

# 平面折射系统极限环的存在和唯一性

李时敏, 陈挺\*, 刘玉记, 黎小丽

广东财经大学统计与数学学院, 广州 510320

E-mail: lism1983@126.com, chenting0715@126.com, liuyuji888@sohu.com, 2086947611@qq.com

收稿日期: 2019-04-26; 接受日期: 2019-10-15; 网络出版日期: 2019-11-05; \* 通信作者

广州市科技计划(批准号: 201707010426 和 20180401350)、广东省自然科学基金(批准号: 2017A030313010)和国家自然科学基金(批准号: 11771059)资助项目

**摘要** 本文考虑平面折射系统的极限环个数问题. 根据左、右子系统的动力学性态, 可以将其分为如下6种类型: 焦点-焦点、焦点-鞍点、焦点-结点、鞍点-鞍点、鞍点-结点和结点-结点. 利用Poincaré映射, 本文证明折射系统为焦点-结点情形时最多存在1个极限环.

**关键词** 极限环 分段线性系统 折射系统

**MSC (2020) 主题分类** 34A36, 34C05, 37G15

## 1 引言

极限环分支问题是平面定性理论中的热点和难点问题(参见文献[1]). 著名的 Hilbert 第十六问题就是考虑平面多项式微分系统的极限环个数及其分布. 一百多年来, 许多数学家对 Hilbert 第十六问题进行了大量的研究(参见文献[2, 3]), 但这些工作离解决这个问题还十分遥远.

近年来, 随着人们对现实世界认识的日益深刻, 越来越多的学者开始关注分段光滑微分系统的动力学行为(参见文献[4, 5]). 关于分段光滑微分系统的研究, 迄今为止还没有建立一般的理论和方法. 学者们主要是按照“遇到一类, 研究一类, 解决一类”的思路进行探讨, 如 Hopf 分支问题<sup>[6, 7]</sup>、中心和等时中心问题<sup>[8, 9]</sup>、极限环分支问题<sup>[10–13]</sup>和全局动力学分析<sup>[14, 15]</sup>.

考虑平面分段光滑向量场

$$\mathcal{X}(p) = \begin{cases} X^-(p), & \text{当 } h(p) < 0, \\ X^+(p), & \text{当 } h(p) > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中切换流形

$$\Sigma \triangleq \{p \in \mathbb{R}^2 \mid h(p) = 0\} \quad (1.2)$$

将平面分成两部分  $\Sigma^+ \triangleq \{p \in \mathbb{R}^2 \mid h(p) > 0\}$  和  $\Sigma^- \triangleq \{p \in \mathbb{R}^2 \mid h(p) < 0\}$ .

英文引用格式: Li S M, Chen T, Liu Y J, et al. On the existence and uniqueness of limit cycles in planar refracted systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 605–614, doi: 10.1360/N012019-00112

**定义 1.1** 记  $X^\pm h(p) = \langle \nabla h(p), X^\pm(p) \rangle$ . 根据向量场在切换流形上的方向, 可以将  $\Sigma$  分为如下三类:

- (i) 穿越区域  $\Sigma^c = \{p \in \Sigma \mid X^+h(p)X^-h(p) > 0\}$ , 如图 1(a) 所示;
- (ii) 吸引区域  $\Sigma^a = \{p \in \Sigma \mid X^+h(p) > 0, X^-h(p) < 0\}$ , 如图 1(b) 所示;
- (iii) 逃离区域  $\Sigma^e = \{p \in \Sigma \mid X^+h(p) < 0, X^-h(p) > 0\}$ , 如图 1(c) 所示.

这些区域的端点  $\Sigma^t = \{p \in \Sigma \mid X^+h(p)X^-h(p) = 0\}$  称为  $\Sigma$ -切点.

值得注意的是, 系统 (1.1) 的轨线在吸引区域和逃离区域会发生滑动, 此外逃离区域在反时间变换下则为吸引区域, 因此将吸引区域和逃离区域统称为滑动区域. 在滑动区域中, 我们需要对向量场进行重新定义 (参见文献 [16]).

**定义 1.2** 若系统 (1.1) 满足  $X^+h(p) = X^-h(p)$ ,  $p \in \Sigma$ , 则称为折射系统.

显然, 折射系统仅存在穿越区域, 它在电气工程和自动控制领域有着十分广泛的应用 (参见文献 [17, 18]).

分段线性微分系统具有丰富的动力学性态, 它几乎涵盖了所有非线性微分系统的分支现象. 下面介绍最简单的分段线性微分系统:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{1,1}^- & a_{1,2}^- \\ a_{2,1}^- & a_{2,2}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^- \\ b_2^- \end{pmatrix}, & \text{当 } x < 0, \\ \begin{pmatrix} a_{1,1}^+ & a_{1,2}^+ \\ a_{2,1}^+ & a_{2,2}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^+ \\ b_2^+ \end{pmatrix}, & \text{当 } x > 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . 方便起见, 称系统 (1.3) 当  $x < 0$  ( $x > 0$ ) 时为左 (右) 子系统. 系统 (1.3) 含有 12 个参数, 因此给我们分析带来了极大的困难.

系统 (1.3) 的左、右子系统均为线性系统, 其存在极限环的必要条件为  $a_{1,2}^+a_{1,2}^- > 0$ . 2012 年, Freire 等 [19] 利用拓扑等价变换, 推导出系统 (1.3) 满足必要条件  $a_{1,2}^+a_{1,2}^- > 0$  的 Liénard 标准型为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix}, & \text{当 } x < 0, \\ \begin{pmatrix} T^+ & -1 \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ a^+ \end{pmatrix}, & \text{当 } x > 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

其中  $T^\pm$  和  $D^\pm$  分别表示左 (右) 子系统的迹和行列式. 值得指出的是, 该标准型 (1.4) 仅含 7 个参数.

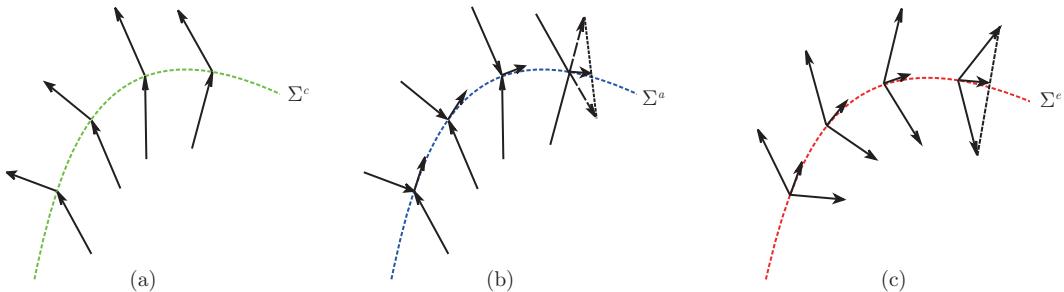


图 1 切换流形  $\Sigma$  的类型. (a) 穿越区域; (b) 吸引区域; (c) 逃离区域

表 1 不连续线性系统 (1.4) 极限环个数的下界, 其中 F、S 和 N 分别表示焦点、鞍点和结点

|   | F | S | N |
|---|---|---|---|
| F | 3 | 3 | 3 |
| S |   | 2 | 2 |
| N |   |   | 2 |

当  $b = 0$  和  $a^- = a^+$  时, 系统 (1.4) 为连续线性系统. 1990 年, Lum 和 Chua<sup>[20]</sup> 提出如下猜想:

**猜想 1.1** 连续线性系统 (1.4) 至多存在 1 个极限环.

1998 年, Freire 等<sup>[21]</sup> 通过对连续线性系统 (1.4) 进行详细的定性分析, 证明了该猜想是正确的.

对于一般的不连续线性系统 (1.4), 大部分研究都是关于极限环个数的下界估计 (参见文献 [22]).

根据系统 (1.4) 左 (右) 子系统奇点的类型, 可以将其分成如表 1 所示的 6 大类型.

由表 1 自然会有如下猜测:

**猜想 1.2** 不连续线性系统 (1.4) 至多存在 3 个极限环.

关于猜想 1.2, 目前仅有部分研究结果. 文献 [23] 证明了当  $a^+a^- = 0$ , 即系统 (1.4) 左子系统或右子系统的奇点在切换直线  $x = 0$  上时至多存在 2 个极限环. 最近, 文献 [24] 证明了当系统 (1.4) 存在中心型奇点时最多存在 2 个极限环.

## 2 主要结果

本文讨论当  $b = 0$  时, 系统 (1.4) 极限环的最大个数问题. 在此条件下, 系统 (1.4) 可写为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix}, & \text{当 } x < 0, \\ \begin{pmatrix} T^+ & -1 \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^+ \end{pmatrix}, & \text{当 } x > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

根据定义 1.2 可知, 系统 (2.1) 为折射系统.

直接计算得折射系统 (2.1) 左、右子系统的奇点分别为

$$P_L = \left( \frac{a^-}{D^-}, \frac{a^-T^-}{D^-} \right), \quad P_R = \left( \frac{a^+}{D^+}, \frac{a^+T^+}{D^+} \right). \quad (2.2)$$

**定义 2.1** 若折射系统 (2.1) 的奇点  $P_L$  ( $P_R$ ) 位于左 (右) 半平面, 则称其为实奇点; 若奇点  $P_L$  ( $P_R$ ) 位于右 (左) 半平面, 则称其为虚奇点; 若奇点  $P_L$  ( $P_R$ ) 位于切换流形  $x = 0$  上, 则称  $P_L$  ( $P_R$ ) 为边界点.

目前已有结果表明, 折射系统 (2.1) 属于 FS、SS、SN、NN 和 FF 5 种情形时最多存在 1 个极限环, 其中 F 代表焦点 (focus), S 代表鞍点 (saddle), N 代表结点 (node). 更加具体地说:

- FS 情形参见文献 [25, 定理 1], 或 [26, 定理 3.1];
- SS 情形参见文献 [27, 定理 3.4 和 3.5];
- SN 情形参见文献 [28, 定理 3.1];
- NN 情形参见文献 [29, 定理 3.1];

表 2 折射系统 (2.1) 极限环个数的上界

|   | F | S | N |
|---|---|---|---|
| F | ? | 1 | 1 |
| S |   | 1 | 1 |
| N |   |   | 1 |

- FF 情形参见文献 [30]. 该文献的结果表明, 当折射系统 (2.1) 具有 2 个虚焦点或 1 个虚焦点时, 极限环是唯一的 (参见文献 [30, 定理 1 和 2]). 当折射系统 (2.1) 存在 2 个实焦点时, 大量数值模拟表明, 最多存在 1 个极限环, 因此, 文献 [30] 提出如下猜想:

**猜想 2.1** 折射系统 (2.1) 具有 2 个实焦点时最多存在 1 个极限环.

据我们所知, 当折射系统 (2.1) 属于 FN 情形时, 极限环的最大个数问题还未解决. 本文的主要结果如下:

**定理 2.1** 折射系统 (2.1) 属于 FN 情形时最多存在 1 个极限环.

我们得到了关于折射系统 (2.1) 极限环最大个数的最新结果如表 2 所示. 因此, 猜想 2.1 可以改写为如下猜想:

**猜想 2.2** 折射系统 (2.1) 最多存在 1 个极限环.

### 3 预备知识

折射系统 (2.1) 的动力学性态与

$$\Delta^\pm = (T^\pm)^2 - 4D^\pm \quad (3.1)$$

密切相关. 引入模态参数

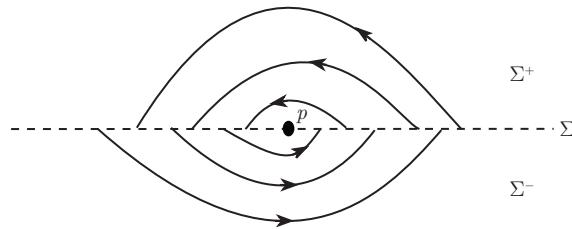
$$m^\pm = \begin{cases} i, & \text{若 } \Delta^\pm < 0, \\ 0, & \text{若 } \Delta^\pm = 0, \\ 1, & \text{若 } \Delta^\pm > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中  $i^2 = -1$ , 我们进一步将折射系统 (2.1) 转化为仅含 4 个参数的标准型 (参见文献 [31]):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ (\gamma_L)^2 - (m^-)^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_L \end{pmatrix}, & \text{当 } x < 0, \\ \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ (\gamma_R)^2 - (m^+)^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_R \end{pmatrix}, & \text{当 } x > 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

其中

$$\alpha_{\{R,L\}} = \begin{cases} \frac{2a^\pm}{\sqrt{|\Delta^\pm|}}, & \text{若 } \Delta^\pm \neq 0, \\ 2a^\pm, & \text{若 } \Delta^\pm = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

图 2  $\Sigma$ -型单值奇点

$$\gamma_{\{R,L\}} = \begin{cases} \frac{T^\pm}{\sqrt{|\Delta^\pm|}}, & \text{若 } \Delta^\pm \neq 0, \\ T^\pm, & \text{若 } \Delta^\pm = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

**注 3.1** 系统 (3.3) 的奇点当  $m = i$  时为焦点; 当  $m = 0$  时为退化结点; 当  $m = 1$  和  $|\gamma| \geq 1$  时为结点; 当  $m = 1$  和  $|\gamma| < 1$  时为鞍点.

下面介绍文献 [32] 中的结果. 考虑折射系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mu_1^- & \mu_2^- \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_0^- \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{当 } y < 0, \\ \begin{pmatrix} \mu_1^+ & \mu_2^+ \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_0^+ \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{当 } y > 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

**定义 3.1** 若  $p$  为  $\Sigma$ -切点或边界点, 即  $X^+h(p)X^-h(p) = 0 \cup X^+(p)X^-(p) = 0$ , 且在  $p$  的某一邻域内, 系统的解绕  $p$  旋转, 则称  $p$  为系统 (3.6) 的  $\Sigma$ -型单值奇点, 如图 2 所示.

利用广义 Rolle 定理, 文献 [32] 得到了具有  $\Sigma$ -型单值奇点的折射系统极限环的存在和唯一性定理.

**定理 3.1** 设折射系统 (3.6) 仅含有  $\Sigma$ -型单值奇点. 若  $\mu_1^+\mu_1^- \geq 0$ , 则系统 (3.6) 没有极限环; 若  $\mu_1^+\mu_1^- < 0$ , 则系统 (3.6) 最多存在 1 个极限环.

#### 4 定理 2.1 的证明

不失一般性, 假设折射系统 (2.1) 的左(右)子系统分别为焦(结)点情形. 方便起见, 我们利用标准型 (3.3) 进行讨论. 利用文献 [19, 命题 3.7], 并注意到  $b = 0$  和  $\gamma_R \neq 0$ , 容易得到折射系统 (3.3) 存在极限环的必要条件为

$$\gamma_L\gamma_R < 0. \quad (4.1)$$

不妨假设  $\gamma_L > 0, \gamma_R < 0$ , 否则作变换  $X = x, Y = -y, T = -t$  可将  $\gamma_L < 0, \gamma_R > 0$  转化为前一种情形. 因此, 折射系统 (3.3) 的左子系统奇点为不稳定焦点, 右子系统奇点为稳定虚结点, 如图 3 所示.

由注 3.1 知, 折射系统 (3.3) 右子系统的结点又可分为结点(即  $m^+ = 1$ ) 和退化结点(即  $m^+ = 0$ ). 下面分两种情形分别进行证明.

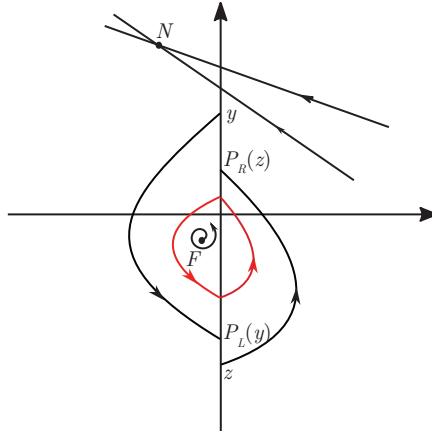


图 3 折射系统 (2.1) 为 FN 情形

#### 4.1 $m^+ = 1$ 情形

将  $m^+ = 1$  和  $m^- = i$  代入折射系统 (3.3) 得

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ \gamma_L^2 + 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_L \end{pmatrix}, & \text{当 } x < 0, \\ \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ \gamma_R^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_R \end{pmatrix}, & \text{当 } x > 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

由前面的分析知, 折射系统 (4.2) 存在极限环的必要条件为

$$\alpha_R < 0, \quad \gamma_L > 0, \quad \gamma_R < -1. \quad (4.3)$$

首先考虑  $\alpha_L \geq 0$ , 即折射系统 (4.2) 左子系统的焦点为虚奇点或边界点. 作变换

$$\begin{cases} X = 2\gamma_L x - y, & Y = x, \quad \text{当 } x < 0, \\ X = 2\gamma_R x - y, & Y = x, \quad \text{当 } x > 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

系统 (4.2) 变为

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -(\gamma_L^2 + 1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_L \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{当 } Y < 0, \\ \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -(\gamma_R^2 - 1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_R \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{当 } Y > 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

**命题 4.1** 假设折射系统 (4.2) 满足 (4.3), 当  $\alpha_L \geq 0$  时至多存在 1 个极限环.

**证明** 在系统 (4.5) 中,  $h(X, Y) = Y$ . 当  $\alpha_L \geq 0$  和  $\alpha_R > 0$  时, 由定义 3.1 知, 系统 (4.5) 在切换流形  $\{Y = 0\}$  上仅含有唯一的  $\Sigma$ -单值奇点  $(0, 0)$ . 由定理 3.1 可知, 折射系统 (4.2) 当  $\alpha_L \geq 0, \alpha_R > 0, \gamma_L > 0$  和  $\gamma_R < -1$  时至多存在 1 个极限环. 证毕.  $\square$

下面考虑  $\alpha_L < 0$ , 即折射系统 (4.2) 左子系统的焦点为实奇点. 由  $X^\pm h(p) = 0$  得  $p = (0, 0)$ . 由定义 3.1 知,  $(0, 0)$  不属于  $\Sigma$ - 单值奇点, 因此不能利用定理 3.1 进行证明. 接下来对折射系统 (4.2) 的左(右)子系统分别建立如下的左(右)半 Poincaré 映射.

折射系统 (4.2) 的左子系统为不稳定的焦点. 当  $y > 0$  时, 由  $(0, y)$  出发的轨线必与  $y$  轴再次交于  $(0, P_L(y))$  (如图 3 所示). 称

$$P_L : y \geq 0 \quad (4.6)$$

为折射系统 (4.2) 的左半 Poincaré 映射. 由文献 [31, 命题 6] 可知下面的引理:

**引理 4.1** 折射系统 (4.2) 的左半 Poincaré 映射  $P_L : y \geq 0$  的参数表达式为

$$y = \alpha_L \frac{1 - e^{\gamma_L t}(\cos t - \gamma_L \sin t)}{(1 + \gamma_L^2)e^{\gamma_L t} \sin t}, \quad P_L(y) = -\alpha_L \frac{1 - e^{-\gamma_L t}(\cos t + \gamma_L \sin t)}{(1 + \gamma_L^2)e^{-\gamma_L t} \sin t}, \quad (4.7)$$

其中  $\pi < t < 2\pi$ .

它满足下面 3 条性质 (如图 4(a) 所示):

- (i)  $\lim_{y \rightarrow 0^+} P'_L(y) = 0, \lim_{y \rightarrow +\infty} P'_L(y) = -e^{\pi\gamma_L}$ ;
- (ii)  $P'_L(y) < 0, P''_L(y) < 0$ ;
- (iii)  $P_L(y)$  以  $A_L(y) = -e^{\pi\gamma_L}y + \frac{2\alpha_L\gamma_L}{1+\gamma_L^2}(1 + e^{\pi\gamma_L})$  为渐进线.

折射系统 (4.2) 的右子系统为稳定的虚结点. 当  $z \leq 0$  时, 由  $(0, z)$  出发的轨线必与  $y$  轴再次交于  $(0, P_R(z))$  (如图 3 所示). 由文献 [31, 命题 7] 可得下面的引理:

**引理 4.2** 折射系统 (4.2) 的右半 Poincaré 映射  $P_R : z \leq 0$  为

$$z = \alpha_R \frac{e^{-\gamma_R t} - \cosh t + \gamma_R \sinh t}{(\gamma_R^2 - 1) \sinh t}, \quad P_R(z) = -\alpha_R \frac{e^{\gamma_R t} - \cosh t - \gamma_R \sinh t}{(\gamma_R^2 - 1) \sinh t}, \quad (4.8)$$

其中  $t \geq 0$ . 它满足以下 3 条性质 (如图 4(b) 所示):

- (i)  $\lim_{z \rightarrow -\infty} P_R(z) = z_1 = \frac{\alpha_R}{\gamma_R - 1}, \lim_{z \rightarrow 0^-} P'_R(z) = -1, \lim_{z \rightarrow -\infty} P'_R(z) = 0$ ;
- (ii)  $P'_R(z) < 0, P''_R(z) < 0$ ;
- (iii)  $z = z_1$  为  $P_R(z)$  的水平渐进线.

根据引理 4.1 和 4.2, 可以得到如下的命题:

**命题 4.2** 假设折射系统 (4.2) 满足 (4.3), 当  $\alpha_L < 0$  时至多存在 1 个极限环.

**证明** 易知折射系统 (4.2) 的极限环对应 Poincaré 映射  $P_R \circ P_L(y)$  的不动点, 因此, 我们进而讨论  $P_L(y) = P_R^{-1}(y)$  的根.

记  $(y^*, -e^{\pi\gamma_L}y^*)$  为  $z = P_R^{-1}(y)$  与过原点的直线  $z = -e^{\pi\gamma_L}y$  的交点 (如图 5 所示), 则在该点有

$$(P_R^{-1})'(y^*) < -e^{\pi\gamma_L}. \quad (4.9)$$

显然, 若  $P_L$  与  $P_R^{-1}$  存在交点  $(y, P_L(y))$ , 则由引理 4.1 和 4.2 知,  $y^* < y < z_1$ .

下面用反证法证明  $P_L(y)$  与  $P_R^{-1}(y)$  最多存在一个交点. 假设  $P_L(y)$  与  $P_R^{-1}(y)$  分别交于两点  $(y_1, P_L(y_1))$  和  $(y_2, P_L(y_2))$ , 其中  $y^* < y_1 < y_2 < z_1$ , 即  $P_L(y_1) = P_R^{-1}(y_1), P_L(y_2) = P_R^{-1}(y_2)$ . 由 Rolle 定理可知, 必存在  $y \in (y_1, y_2)$ , 使得  $P'_L(y) = (P_R^{-1})'(y)$ . 上述结论是不可能成立的. 一方面,  $-e^{\pi\gamma_L} < P'_L(y) < 0, y > 0$ . 另一方面, 由 (4.9) 和引理 4.2 知,  $(P_R^{-1})'(y) < (P_R^{-1})'(y^*) < -e^{\pi\gamma_L}$ . 矛盾.  $\square$

由命题 4.1 和 4.2, 我们证明了折射系统 (4.2) 最多存在 1 个极限环.

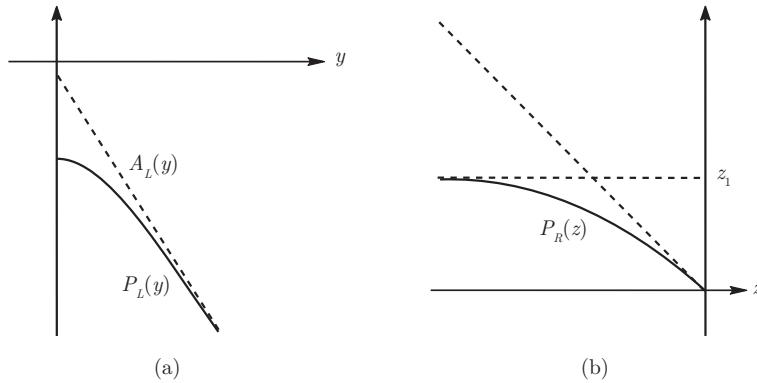
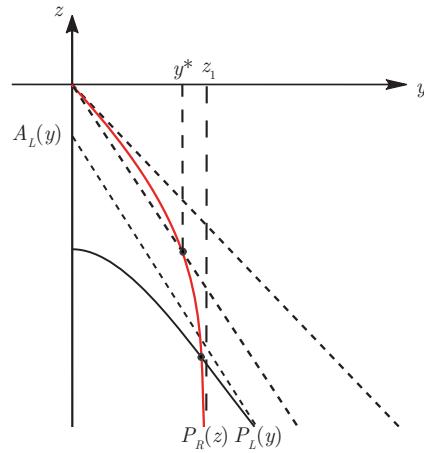


图 4 折射系统 (4.2) 的左、右半 Poincaré 映射. (a) 左半 Poincaré 映射; (b) 右半 Poincaré 映射

图 5 折射系统 (4.2) 的  $P_L(y)$  与  $P_R^{-1}(y)$  的交点

#### 4.2 $m^+ = 0$ 情形

将  $m^+ = 0$  和  $m^- = i$  代入标准型 (3.3) 得

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ \gamma_L^2 + 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_L \end{pmatrix}, & \text{当 } x < 0, \\ \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_R \end{pmatrix}, & \text{当 } x > 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

折射系统 (4.10) 的右子系统为虚的退化结点. 由文献 [31, 命题 7] 可得如下引理:

**引理 4.3** 折射系统 (4.10) 的右半 Poincaré 映射  $P_R(z) : z \leq 0$  为

$$z = \alpha_R \frac{e^{-\gamma_R t} - 1 + \gamma_R t}{\gamma_R^2 t}, \quad P_R(z) = -\alpha_R \frac{e^{\gamma_R t} - 1 - \gamma_R t}{\gamma_R^2 t}, \quad (4.11)$$

它满足以下性质:

- (i)  $\lim_{z \rightarrow -\infty} P_R(z) = z_2 = \frac{\alpha_R}{\gamma_R}$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0^-} P'_R(z) = -1$ ,  $\lim_{z \rightarrow -\infty} P'_R(z) = 0$ ;
- (ii)  $P''_R(z) < 0$ ,  $P'''_R(z) < 0$ ;

(iii)  $z = z_2$  为  $P_R(z)$  的水平渐进线.

**证明** (i) 利用 (4.11) 可得

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} P_R(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\alpha_R \frac{e^{\gamma_R t} - 1 - \gamma_R t}{\gamma_R^2 t} = \frac{\alpha_R}{\gamma_R}.$$

直接计算可得  $P'_R(z) = -e^{2\gamma_R t} \frac{e^{-\gamma_R t} - 1 + \gamma_R t}{e^{\gamma_R t} - 1 - \gamma_R t}$ , 因此,

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} P'_R(z) = \lim_{t \rightarrow 0^+} -e^{2\gamma_R t} \frac{e^{-\gamma_R t} - 1 + \gamma_R t}{e^{\gamma_R t} - 1 - \gamma_R t} = -1, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} P'_R(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -e^{2\gamma_R t} \frac{e^{-\gamma_R t} - 1 + \gamma_R t}{e^{\gamma_R t} - 1 - \gamma_R t} = 0.$$

(ii) 易知

$$P'_R(z) = e^{2\gamma_R t} \frac{z}{P_R(z)}, \quad P''_R(z) = -e^{3\gamma_R t} \gamma_R^2 t^2 \frac{\gamma_R t - \sinh(\gamma_R t)}{P_R(z)}.$$

注意到  $z \leq 0$ ,  $P_R(z) > 0$ ,  $\gamma_R < 0$ ,  $t \geq 0$ , 我们很容易得到结论 (ii).  $\square$

**命题 4.3** 折射系统 (4.10) 最多存在 1 个极限环.

**证明** 证明过程与  $m^+ = 1$  的情形完全类似, 略.  $\square$

## 参考文献

- 1 Zhang Z F, Ding T R, Huang W Z, et al. Qualitative Theory of Differential Equations. Providence: Amer Math Soc, 1992 [张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985]
- 2 Li J. Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields. Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg, 2003, 13: 47–106
- 3 Li C, Li W. Weak Hilbert's 16th problem and the relative research (in Chinese). Adv Math, 2010, 39: 513–526 [李承治, 李伟固. 弱化希尔伯特第 16 问题及其研究现状. 数学进展, 2010, 39: 513–526]
- 4 Bernardo M, Budd C J, Champneys A R, et al. Piecewise-Smooth Dynamical Systems. London: Springer-Verlag, 2008
- 5 Kukucka M. Non-Smooth Dynamical Systems. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2000
- 6 Han M, Zhang W. On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems. J Differential Equations, 2010, 248: 2399–2416
- 7 Zou Y, Küpper T. Generalized Hopf bifurcation emanated from a corner for piecewise smooth planar systems. Nonlinear Anal, 2005, 62: 1–17
- 8 Chen X, Zhang W. Isochronicity of centers in a switching Bautin system. J Differential Equations, 2012, 252: 2877–2899
- 9 Li F, Yu P, Liu Y, et al. Centers and isochronous centers of a class of quasi-analytic switching systems. Sci China Math, 2018, 61: 1201–1218
- 10 Cen X, Liu C, Yang L, et al. Limit cycles by perturbing quadratic isochronous centers inside piecewise polynomial differential systems. J Differential Equations, 2018, 265: 6083–6126
- 11 Du Z, Li Y, Zhang W. Bifurcation of periodic orbits in a class of planar Filippov systems. Nonlinear Anal, 2008, 69: 3610–3628
- 12 Li S M, Zhao Y L, Cen X L. Limit cycles for a class of discontinuous planar quadratic differential system (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 43–52 [李时敏, 赵育林, 岑秀丽. 一类不连续平面二次微分系统的极限环. 中国科学: 数学, 2015, 45: 43–52]
- 13 Yang J, Zhao L. The cyclicity of period annuli for a class of cubic Hamiltonian systems with nilpotent singular points. J Differential Equations, 2017, 263: 5554–5581
- 14 Chen H, Duan S, Tang Y, et al. Global dynamics of a mechanical system with dry friction. J Differential Equations, 2018, 265: 5490–5519
- 15 Françoise J P, Ji H, Xiao D, et al. Global dynamics of a piecewise smooth system for brain lactate metabolism. Qual Theory Dyn Syst, 2019, 18: 315–332

- 16 Filippov A. Differential Equation with Discontinuous Right-Hand Sides. Amsterdam: Kluwer Academic Press, 1988
- 17 Buzzi C A, Medrado J C R, Teixeira M A. Generic bifurcation of refracted systems. *Adv Math*, 2013, 234: 653–666
- 18 Jacquemard A, Teixeira M A. On singularities of discontinuous vector fields. *Bull Sci Math*, 2003, 127: 611–633
- 19 Freire E, Ponce E, Torres F. Canonical discontinuous planar piecewise linear systems. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2012, 11: 181–211
- 20 Lum R, Chua L O. Global properties of continuous piecewise linear vector fields. Part I: Simplest case in  $\mathbb{R}^2$ . *Int J Circ Theory Appl*, 1991, 19: 251–307
- 21 Freire E, Ponce E, Rodrigo F, et al. Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 1998, 8: 2073–2097
- 22 Llibre J, Teixeira M A, Torregrosa J. Lower bounds for the maximum number of limit cycles of discontinuous piecewise linear differential systems with a straight line of separation. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 2013, 23: 1350066
- 23 Llibre J, Novaes D D, Teixeira M A. Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems. *Nonlinear Dynam*, 2015, 82: 1159–1175
- 24 Llibre J, Zhang X. Limit cycles for discontinuous planar piecewise linear differential systems separated by one straight line and having a center. *J Math Anal Appl*, 2018, 467: 537–549
- 25 Ponce E, Ros J, Vela E. The boundary focus-saddle bifurcation in planar piecewise linear systems: Application to the analysis of memristor oscillators. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2018, 43: 495–514
- 26 Wang J, Huang C, Huang L. Discontinuity-induced limit cycles in a general planar piecewise linear system of saddle-focus type. *Nonlinear Anal Hybrid Syst*, 2019, 33: 162–178
- 27 Huan S, Yang X. Existence of limit cycles in general planar piecewise linear systems of saddle-saddle dynamics. *Nonlinear Anal*, 2013, 92: 82–95
- 28 Wang J, Chen X, Huang L. The number and stability of limit cycles for planar piecewise linear systems of node-saddle type. *J Math Anal Appl*, 2019, 469: 405–427
- 29 Huan S, Yang X. On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems of node-node types. *J Math Anal Appl*, 2014, 411: 340–353
- 30 Freire E, Ponce E, Torres F. Planar Filippov Systems with Maximal Crossing Set and Piecewise Linear Focus Dynamics. *Progress and Challenges in Dynamical Systems*. New York: Springer, 2013
- 31 Freire E, Ponce E, Torres F. A general mechanism to generate three limit cycles in planar Filippov systems with two zones. *Nonlinear Dynam*, 2014, 78: 251–263
- 32 Medrado J C, Torregrosa J. Uniqueness of limit cycles for sewing planar piecewise linear systems. *J Math Anal Appl*, 2015, 431: 529–544

## On the existence and uniqueness of limit cycles in planar refracted systems

Shimin Li, Ting Chen, Yuji Liu & Xiaoli Li

**Abstract** This paper investigates the number of limit cycles in planar refracted systems. According to the dynamics of the left and right subsystems, we can divide them into the following six types: focus-focus, focus-saddle, focus-node, saddle-saddle, saddle-node and node-node. Using the Poincaré map, we prove that the refracted systems have at most one limit cycle with focus-node type.

**Keywords** limit cycle, piecewise linear systems, refracted systems

**MSC(2020)** 34A36, 34C05, 37G15

**doi:** 10.1360/N012019-00112