u_n} \to \infty.$$

这是一个矛盾, 所以对函数 f, (3) 成立.

设 $x, u \in \mathbb{R}$, $0 < |u| \leqslant \delta$. 因为 $f(u) = f(\frac{u}{\delta}\delta) = sf(\delta)$, 其中 $|s| \leqslant C|u/\delta| = (C/\delta)|u|$ 和 $f(x+u) = f(x) + s_1 f(u)$, 其中 $|s_1| \leqslant C|1| = C$, $|f(u)| \leqslant (C/\delta)|f(\delta)u|$ 和

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\right| = \left|\frac{s_1 f(u)}{u}\right| \leqslant \frac{C^2}{\delta}|f(\delta)|.$$

这样对 f, (4) 成立.

反之, 对 f, 假设 (1)–(4) 成立. 因为 $f(0) = 0$ 和 $\inf_{0<|u|\leqslant\delta}|f(u)/u| = \inf_{0<|u|\leqslant\delta}|(f(0+u)-f(0))/u|$, 所以,

$$C = \frac{\sup_{x,u\in\mathbb{R},\,0<|u|\leqslant\delta}|\frac{f(x+u)-f(x)}{u}|}{\inf_{0<|u|\leqslant\delta}|\frac{f(u)}{u}|} \geqslant 1.$$

那么对 $x, u, t \in \mathbb{R}$, $0 < |u| \leqslant \delta$, $0 < |t| \leqslant 1$, 由 (2) 知, $f(u) \neq 0$ 并且

$$f(x+tu) = f(x) + f(x+tu) - f(x) = f(x) + \left[\frac{f(x+tu)-f(x)}{tu}\frac{u}{f(u)}t\right]f(u),$$

其中

$$\left|\frac{f(x+tu)-f(x)}{tu}\frac{u}{f(u)}t\right| = \left|\frac{\frac{f(x+tu)-f(x)}{tu}}{\frac{f(u)}{u}}\right||t| \leqslant C|t|.$$

这样, $f \in \mathscr{K}_{C,\delta}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. 证毕. □

记 $C(0) = \{\gamma \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} : \lim_{t\to 0}\gamma(t) = \gamma(0) = 0,\ |\gamma(t)| \geqslant |t|, \forall |t| \leqslant 1\}$.

定义 6.2 设 X 和 Y 是拓扑线性空间, 映射 $f : X \to Y$ 被称为是泛线性的, 若 $f(0) = 0$ 且有 $\gamma \in C(0)$ 和 $U \in \mathcal{N}(X)$ 满足: 对任意的 $x \in X$, $u \in U$ 及 $|t| \leqslant 1$, 都有 $r, s \in \mathbb{C}$ 使得

$$f(x+tu) = rf(x) + sf(u), \quad 其中\ |r-1| \leqslant |\gamma(t)|, \quad |s| \leqslant |\gamma(t)|.$$

记 $\mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 为由 $\gamma \in C(0)$ 和 $U \in \mathcal{N}(X)$ 确定的从拓扑线性空间 X 到拓扑线性空间 Y 的泛线性映射全体.

定义 6.3 设 X 是拓扑线性空间, Y 是局部凸空间, Y^* 是 Y 的对偶. 称映射 $f : X \to Y$ 为弱泛线性的, 若 $f(0) = 0$ 且有 $\gamma \in C(0)$ 和 $U \in \mathcal{N}(X)$ 使得 $y' \circ f \in \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,\mathbb{C})$, $\forall y' \in Y^*$.

记 $\mathscr{W}_{\gamma,U}(X,Y) = \{f \in Y^X : f(0) = 0,\ y' \circ f \in \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,\mathbb{C}), \forall y' \in Y^*\}$. 显然, 线性算子族 $\subset \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y) \subset \mathscr{W}_{\gamma,U}(X,Y)$. 我们证明了 $\mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 包含很多非线性映射 (X 是范数空间), 且存在不是泛线性的弱泛线性映射.

定理 6.2 设 X 是不平凡的赋范空间, Y 是不平凡的线性空间, $\gamma(t) = Ct$ $(C > 1)$, $\delta > 0$, $U = \{u \in X : \|u\| \leqslant \delta\}$, 则 $\mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 中非线性映射全体不可数. 特别地, 每个非零线性算子 $T : X \to Y$ 都可产生不可数多的 $\mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 中的非线性映射.

定理 6.3 设 X 和 Y 是拓扑线性空间且 X 是第二纲的, $\Gamma \subset \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 且每个 $f \in \Gamma$ 连续. 若 Γ 是逐点有界的: 如果对每个 $x \in X$, $\{f(x) : f \in \Gamma\}$ 是有界的, 则 Γ 在 X 上等度连续.

定理 6.4 设 X 和 Y 是拓扑线性空间且 X 是第二纲的, $\Gamma \subset \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 且每个 $f \in \Gamma$ 连续. 若 Γ 是逐点有界的, 则 Γ 在有界集上一致有界: 对每个有界集 $B \subset X$, $\{f(x) : f \in \Gamma, x \in B\}$ 有界.

定理 6.5 设 X 和 Y 是拓扑线性空间且 X 是第二纲的, $\{f_n\} \subset \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 是连续映射序列. 若 $\lim_n f_n(x) = f(x)$ 存在, $\forall x \in X$, 则 $f \in \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 并且 f 连续.

由此, 我们还得到了 $\mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 中映射连续与有界等价的结论.

引理 6.3 设 X 和 Y 是拓扑线性空间. 若 $f \in \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 连续, 则 f 有界.

引理 6.4 设 X 和 Y 是拓扑线性空间并且 X 是可度量化的, $f \in \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$, 则 f 连续当且仅当 f 有界.

定理 6.6 设 X 和 Y 是拓扑线性空间并且 X 是第二纲的和可度量化的, $\Gamma \subset \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 是一族有界映射. 若 Γ 逐点有界, 则 Γ 在有界集上一致有界.

基于弱泛线性映射, 我们进一步获得了新的等度连续定理和一致有界原理.

定理 6.7 设 X 是第二纲的拓扑线性空间, Y 是局部凸空间, Y^* 是 Y 的对偶. 若 $\Gamma \subset \mathscr{W}_{\gamma,U}(X,Y)$ 是逐点有界的并且 $y' \circ f : X \to \mathbb{C}$ 连续 ,$\forall y' \in Y^*$, $f \in \Gamma$, 则 Γ 在 X 上等度连续, 特别是每个 $f \in \Gamma$ 连续.

定理 6.8 设 X 是第二纲的拓扑线性空间, Y 是局部凸空间, Y^* 是 Y 的对偶. 若 $\Gamma \subset \mathscr{W}_{\gamma,U}(X,Y)$ 是逐点有界的并且对每个 $y' \in Y^*$ 及 $f \in \Gamma$, $y' \circ f : X \to \mathbb{C}$ 连续, 则 Γ 在有界集上一致有界.

定理 6.9 设 X 是第二纲的和可度量化的拓扑线性空间, Y 是局部凸空间, Y^* 是 Y 的对偶. 若 $\Gamma \subset \mathscr{W}_{\gamma,U}(X,Y)$ 是逐点有界的并且 $y' \circ f : X \to \mathbb{C}$ 有界, $\forall y' \in Y^*$, $f \in \Gamma$, 则 Γ 在有界集上一致有界.

定理 6.10 设 X 是第二纲的拓扑线性空间, Y 是局部凸空间, Y^* 是 Y 的对偶, $\{f_n\} \subset \mathscr{W}_{\gamma,U}(X,Y)$ 使得 $y' \circ f_n : X \to \mathbb{C}$ 连续, $\forall y' \in Y^*$, $n \in \mathbb{N}$. 若 $\lim_n f_n(x) = f(x)$ 存在, $\forall x \in X$, 则 $f \in \mathscr{W}_{\gamma,U}(X,Y)$ 并且 f 连续.

7 泛线性对偶

基于泛线性映射, 在获得等度连续定理的基础上, 我们于 2011 年给出了新的对偶理论, 称为泛线性对偶.

对拓扑线性空间 X, 称 $X^* = \{x' \in \mathbb{C}^X : x'$ 线性且连续$\}$ 为 X 的 (线性) 对偶, 记 $X^{(\gamma,U)} = \{f \in \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,\mathbb{C}) : f$ 连续$\}$. 显然, 线性对偶 $X^* \subset X^{(\gamma,U)}$, 特别地, 若 $(X, \|\cdot\|)$ 是不平凡的赋范空间, 则必有 $X^* \subsetneqq X^{(\gamma,U)}$, $\forall \gamma \in C(0)$, $U \in \mathcal{N}(X)$, 称 $X^{(\gamma,U)}$ 为 X 的一个由 $\gamma \in C(0)$ 和 $U \in \mathcal{N}(X)$ 确定的泛线性对偶.

基于拥有不平凡泛线性对偶的空间, 我们推广了关于对偶对 (X, X^*) 的对偶理论结果, 获得了一系列关于泛线性对偶对 $(X, X^{(\gamma,U)})$ 的理论结果, 特别获得了 Alaoglu-Bourbaki 定理等结论.

设 $(X, X^{(\gamma,U)})$ 是泛线性对偶对, 对 $A \subset X$, 记 $A^\bullet = \{f \in X^{(\gamma,U)} : |f(x)| \leqslant 1, \forall x \in A\}$ 为 A 的极, 对 $S \subset X^{(\gamma,U)}$, 记 $S^\bullet = \{x \in X : |f(x)| \leqslant 1, \forall f \in S\}$ 为 S 的极.

定理 7.1 设 $S \subset X^{(\gamma,U)}$, 则下列条件等价:

(1) S 在 X 上等度连续, 即 S 在每个 $x \in X$ 处等度连续;

(2) S 在 0 处等度连续;

(3) $S^\bullet \in \mathcal{N}(X)$, 即 $S^\bullet$ 是 X 中 0 点的邻域.

推论 7.1 若 $U, V \in \mathcal{N}(X)$, $\gamma \in C(0)$, 则 $V^\bullet = \{f \in X^{(\gamma,U)} : |f(x)| \leqslant 1, \forall x \in V\}$ 在 X 上等度连续.

推论 7.2 若 X 是第二纲的, $S \subset X^{(\gamma,U)}$ 在 X 上逐点有界, 则 $S^\bullet \in \mathcal{N}(X)$.

推论 7.3 若 X 是局部凸空间, $S \subset X^{(\varphi,U)}$, 则 S 在 X 上等度连续当且仅当存在 X 上的连续半范 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \ldots, \|\cdot\|_n$ $(n < +\infty)$, 使得

$$\sup_{f \in S} \sup_{\|x\|_i \leqslant 1, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n} |f(x)| < +\infty.$$

我们知道 $\mathbb{K}^X$ 上有弱 $*$ 拓扑使 $f_\alpha \xrightarrow{\text{弱}*} f$ 当且仅当 $f_\alpha(x) \to f(x), \forall x \in X$. 对 $A \subset X^{(\gamma,U)}$, 若 A 是 $(\mathbb{K}^X, \text{弱}*)$ 中的紧集, 则称 A 是弱 $*$ 紧的. 若 A 在 $(\mathbb{K}^X, \text{弱}*)$ 中的闭包 $\overline{A}^{w*}$ 是 $(\mathbb{K}^X, \text{弱}*)$ 中的紧集并且 $\overline{A}^{w*} \subset X^{(\varphi,U)}$, 则称 A 是相对弱 $*$ 紧的. 由此, 我们给出了基于泛线性对偶对 $(X, X^{(\gamma,U)})$ 的如下 Alaoglu-Bourbaki 定理和 Banach-Alaoglu 定理, 使得诸多原有对偶理论结果成了特例.

定理 7.2 若 $V \in \mathcal{N}(X)$, $\gamma \in C(0)$, 则 $V^\bullet = \{f \in X^{(\gamma,U)} : |f(x)| \leqslant 1, \forall x \in V\}$ 是弱 $*$ 紧集; 若 $S \subset X^{(\gamma,U)}$ 在 X 上等度连续, 则 S 是相对弱 $*$ 紧集.

定理 7.3 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是半范空间, $M > 0$, 则 $S = \{f \in X^{(\gamma,U)} : \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \leqslant M\}$ 是弱 $*$ 紧集.

定理 7.4 若 X 是可分的拓扑线性空间, $V \in \mathcal{N}(X)$, $K \subset X^{(\gamma,U)}$ 是弱 $*$ 紧, $S \subset X^{(\gamma,U)}$ 在 X 上等度连续, 则 $(S, \text{弱}*)$ 可度量化, 并且 $(K, \text{弱}*)$ 和 $(V^\bullet, \text{弱}*)$ 都是紧度量空间.

定理 7.5 设 X 是可分的拓扑线性空间, 如果 $S \subset X^{(\gamma,U)}$ 是等度连续的, 则每个 $\{f_n\} \subset S$ 含有子序列 $\{f_{n_k}\}$ 使得对每个 $x \in X$, 极限 $\lim_k f_{n_k}(x) = f(x)$ 存在, 并且 $f \in X^{(\gamma,U)}$ 是连续的.

定理 7.6 设 X 和 Y 是拓扑线性空间且 X 是第二纲的, $\Gamma \subset \mathscr{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ 且每个 $f \in \Gamma$ 连续. 若存在 $V \in \mathcal{N}(X)$ 使得 Γ 在 V 上是逐点有界的, 则 Γ 在 X 上等度连续且 Γ 在 X 的每个有界集上一致有界.

定理 7.7 设 X 是 Hausdorff 拓扑线性空间, 如果 $S \subset X^{(\gamma,U)}$ 是等度连续的且 $\Omega \subset X$ 是紧的, 则每个 $\{f_n\} \subset S$ 含有子序列 $\{f_{n_k}\}$ 使得 $\lim_k f_{n_k}(x) = f(x) \in \mathbb{K}$ 关于 $x \in \Omega$ 是一致收敛的, 并且 $f : \Omega \to \mathbb{K}$ 是连续的.

8 泛线性广义函数

基于泛线性映射, 在获得等度连续定理和泛线性对偶的基础上, 我们又给出了新的分布理论, 称为泛线性分布理论. 至此, 关于泛线性映射的等度连续定理、对偶理论和分布理论统称为泛线性分析.

取定 $n \in \mathbb{N}$. 对 $a > 0$, 记 $\mathscr{D}_a = \{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}^n} : \xi$ 任意次可微, 当 $\|x\| \geqslant a$ 时 $\xi(x) = 0\}$, $\mathscr{D}_a$ 上依通常方式赋有局部凸 Fréchet 拓扑, $\mathscr{D} = \bigcup_{m=1}^\infty \mathscr{D}_m$ 为 $\{\mathscr{D}_m\}$ 的严格归纳极限. 又记 $\mathscr{S} = \{\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}^n} : \xi$ 任意次可微, ξ 速降$\}$, $\mathscr{S}$ 上也依通常方式赋有局部凸 Fréchet 拓扑. 当 $n = 1$ 时, 记 $\mathscr{D}(\mathbb{R}) = \mathscr{D} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathscr{D}_a(\mathbb{R}) = \mathscr{D}_a \cap \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \mathscr{S} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

定义 8.1 $E \in \{\mathscr{D}_a, \mathscr{D}, \mathscr{S}\}$. 称 $f : E \to \mathbb{C}$ 为泛线性广义函数, 若 f 连续并且有 $\gamma \in C(0)$ 和 $U \in \mathcal{N}(E)$ 使得 $f \in \mathscr{L}_{\gamma,U}(E, \mathbb{C})$. 记 $E^{(\gamma,U)}$ 为这类泛线性广义函数全体.

通常的广义函数都是泛线性广义函数, 但许多泛线性广义函数却不是通常的广义函数, 即不是线性泛函. 我们指出了泛线性广义函数中不是通常广义函数的不少于是通常广义函数的.

关于泛线性广义函数, 我们获得了如下一些基本结论:

定理 8.1 设 $f_k, f \in E^{(\gamma,U)}$, 则 $f_k \to f$ 当且仅当 $f_k \xrightarrow{w*} f$.

定理 8.2 设 $\gamma \in C(0)$, $U \in \mathcal{N}(\mathscr{D}_a)$ 且 $V \in \mathcal{N}(\mathscr{S})$, 则 $\mathscr{D}_a^{(\gamma,U)}$ 和 $\mathscr{S}^{(\gamma,V)}$ 都是序列完备的.

对 $E \in \{\mathscr{D}, \mathscr{S}\}$ 和 $G \subset \mathbb{R}^n$, 记 $E_G = \{\xi \in E : \operatorname{supp} \xi \subset G\}$. 对每个 $f \in E^{(\gamma,U)}$, 令 $f|_{E_G} : E_G \to \mathbb{C}$ 为 $f|_{E_G}(\xi) = f(\xi), \forall \xi \in E_G$. 显然, $E_\emptyset = \{0\}$ 并且 $f|_{E_\emptyset} = 0, \forall f \in E^{(\gamma,U)}$.

对 $E = \mathscr{D}$ 和 $f \in E^{(\gamma,U)}$, 记 $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n \backslash [\bigcup\{G \subset \mathbb{R}^n : G\text{是开集}, f|_{E_G} = 0\}]$.

定理 8.3 设 $E = \mathscr{D}$, $f \in E^{(\gamma,U)}$, 则存在 $G_0 \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $f|_{E_{G_0}} = 0$ 且 $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n \backslash G_0$.

定理 8.4 设 $E = \mathscr{D}$, $f \in E^{(\gamma,U)}$, 则 $f = 0$ 当且仅当 $\operatorname{supp} f = \emptyset$.

定理 8.5 设 $f, g \in E^{(\gamma,U)}$, 则 $f = g$ 当且仅当对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 存在 x 的邻域 G 使得 $f|_{E_G} = g|_{E_G}$.

同时, 我们给出了泛线性广义函数的微分定义, 并获得了在泛线性广义函数的情形下方程 $y' = 0$ 有许多解不是通常广义函数, 即不是常数广义函数的结论. 注意, 在原有分布理论中, 方程 $y' = 0$ 只有常数 (广义函数) 解.

设 $E \in \{\mathscr{D}_a, \mathscr{D}, \mathscr{S}\}$, 记 $[E^{(\gamma,U)}] = \{\text{有限和} \sum t_k f_k : t_k \in \mathbb{C}, f_k \in E^{(\gamma,U)}\}$.

定义 8.2 设 $f = \sum_{k=1}^m \alpha_k f_k \in [E^{(\gamma,U)}]$, 其中 $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $f_k \in E^{(\gamma,U)}$. 注意, $\xi \in E$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数. 对 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 定义 $\frac{\partial f}{\partial x_j} : E \to \mathbb{C}$ 为

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) = f\Big(-\frac{\partial \xi}{\partial x_j}\Big), \quad \xi \in E.$$

对多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 记 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 和 $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$. 对 $f \in [E^{(\gamma,U)}]$ 和 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 记 $(D^\alpha f)(\xi) = f((-1)^{|\alpha|} D^\alpha \xi)$, $\forall \xi \in E$.

若 $f \in E^{(\gamma,U)}$ 是泛线性广义函数, 则对任一多重指标 α, $D^\alpha f$ 也是泛线性广义函数, 即存在 $V \in \mathcal{N}(E)$ 使得 $D^\alpha f \in E^{(\varphi,V)}$.

定义 8.3 称 $\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 为 E 中的乘子, 如果对每个 $\xi \in E$, 有乘积 $\zeta\xi \in E$ 且当 $\xi_k \to 0$ 时 $\zeta\xi_k \to 0$. 设 ζ 是 E 中的乘子且 $f \in [E^{(\gamma,U)}]$, 定义 $\zeta f : E \to \mathbb{C}$ 为 $(\zeta f)(\xi) = f(\zeta\xi)$, $\forall \xi \in E$.

定理 8.6 设 ζ 是 E 中的乘子, 则对每个 $U \in \mathcal{N}(E)$, 都有 $V \in \mathcal{N}(E)$ 使得

$$\{\zeta f : f \in E^{(\gamma,U)}\} \subset E^{(\gamma,V)}, \quad \forall \gamma \in C(0),$$
$$\{\zeta f : f \in [E^{(\gamma,U)}]\} \subset [E^{(\gamma,V)}], \quad \forall \gamma \in C(0).$$

定理 8.7 设 $E \in \{\mathscr{D}_a(\mathbb{R}), \mathscr{D}(\mathbb{R}), \mathscr{S}(\mathbb{R})\}$, $U \in \mathcal{N}(E)$, $\gamma \in C(0)$. 任给 $\xi_0 \in E$ 和 $f_0 \in E^{(\gamma,U)}$ 并且令 $f(\xi) = f_0[(\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\,dx)\xi_0]$, $\xi \in E$, 则有 $V \in \mathcal{N}(E)$ 使 $f \in E^{(\gamma,V)}$ 是泛线性广义函数且是方程 $y' = 0$ 的解, 即 $f' = 0$. 若 $f_0 \in E^*$ 是通常广义函数, 则此解 f 给出的是常数广义函数.

注意, 若上述定理中的 $f_0 \in E^{(\gamma,U)} \backslash E^*$ 即 f_0 不是通常的广义函数, 则定理所给出的 $f \in E^{(\gamma,V)}$ 往往不是通常广义函数, 所以不是常数广义函数, 但 $f' = 0$.

进一步, 我们通过下面定理指出了对 $f \in E^{(\gamma,U)}$, 方程 $y' = f$ 有同样丰富的泛线性广义函数解.

定理 8.8 设 $E \in \{\mathscr{D}_a(\mathbb{R}), \mathscr{D}(\mathbb{R})\}$, $E_1 = \{\xi \in E : \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\,dx = 1\}$, $U \in \mathcal{N}(E)$, $\gamma \in C(0)$. 对任意 $f \in E^{(\gamma,U)}$, 及每个 $\zeta \in E_1$, 有 $U_\zeta \in \mathcal{N}(E)$ 和 $y_\zeta \in E^{(\gamma,U_\zeta)}$ 使得 $y_\zeta' = f$, 且

$$y_\zeta(\xi) = f\Big(-\int_{-\infty}^{x} \Big[\xi(\tau) - \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \xi(s)\,ds\Big)\zeta(\tau)\Big]\,d\tau\Big), \quad \forall \xi \in E.$$

定理 8.9 设 $E \in \{\mathscr{D}_a(\mathbb{R}), \mathscr{D}(\mathbb{R})\}$, $f \in E^{(\gamma,U)}$. 对每个 $\xi_0 \in E$, $f_0 \in E^{(\gamma,U)}$, $\zeta \in E$, 其中 $\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x)\,dx \neq 0$, 令

$$g(\xi) = f_0\Big[\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\,dx\Big)\xi_0\Big] + f\Big(-\int_{-\infty}^{x} \Big[\xi(\tau) - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \xi(s)\,ds}{\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(s)\,ds}\zeta(\tau)\Big]\,d\tau\Big), \quad \forall \xi \in E,$$

则存在 $W \in \mathcal{N}(E)$ 使得 $g \in [E^{(\gamma,W)}]$ 并且 $g' = f$.

我们还给出了泛线性广义函数的 Fourier 变换和卷积的概念, 得到了一系列相关结论, 推广了原有分布理论.

定义 8.4 设 $E \in \{\mathscr{D}_a, \mathscr{D}, \mathscr{S}\}$, $U \in \mathcal{N}(E)$, $\gamma \in C(0)$. 对每个 $f \in E^{(\gamma,U)}$, 定义 $\hat{f} : F(E) \to \mathbb{C}$ 为 $\hat{f}(\zeta) = (2\pi)^n f(F^{-1}(\zeta))$, $\forall \zeta \in F(E)$. 记 $\hat{f} = F(f)$, 则有

$$F(f)(F(\xi)) = (2\pi)^n f(\xi), \quad \forall f \in E^{(\gamma,U)}, \quad \xi \in E.$$

定理 8.10 $F(E^{(\gamma,U)}) = (F(E))^{(\gamma,F(U))}$.

记 $[(F(E))^{(\gamma,F(U))}] = \{$有限和 $\sum t_k f_k : t_k \in \mathbb{C}, f_k \in (F(E))^{(\gamma,F(U))}\}$.

定义 8.5 对每个 $f \in [E^{(\gamma,U)}]$, 定义 $F(f) : F(E) \to \mathbb{C}$ 为

$$F(f)(F(\xi)) = (2\pi)^n f(\xi), \quad \forall \xi \in E.$$

定理 8.11 如果 $f = \sum_{k=1}^m \alpha_k f_k$, 其中 $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $f_k \in E^{(\gamma,E)}$, 则有 $F(f) = \sum_{k=1}^m \alpha_k F(f_k) \in [(F(E))^{(\gamma,F(U))}]$ 并且

$$F([E^{(\gamma,U)}]) = [(F(E))^{(\gamma,F(U))}].$$

进一步, $F : [E^{(\gamma,U)}] \to [(F(E))^{(\gamma,F(U))}]$ 是线性的并且 w^*-w^* 连续.

定理 8.12 设 $U \in \mathcal{N}(\mathscr{S}(\mathbb{R}))$, $\gamma \in C(0)$. 任取 $f_0 \in (\mathscr{S}(\mathbb{R}))^{(\gamma,U)}$ 和 $\xi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, 令

$$f(\xi) = f_0\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)dt\right)\xi_0\right], \quad \forall \xi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}),$$

则存在 $V \in \mathcal{N}(\mathscr{S}(\mathbb{R}))$ 使得 $f \in (\mathscr{S}(\mathbb{R}))^{(\gamma,V)}$, 并且 $F(f) \in (\mathscr{S}(\mathbb{R}))^{(\gamma,F(V))}$ 满足

$$F(f)(\mathrm{i}\sigma\zeta(\sigma)) = 0, \quad \forall \zeta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

定义 8.6 对每个卷积乘子 $f_0 \in E^*$ 和 $f \in [E^{(\gamma,U)}]$, 定义卷积 $f_0 * f : E \to \mathbb{C}$ 为

$$(f_0 * f)(\xi) = f(f_0 * \xi), \quad \forall \xi \in E.$$

定理 8.13 设 $f_0 \in E^*$ 是卷积乘子, 则对每个 $U \in \mathcal{N}(E)$, 存在 $V \in \mathcal{N}(E)$ 使得

$$f_0 * f \in E^{(\gamma,V)}, \quad \forall f \in E^{(\gamma,U)},$$
$$f_0 * f \in [E^{(\gamma,V)}], \quad \forall f \in [E^{(\gamma,U)}].$$

定理 8.14 如果 $f_0 \in E^*$ 是卷积乘子, α 是多重指标, 则 $D^\alpha(f_0 * \xi) = f_0 * D^\alpha \xi$, $\xi \in E$, 并且

$$D^\alpha(f_0 * f) = (D^\alpha f_0) * f = f_0 * D^\alpha f, \quad \forall f \in [E^{(\gamma,U)}].$$

定理 8.15 如果 $\{f_k\} \subset E'$ 满足 $f_k \xrightarrow{w*} f$, 即 $f_k(\xi) \to f(\xi)$, $\forall \xi \in E$ (注意 $f \in E^*$), 并且有有界集 $F \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $\operatorname{supp} f_k \subseteq F$, $\forall k \in \mathbb{N}$, 则对每个 $g \in [E^{(\gamma,U)}]$ 和有界集 $B \subset E$,

$$\lim_k (f_k * g)(\xi) = (f * g)(\xi) \ \text{ 关于 } \xi \in B \text{ 是一致的}.$$

定理 8.16 设 $\{f_k\} \subset E'$ 使得 $f_k \xrightarrow{w*} f$, 并且有有界集 $F \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $\operatorname{supp} f_k \subseteq F$, $\forall k \in \mathbb{N}$. 如果 $g, g_k \in E^{(\gamma,U)}$, $\forall k$, 并且 $g_k \xrightarrow{w*} g$, 则对每个有界集 $B \subset E$, $\lim_{k,m\to+\infty}(f_k * g_m)(\xi) = (f * g)(\xi)$ 关于 $\xi \in B$ 一致成立. 特别地, $\lim_k (f_k * g_k)(\xi) = (f * g)(\xi)$ 关于 $\xi \in B$ 一致成立, 并且当在 E 中 $\xi_k \to \xi$ 时, $(f_k * g_k)(\xi_k) \to (f * g)(\xi)$.

致谢 谨以此文祝吴从炘先生健康长寿. 感谢审稿人提出的宝贵修改意见和建议. 感谢许全华、步尚全、程立新和薛小平教授对本期专辑的精心组织和奉献.

参考文献

1 Mikusinski J, Sikorski R. The elementary theory of distributions I. Rozprawy Mat, 1957, 12: 54–55
2 Mikusinski J, Sikorski R. The elementary theory of distributions II. Rozprawy Mat, 1961, 25: 47–48
3 Schwartz L. Theorie des Distributions. Paris: Hermann, 1966
4 Mikusinski J. A theorem on vector matrices and its applications in measure theory and functional analysis. Bull Acad Polon Sci, 1970, 18: 193–196
5 Antosik P, Swartz C. Matrix Methods in Analysis. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1113. Heidelberg: Springer, 1985
6 Swartz C. Infinite Matrices and the Gliding Hump. Singapore: World Scientific, 1996
7 Stuart C. Weak sequentially completeness in sequence spaces. PhD Thesis. New Mexico: New Mexico State University, 1993
8 Stuart C. Interchanging the limits in a double series. Southeast Asian Bull Math, 1994, 18: 81–84
9 Weber H. A diagonal theorem. Answer to a question of Antosik. Bull Pol Acad Sci Math, 1993, 41: 95–102
10 Wu J D, Lu S J. A summation theorem and its applications. J Math Anal Appl, 2001, 257: 29–38
11 Wu J D, Lu S J. A full-invariant theorem and some applications. J Math Anal Appl, 2002, 270: 397–404
12 Li R L, Cho M H. A uniform convergent principle. J Harbin Inst Tech, 1992, 24: 107–108
13 Li R L, Li L S, Shin M K. Summability results for operator matrices on topological vector spaces. Sci China Ser A, 2001, 44: 1300–1311
14 Qu W B, Wu J D. On Antosik's lemma and the Antosik-Mikusinski basic matrix theorem. Proc Amer Math Soc, 2002, 130: 3283–3285
15 Wu J D, Luo J W, Lu S J. A unified convergence theorem. Acta Math Sin Engl Ser, 2005, 21: 315–322
16 Thomas E. L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1970, 20: 55–191
17 江泽坚, 邹承祖. 关于谱型算子. 吉林大学自然科学学报, 1964, 1: 65–75
18 李容录. (op) 型空间的一特征. 科学通报, 1984, 29: 444–444
19 李容录. 不含 c_0 的 Banach 空间的一特征. 哈尔滨工业大学学报, 1985, 增刊: 16–20
20 Li R L, Bu Q Y. Locally convex spaces containing no copy of c_0. J Math Anal Appl, 1993, 172: 205–211
21 Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach Spaces. I. Sequence Spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 92. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977
22 Rosenthal H P. On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory. Studia Math, 1970, 37: 13–36
23 Distel J, Uhl J. Vetor Measures, Mathematical Surveys, No. 15. Providence: Amer Math Soc, 1977
24 Day M M. Normed Linear Spaces. Berlin-Gottingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1958
25 Bu Q Y. Some properties of the injective tensor product of $L^p[0,1]$ and a Banach space. J Funct Anal, 2003, 204: 101–121
26 Boos J, Leiger T. The signed weak gliding hump property. Acta Comment Univ Tartu Math, 1994, 970: 13–22
27 Bennett G. A new class of sequence spaces with applications in summability theory. J Reine Angew Math, 1974, 1974: 49–75
28 Bessaga C, Pełczyński A. On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. Studia Math, 1958, 17: 151–164
29 Schwartz L. Un theorem de la convergence dans les. Comp Rend Acad Paris, 1969, 268: 704–706
30 Kalton N J. The Orlicz-Pettis theorem. Contemp Math, 1980, 2: 91–100
31 Wu J, Lu S J. A general Orlicz-Pettis theorem. Taiwanese J Math, 2002, 6: 433–440
32 Li R L, Cui C R, Cho M. An invariant with respect to all admissible (E,E)-polar topologies (in Chinese). Chinese Ann Math Ser A, 1998, 19: 289–294
33 Wu J D, Li R L. An Orlicz-Pettis theorem with applications to $\mathcal{A}$-spaces. Studia Sci Math Hungar, 1999, 35: 353–358
34 武俊德, 曲文波, 崔成日. 关于 λ- 数乘收敛级数的不变性. 数学进展, 2002, 31: 279–283
35 Kalton N J. Spaces of compact operators. Math Ann, 1974, 208: 267–278
36 Wilansky A. Modern Methods in Topological Vector Spaces. New York: McGraw-Hill, 1978
37 Wu J D, Li R L. Unconditional convergent series on locally convex spaces. Taiwanese J Math, 2000, 4: 253–259
38 Li R L, Zhong S H, Swartz C. An open mapping theorem without continuity and linearity. Topology Appl, 2010, 157:

2086–2093
39 Zhong S H, Li R L. Continuity of mappings between Fréchet spaces. J Math Anal Appl, 2005, 311: 736–743
40 Zhong S H, Li R L, Won S Y. An improvement of a recent closed graph theorem. Topology Appl, 2008, 155: 1726–1729
41 Li R L, Zhong S H, Li L S. Demi-linear analysis I-basic principles. J Korean Math Soc, 2009, 46: 643–656
42 Zhong S H, Li R L. Uniform boundedness principles for ordered topological vector spaces. Ann Funct Anal, 2011, 2: 13–18
43 Li R L, Chen A H, Zhong S H. Demi-linear duality. J Inequal Appl, 2011, 128: 1–20
44 Li R L, Zhong S H, Kim D, et al. Demi-linear analysis II—demi-distributions. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2021, in press
45 Li R L, Zhong S H, Kim D, et al. Demi-linear analysis III—demi-distributions. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2021, in press

Infinite matrix method, (op) type space, invariance and demi-linear analysis

Junde Wu & Shuhui Zhong

Abstract This paper summarizes the research work on functional space theory, including the infinite matrix method, characterization of (op) type space, invariance, nonlinear open mapping theorem, nonlinear closed graph theorem, demi-linear equicontinuity theorem, demi-linear duality theory, and demi-linear generalized function theory.

Keywords **infinite matrix method, topological vector space, demi-linear duality theory, demi-linear generalized function theory**

MSC(2010) **46A03**

doi: 10.1360/SSM-2020-0194