



相对 Alexandrov-Fenchel 型不等式

献给沈一兵教授 85 寿辰

王国芳^{1*}, 翁良俊², 夏超³

1. Mathematisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Freiburg D-79104, Germany;

2. 安徽大学数学科学学院, 合肥 230601;

3. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005

E-mail: guofang.wang@math.uni-freiburg.de, ljweng08@mail.ustc.edu.cn, chaoxia@xmu.edu.cn

收稿日期: 2022-06-21; 接受日期: 2022-08-18; 网络出版日期: 2022-11-21; * 通信作者

中国博士后科学基金会 (批准号: 2021M702143) 和国家自然科学基金 (批准号: 11871406 和 12171260) 资助项目

摘要 Alexandrov-Fenchel 不等式是凸几何中的重要不等式之一, 它的特殊形式可以看作是高阶均质积分之间的等周型不等式. 近年来, 带自由边界或毛细边界超曲面获得了很多关注. 本文从微分几何角度研究球体内或半空间中带有自由边界或毛细边界凸超曲面上的一类相对 Alexandrov-Fenchel 型不等式, 并综述它的最新进展. 首先, 介绍单位球体或半空间中毛细边界超曲面的高阶 Minkowski 型积分公式. 从第一变分角度给出单位球体或半空间中毛细边界超曲面的均质积分的定义. 然后, 本文利用 Minkowski 型公式构造局部限制型的超曲面曲率流, 通过分析流的长时间存在性和收敛性, 证明单位球体和半空间中一类相对 Alexandrov-Fenchel 型不等式.

关键词 相对均质积分 相对 Alexandrov-Fenchel 型不等式 限制型超曲面曲率流 毛细边界

MSC (2020) 主题分类 53E40, 53C24, 53E10

1 Alexandrov-Fenchel 等周型不等式

给定 Σ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中嵌入的闭超曲面, $\hat{\Sigma}$ 为 Σ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中所围成的有界区域, 经典的等周不等式给出

$$\frac{|\Sigma|}{\omega_n} \geq \left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{b_{n+1}} \right)^{\frac{n}{n+1}}, \quad (1.1)$$

并且等号成立当且仅当 Σ 是一个球面, 其中

$$b_{n+1} = |\mathbb{B}^{n+1}| \quad \text{和} \quad \omega_n = (n+1)b_{n+1} = |\mathbb{S}^n|.$$

英文引用格式: Wang G F, Weng L J, Xia C. The relative Alexandrov-Fenchel type inequalities (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1671–1684, doi: 10.1360/SSM-2022-0116

经典等周不等式的一个自然推广是 Alexandrov-Fenchel 不等式: 如果 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个 C^2 光滑凸的闭超曲面, 则

$$\frac{\mathcal{V}_l(\widehat{\Sigma})}{b_{n+1}} \geq \left(\frac{\mathcal{V}_k(\widehat{\Sigma})}{b_{n+1}} \right)^{\frac{n+1-l}{n+1-k}}, \quad 0 \leq k < l \leq n, \quad (1.2)$$

并且等号成立当且仅当 Σ 是一个球面, 其中 $\mathcal{V}_{k+1}(\widehat{\Sigma})$ 称为关于 $\widehat{\Sigma}$ 的均质积分 (quermassintegral), 定义为

$$\mathcal{V}_{k+1}(\widehat{\Sigma}) := \frac{1}{n+1} \int_{\Sigma} H_k dA, \quad 0 \leq k \leq n, \quad \mathcal{V}_0(\widehat{\Sigma}) = |\widehat{\Sigma}|, \quad (1.3)$$

其中 H_k 定义为关于 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的归一化 k 阶平均曲率, 即

$$H_k := \frac{1}{\binom{n}{k}} \sigma_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

其中 σ_k 定义为取值在 Σ 的主曲率上的 k 阶基本对称多项式函数, 本文采用约定

$$\sigma_0 = H_0 = 1, \quad \sigma_{n+1} = H_{n+1} = 0.$$

易见, Alexandrov-Fenchel 不等式 (1.2) 包括了经典的等周不等式 ($k=0, l=1$) 和 Minkowski 不等式 ($k=1, l=2$). 在凸几何中, 描述均质积分 $\mathcal{V}_k$ 和 $\mathcal{V}_l$ 之间关系的 Alexandrov-Fenchel 不等式 (1.2) 扮演着重要的角色. 事实上, 文献 [3, 4, 36] 还研究了一类更广的关于混合体积的几何不等式. 此外, 最近 30 年来, 人们关心能否利用超曲面曲率流方法来重证不等式 (1.2). 一方面, 期望减弱以前的关于区域的限制性几何条件 (如凸性); 另一方面, 希望用来证明一些已知或未知的几何不等式. 事实上, McCoy^[29] 通过引进一类归一化的非线性曲率流重新证明了凸区域上的 (1.2), 并且这套技术被用来研究关于一般的各向异性均质曲率积分的几何不等式情形, 如文献 [44, 47] 等; Guan 和 Li^[18] 利用逆曲率流将 (1.2) 的凸性条件减弱为区域只要是 l -凸和星形即可, 他们引进的流方程形如

$$\partial_t x = \frac{H_{l-1}}{H_l} \nu. \quad (1.4)$$

这个流等价于重整化的流方程

$$\partial_t x = \left(\frac{H_{l-1}}{H_l} - \langle x, \nu \rangle \right) \nu, \quad (1.5)$$

其中一个重要的观察是 l -凸和星形性沿着这个流是保持的. 进一步的相关研究可参见文献 [20, 21]. 此外, 还有很多对于更一般的外蕴空间中 Alexandrov-Fenchel 型不等式的研究, 例如, 双曲空间的相关结果可以参见文献 [5, 6, 14, 16, 23, 24, 26, 35, 40] 和脚注¹⁾ 等, 球空间形式中的结果可以参见文献 [12, 13, 28, 43] 等.

为了说明 Guan 和 Li^[18] 的证明思想, 需要如下的关于均质积分 $\mathcal{V}_k(\widehat{\Sigma})$ 的第一变分公式, 具体证明参见文献 [32].

定理 1.1^[32] 假设 $x: M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 为一族闭的嵌入超曲面, 且满足

$$\partial_t x = f \nu,$$

1) Brendle S, Guan P F, Li J F. An inverse curvature type hypersurface flow in space forms. Private communication

则

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}_{k+1}(\widehat{\Sigma}_t) = \frac{n-k}{n+1} \int_{\Sigma_t} H_{k+1} f dA_t, \quad (1.6)$$

其中 $\Sigma_t := x(M, t)$.

Euclid 空间中闭超曲面上的 Minkowski 积分公式如下: 给定光滑闭超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, 其由等距浸入 $x: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 参数化, 其中 M 是一个 n 维光滑闭流形, 则

$$\int_{\Sigma} H_k dA = \int_{\Sigma} H_{k+1} \langle x, \nu \rangle dA, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (1.7)$$

其中 ν 是 Σ 的单位外法向. 关于 Minkowski 公式 (1.7) 的研究历史和证明可参见文献 [9, 22, 42]. 在不引起记号歧义的地方, 本文不区分 M 和 Σ .

结合 Euclid 空间中闭超曲面上的 Minkowski 积分公式, Guan 和 Li^[18] 观察到如下关于均质积分 $\mathcal{V}_k$ 的单调性质.

命题 1.1^[18] 假设流方程 (1.5) 的解存在且 Σ_t 保持 l -凸性, 则对于任意 $1 \leq k < l \leq n$, $\mathcal{V}_l(\widehat{\Sigma}_t)$ 随着时间保持不变, 而 $\mathcal{V}_k(\widehat{\Sigma}_t)$ 随着时间单调递增.

证明 由定理 1.1 可知

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{V}_l(\widehat{\Sigma}_t) &= \frac{n+1-l}{n+1} \int_{\Sigma_t} f H_l dA_t \\ &= \frac{n+1-l}{n+1} \int_{\Sigma_t} (H_{l-1} - H_l \langle x, \nu \rangle) dA_t \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中最后一个等号利用了 (1.7). 对 $1 \leq k < l \leq n$, 再用定理 1.1, 可得

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{V}_k(\widehat{\Sigma}_t) &= \frac{n+1-k}{n+1} \int_{\Sigma_t} f H_k dA_t \\ &= \frac{n+1-k}{n+1} \int_{\Sigma_t} \left(H_k \frac{H_{l-1}}{H_l} - H_k \langle x, \nu \rangle \right) dA_t \\ &\geq \frac{n+1-k}{n+1} \int_{\Sigma_t} (H_{k-1} - H_k \langle x, \nu \rangle) dA_t \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中最后两行分别利用了 Newton-MacLaurin 不等式 $\frac{H_k}{H_{k-1}} \geq \frac{H_l}{H_{l-1}}$ 和 Minkowski 公式 (1.7). $\square$

另一方面, Gerhard^[17] 和 Urbas^[37] 证明了流方程 (1.5) 解的长时间存在性和收敛性. 即如果初始闭超曲面是 l -凸和星形的, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 流方程 (1.5) 的解收敛到一个标准球面. 结合单调性 (命题 1.1), Guan 和 Li^[18] 证明了 l -凸的星形闭超曲面上的 Alexandrov-Fenchel 不等式 (1.2).

能否去掉超曲面的星形限制条件? 目前仍是个公开问题, 即只假定 l -凸性条件下, 能否证明 Alexandrov-Fenchel 不等式 (1.2) 成立? 最近, Agostiniani 等^[1] 从非线性位势理论的角度解决了 $l=2$ 且 $k=0$ 的情形.

2 单位球内相对 Alexandrov-Fenchel 型不等式

相对等周问题是等周问题的一个限制版本, 考虑的是, 给定 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中一个区域 Ω , 寻找区域内超曲面 Σ , 它在 Ω 内围成一个有限给定体积的区域 Ω_1 , 并且该超曲面在所有这样的超曲面中面积最小

(参见文献 [11]). 如果 Ω 是有界区域, 则相对等周问题也称为分块 (partitioning) 问题 (参见文献 [30]). 当给定的区域 Ω 是 Euclid 球体时, 相对等周问题由 Burago 和 Maz'ya^[10] 及 Bokowski 和 Sperner^[8] 通过对称化方法给出分类结果. 稳定的常平均曲率超曲面的分类问题最近由 Wang 和 Xia 解决 (参见文献 [31, 33, 41] 等).

一个自然的问题是, 在这个框架下, 如何定义均质积分以及相应的 Alexandrov-Fenchel 型不等式? 我们分别称之为“相对均质积分”和“相对 Alexandrov-Fenchel 型不等式”. 本节以及下一节将阐述这个问题.

为了叙述方便, 首先讨论 $\Omega = \mathbb{B}^{n+1}$, 即单位球体内的相关问题. 此时 $\Sigma := x(M)$ 为 $\mathbb{B}^{n+1}$ 中的光滑嵌入超曲面, 其中 M 是 n 维可定向的光滑带边流形, 并且满足

$$\text{int}(\Sigma) \subset \mathbb{B}^{n+1}, \quad \partial\Sigma \subset \mathbb{S}^n.$$

记 $\widehat{\Sigma}$ 为 Σ 和球面 $\partial\mathbb{B}^{n+1}$ 所围成的两个有界区域中的一个, 且 $\partial(\widehat{\Sigma}) = \Sigma \cup \partial\widehat{\Sigma}$, 其中 $\partial\widehat{\Sigma} \subset \mathbb{S}^n$. 为了后文需要, 假定 $\partial\Sigma$ 和 $\mathbb{S}^n := \partial\mathbb{B}^{n+1}$ 相交于一个固定的常值夹角 $\theta \in (0, \pi)$, θ 在很多文献中被称为“接触角”, 这类超曲面被统称为带毛细边界的超曲面. 特别地, 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 称其为带自由边界的超曲面.

正如前面所说, 球体中的相对等周问题由 Burago 和 Maz'ya^[10] 及 Bokowski 和 Sperner^[8] 给出了分类, 带自由边界的球冠是体积固定时的面积最小解. 此外, 除了研究经典的体积和面积泛函之间关系, 在这类背景下还有一个更有趣的能量泛函:

$$|\Sigma| - \cos \theta |\partial\widehat{\Sigma}|, \quad (2.1)$$

其中 $\theta \in (0, \pi)$ 是某个固定的常夹角, $|\partial\widehat{\Sigma}|$ 称为湿润能量 (wetting area). (2.1) 自然出现在毛细现象中, 更多的物理背景介绍参见文献 [15], 此时一个自然的相对等周问题是, 固定体积的所有单位球体内的超曲面中, 是否存在能量泛函 (2.1) 的最小解? 最近, Wang 和 Xia^[41] 给出了这类相对等周问题的局部最小解的分类, 即它是带毛细边界的球冠.

为了定义 Σ 上的相对均质积分和研究相对 Alexandrov-Fenchel 型不等式, 需要引入一类新的关于带边超曲面的 Minkowski 型积分公式. 给定单位向量 $e \in \mathbb{R}^{n+1}$, 令

$$X_e := \langle x, e \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)e. \quad (2.2)$$

事实上, X_e 是一个共形 Killing 向量场 (参见文献 [41, 命题 3.1]), 它满足

$$\mathcal{L}_{X_e} \delta = \langle x, e \rangle \delta, \quad (2.3)$$

以及在 $\mathbb{S}^n$ 上成立

$$\langle X_e, \bar{N} \rangle = 0,$$

其中 $\bar{N}$ 是 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{B}^{n+1}$ 的单位外法向量. 利用 X_e 的这种性质, 文献 [41, 命题 3.2] 证明如下的 Minkowski 型积分公式:

$$n \int_{\Sigma} (\langle x, e \rangle + \cos \theta \langle \nu, e \rangle) dA = \int_{\Sigma} H \langle X_e, \nu \rangle dA. \quad (2.4)$$

这类 Minkowski 积分公式的优点在于没有边界项出现, 这给进一步从曲率流方程的角度研究等周型不等式或高阶几何不等式提供了可能性.

更进一步地, (2.4) 可以推广到更一般的带自由边界 ($\theta = \frac{\pi}{2}$, 参见文献 [41]) 或毛细边界 ($k = 2$, 参见文献 [38]; $3 \leq k \leq n$, 参见文献 [45]) 超曲面的高阶平均曲率情形, 即如下的高阶 Minkowski 型积分公式.

命题 2.1 ^[38, 41, 45] 假设 $\Sigma := x(M) \subset \mathbb{B}^{n+1}$ 是一个光滑浸入带有毛细边界的超曲面, 对所有的 $1 \leq k \leq n$, 成立

$$\int_{\Sigma} H_{k-1}(\langle x, e \rangle + \cos \theta \langle \nu, e \rangle) dA = \int_{\Sigma} H_k \langle X_e, \nu \rangle dA, \quad (2.5)$$

其中 dA 是 Σ 关于单位球中的诱导度量 g 的面积元.

证明 令 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 Σ 上标准正交标架, 定义向量场

$$P_e := \langle \nu, e \rangle x - \langle x, \nu \rangle e.$$

记 X_e^T 和 P_e^T 分别为 X_e 和 P_e 在 Σ 上的切向投影向量场. 由 (2.3) 知

$$\frac{1}{2}(\nabla_i(X_e^T)_j + \nabla_j(X_e^T)_i) = \langle x, e \rangle g_{ij} - h_{ij} \langle X_e, \nu \rangle. \quad (2.6)$$

另一方面, 由于 $\langle P_e, \nu \rangle = 0$, 直接计算可得

$$\nabla_i(P_e^T)_j = D_i(P_e)_j = \langle \nu, e \rangle g_{ij} + h_{il} \langle e, e_l \rangle \langle x, e_j \rangle - h_{il} \langle x, e_l \rangle \langle e, e_j \rangle. \quad (2.7)$$

在等式 (2.6) 和 (2.7) 两边同时乘上 $\sigma_{k-1}^{ij} := \frac{\partial \sigma_k}{\partial h_i^j}$, 进行线性组合得到

$$\sigma_{k-1}^{ij} \nabla_i(X_e^T + \cos \theta P_e^T)_j = (n - k + 1) \sigma_{k-1}(\langle x, e \rangle + \cos \theta \langle \nu, e \rangle) - k \sigma_k \langle X_e, \nu \rangle.$$

下面只需要证明

$$\int_{\Sigma} \sigma_{k-1}^{ij} \nabla_i(X_e^T + \cos \theta P_e^T)_j dA = 0.$$

事实上, 由于 $\nabla_i \sigma_{k-1}^{ij} = 0$ 以及 μ 是 $\partial \Sigma$ 在 Σ 中的单位外余法向, 同时 μ 也是主方向, 再结合分部积分公式, 可得

$$\int_{\Sigma} \sigma_{k-1}^{ij} \nabla_i(X_e^T + \cos \theta P_e^T)_j dA = \int_{\partial \Sigma} \sigma_{k-1}^{\mu\mu} \langle X_e + \cos \theta P_e, \mu \rangle ds.$$

注意到在 $\partial \Sigma$ 上成立

$$\langle X_e + \cos \theta P_e, \mu \rangle = 0,$$

将此代入上式积分中, 可知命题得证. $\square$

当定义带边超曲面的相对均质积分时, 由于超曲面的边界落在球面 $\mathbb{S}^n := \partial \mathbb{B}^{n+1}$ 上, 所以会牵扯到球面上的几何量, 在此先回顾关于球面上的均质积分的定义. 给定凸体 $K \subset \mathbb{S}^n$ 带有光滑边界 ∂K , 类比 Euclid 空间中的情形, 关于 K 的均质积分 $W_k^{\mathbb{S}^n}$ 定义为

$$W_0^{\mathbb{S}^n}(K) := |K|,$$

$$W_1^{\mathbb{S}^n}(K) := \frac{|\partial K|}{n},$$

$$W_k^{\mathbb{S}^n}(K) := \frac{1}{n} \int_{\partial K} H_{k-1}^{\mathbb{S}^n} dA + \frac{k-1}{n-k+2} W_{k-2}^{\mathbb{S}^n}(K), \quad \text{当 } 2 \leq k \leq n \text{ 时},$$

其中, $H_k^{\mathbb{S}^n} := \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \sigma_k^{\mathbb{S}^n}$, $\sigma_k^{\mathbb{S}^n}$ 为取值在 $\partial K \subset \mathbb{S}^n$ 上 $n-1$ 个主曲率的 k 阶基本对称多项式函数, 这里采用约定 $H_0^{\mathbb{S}^n} = 1$, $H_n^{\mathbb{S}^n} = 0$. 特别地, 由球面上的 Gauss-Bonnet-Chern 定理可知

$$W_n^{\mathbb{S}^n}(K) = \frac{\omega_{n-1}}{n}.$$

关于 $W_k^{\mathbb{S}^n}$, 文献 [32, 第 3 节] 证明了如下的第一变分公式 (也可参见文献 [7, 第 4 节]).

命题 2.2 [7, 32] 考虑球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中一族带光滑边界的凸体 $\{K_t\}$, 假设其边界 ∂K_t 沿着法向的演化速度函数为 f , 则对于任意 $0 \leq k \leq n$, 有

$$\frac{d}{dt} W_k^{\mathbb{S}^n}(K_t) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \int_{\partial K_t} \sigma_k^{\mathbb{S}^n} f dA_t = \frac{n-k}{n} \int_{\partial K_t} H_k^{\mathbb{S}^n} f dA_t. \quad (2.8)$$

下面将定义单位球体内带自由边界 [34] 和毛细边界 [45] 超曲面上的均质积分.

给定 $\Sigma \subset \mathbb{B}^{n+1}$ 为如本节开始所定义的带毛细边界的超曲面, 记 $\widehat{\Sigma}$ 为 Σ 在 $\mathbb{B}^{n+1}$ 内部所围成的有界区域, $\widehat{\partial \Sigma} \subset \mathbb{S}^n$ 为 $\partial \Sigma$ 在 $\mathbb{S}^n$ 上面围成的有界区域, 其中 $\partial(\widehat{\Sigma}) = \Sigma \cup \widehat{\partial \Sigma}$. 定义关于 $\widehat{\Sigma} \subset \mathbb{B}^{n+1}$ 的相对均质积分 $W_{k,\theta}$ 如下:

$$\begin{aligned} W_{0,\theta}(\widehat{\Sigma}) &:= |\widehat{\Sigma}|, \\ W_{1,\theta}(\widehat{\Sigma}) &:= \frac{1}{n+1} (|\Sigma| - \cos \theta |\widehat{\partial \Sigma}|) = \frac{1}{n+1} (|\Sigma| - \cos \theta W_0^{\mathbb{S}^n}(\widehat{\partial \Sigma})), \\ W_{n+1,\theta}(\widehat{\Sigma}) &:= \frac{1}{n+1} \left\{ \int_{\Sigma} H_n dA - \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n+l} \binom{n}{l} \cos^{n-1-l} \theta \sin^l \theta W_l^{\mathbb{S}^n}(\widehat{\partial \Sigma}) \right\}, \end{aligned}$$

以及对所有的 $1 \leq k \leq n-1$,

$$\begin{aligned} W_{k+1,\theta}(\widehat{\Sigma}) &:= \frac{1}{n+1} \left\{ \int_{\Sigma} H_k dA - \cos \theta \sin^k \theta W_k^{\mathbb{S}^n}(\widehat{\partial \Sigma}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k+l}}{n-l} \binom{k}{l} [(n-k) \cos^2 \theta + (k-l)] \cos^{k-1-l} \theta \sin^l \theta W_l^{\mathbb{S}^n}(\widehat{\partial \Sigma}) \right\}. \end{aligned}$$

对于上述定义的相对均质积分 $W_{k,\theta}$, 它满足如下的第一变分公式.

定理 2.1 [34, 45] 考虑一族带自由边界或毛细边界的光滑超曲面 $\Sigma_t \subset \mathbb{B}^{n+1}$ 且它们由等距嵌入 $x(\cdot, t): M^n \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ 给出, 并且对某个速度函数 f , 其满足

$$(\partial_t x)^\perp = f \nu. \quad (2.9)$$

那么对所有的 $0 \leq k \leq n-1$, 成立

$$\frac{d}{dt} W_{k+1,\theta}(\widehat{\Sigma}_t) = \frac{n-k}{n+1} \int_{\Sigma_t} H_{k+1} f dA_t \quad (2.10)$$

和

$$\frac{d}{dt} W_{n+1,\theta}(\widehat{\Sigma}_t) = 0. \quad (2.11)$$

为了研究关于相对均质积分 $W_{k,\theta}$ 的 Alexandrov-Fenchel 型不等式, 引入如下的曲率流方程:

$$\begin{cases} \partial_t x(\cdot, t) = f(\cdot, t)\nu(\cdot, t) + T(\cdot, t), & \text{在 } M \times [0, T) \text{ 内,} \\ \langle \nu(\cdot, t), \bar{N} \circ x(\cdot, t) \rangle = -\cos \theta, & \text{在 } \partial M \times [0, T) \text{ 上,} \end{cases} \quad (2.12)$$

其中, $T(\cdot, t)$ 是 $\partial_t x$ 的切向分量; 对所有的 $1 \leq l \leq n$, 取定

$$f := \frac{\langle x + \cos \theta \nu, e \rangle}{\frac{H_l}{H_{l-1}}} - \langle X_e, \nu \rangle.$$

注意到与闭超曲面^[18, 19]或者带自由边界^[34]的曲率流方程对比, 当考虑毛细边界时, 需要加上一个切向分量 T , 这是为了保持 $x|_{\partial M}$ 限制在边界上时随着时间演化仍然保持在 $\mathbb{S}^n$ 内. 特别地, T 满足

$$f\nu + T|_{\partial\Sigma_t} = \partial_t x|_{\partial M} \in T\mathbb{S}^n.$$

根据第一变分公式 (2.10) 和 (2.11) 可知, 沿着曲率流方程 (2.12), $W_{l,\theta}(\widehat{\Sigma}_t)$ 随着时间保持不变, 而 $W_{k,\theta}(\widehat{\Sigma}_t)$ ($1 \leq k < l \leq n$) 随着时间递增.

命题 2.3^[34, 45] 假设曲率流方程 (2.12) 的解存在, 那么对于任意 $1 \leq k < l \leq n$, $W_{l,\theta}(\widehat{\Sigma})$ 随着时间保持不变, 而 $W_{k,\theta}(\widehat{\Sigma})$ 随着时间单调递增.

证明 由定理 2.1 可知

$$\frac{d}{dt} W_{l,\theta}(\widehat{\Sigma}_t) = \frac{n-l+1}{n+1} \int_{\Sigma_t} [H_{l-1}(\langle x, e \rangle + \cos \theta \langle \nu, e \rangle) - H_l \langle X_e, \nu \rangle] = 0,$$

其中最后一行利用了 Minkowski 公式 (2.5).

对于任意 $1 \leq k < l \leq n$, 再由定理 2.1 知

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_{k,\theta}(\widehat{\Sigma}_t) &= \frac{n+1-k}{n+1} \int_{\Sigma_t} H_k \left[\frac{H_{l-1}}{H_l} (\langle x, e \rangle + \cos \theta \langle \nu, e \rangle) - \langle X_e, \nu \rangle \right] \\ &\geq \frac{n+1-k}{n+1} \int_{\Sigma_t} [H_{k-1}(\langle x, e \rangle + \cos \theta \langle \nu, e \rangle) - H_k \langle X_e, \nu \rangle] \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中最后两步分别利用了 Newton-MacLaurin 不等式和 Minkowski 公式 (2.5). $\square$

下面需要选取恰当的单位向量 $e \in \mathbb{S}^n$, 使得 (2.12) 是一个抛物型流, 从而得到流方程 (2.12) 的短时间存在性. 对于严格凸超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{B}^{n+1}$, 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 任意选取 $e \in \text{int}(\widehat{\partial\Sigma})$ 即可 (参见文献 [25]); 当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, Weng 和 Xia^[45] 给出合适的 e .

命题 2.4^[25, 45] 假设 $\Sigma := x(M) \subset \mathbb{B}^{n+1}$ 是一个带毛细边界的严格凸超曲面, 并且 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 那么存在只依赖于 Σ 的单位向量 $e \in \text{int}(\widehat{\partial\Sigma})$ 和正常数 $\delta_0 > 0$ 满足

$$\langle x + \cos \theta \nu, e \rangle \geq \delta_0 > 0.$$

进而, 如果能够证明曲率流方程 (2.12) 解的长时间存在性和收敛性, 从而可以得到关于 $W_{k,\theta}$ 的 Alexandrov-Fenchel 型不等式. 文献 [34, 45] 分别证明了 $l = n$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $l = n$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 的情形.

定理 2.2^[34, 45] 当 $n \geq 2$ 时, 假设初始超曲面 $\Sigma_0 := x_0(M) \subset \mathbb{B}^{n+1}$ 是一个带毛细边界的嵌入的凸超曲面, 并且夹角满足 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 和 $l = n$, 那么对所有的时间 $t \in [0, \infty)$, 流方程 (2.12) 总存在一个光滑解 $x(\cdot, t)$ 满足 $x(\cdot, 0) = x_0(\cdot)$. 并且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(\cdot, t)$ 光滑收敛到一个毛细球冠.

这里的毛细球冠指一族关于某个固定常单位向量 $e \in \mathbb{R}^{n+1}$ 且半径为 $r \in (0, \infty)$ 的球冠, 即满足

$$C_{\theta,r}(e) := \{x \in \overline{\mathbb{B}}^{n+1} : |x - \sqrt{r^2 + 2r \cos \theta + 1}e| = r\} \quad (2.13)$$

或

$$C_{\theta,\infty}(e) := \{x \in \overline{\mathbb{B}}^{n+1} : \langle x, e \rangle = \cos \theta\}.$$

定理 2.2 的证明基于先验估计, 需要首先将曲率流方程约化为关于某个数量函数的流方程同时边界满足 Neumann 边值条件, 具体细节可参见文献 [34, 45].

更进一步地, 结合单调性 (命题 2.3), 证明如下的单位球内带自由边界或毛细边界超曲面上的相对 Alexandrov-Fenchel 型不等式和 Gauss-Bonnet-Chern 型定理.

定理 2.3 [34, 45] 假设 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 和 $\Sigma \subset \overline{\mathbb{B}}^{n+1}$ 为一个带毛细边界的光滑嵌入的凸超曲面, 那么

$$W_{n+1,\theta}(\widehat{\Sigma}) = \frac{\omega_n}{2(n+1)} I_{\sin^2 \theta} \left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (2.14)$$

其中 $I_s(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ 是一个归一化的 Beta 函数, 定义为

$$I_s \left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2} \right) := \frac{\int_0^s t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt}{\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt}.$$

对所有的 $0 \leq k \leq n-1$, 有

$$W_{n,\theta}(\widehat{\Sigma}) \geq (f_n \circ f_k^{-1})(W_{k,\theta}(\widehat{\Sigma})), \quad (2.15)$$

其中 $f_k := f_k(r)$ 是一个严格递增函数, 满足

$$f_k(r) := W_{k,\theta}(\widehat{C_{\theta,r}}),$$

其中 $C_{\theta,r}$ 是如 (2.13) 定义的毛细球冠. (2.15) 中等号成立当且仅当 Σ 是一个毛细球冠.

类比闭曲面上的 Alexandrov-Fenchel 不等式或者 Guan 和 Li [18] 的结果, 自然地期望 (2.15) 在更一般的情形也成立, 即对于 $1 \leq l \leq n$, $\theta \in (0, \pi)$, 以及带毛细边界的星形的 k -凸超曲面情形 (2.15) 成立.

3 半空间中相对 Alexandrov-Fenchel 型不等式

本节考虑落在半空间 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中的带边紧致超曲面上的相对均质积分和相对 Alexandrov-Fenchel 型不等式. 已知 Σ 为 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中的光滑嵌入超曲面, 并且满足 $\text{int}(\Sigma) \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ 和 $\partial \Sigma \subset \partial \mathbb{R}_+^{n+1}$. 记 $\widehat{\Sigma}$ 为 Σ 和超平面 $\partial \mathbb{R}_+^{n+1}$ 所围成的有界区域. 根据经典的等周不等式 (1.1), 易见

$$\frac{|\Sigma|}{|\mathbb{S}_+^n|} \geq \left(\frac{|\widehat{\Sigma}|}{|\mathbb{B}_+^{n+1}|} \right)^{\frac{n}{n+1}}, \quad (3.1)$$

其中 $\mathbb{B}_+^{n+1}$ 是上半单位球, $\mathbb{S}_+^n$ 是上半单位球面, 并且等号成立当且仅当 Σ 是一个半球. $\widehat{\Sigma}$ 作为 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中的有界区域有两部分边界, 分别记为 Σ 和 $\widehat{\partial \Sigma}$, 其中 $\widehat{\partial \Sigma} \subset \partial \mathbb{R}_+^{n+1}$, 两者相交的公共边界为 $\partial \Sigma$. 假定 Σ 和 $\partial \mathbb{R}_+^{n+1}$ 相交于接触角 $\theta \in (0, \pi)$, 此时称嵌入超曲面 Σ 是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中带毛细边界的超曲面.

类似第 2 节的讨论, 自然地研究比面积 $|\Sigma|$ 更一般的能量泛函

$$|\Sigma| - \cos \theta |\widehat{\partial \Sigma}|, \quad (3.2)$$

对应的相对等周问题如下: 在半空间中体积固定的带边超曲面中, 是否有能量泛函 (3.2) 最小解的分类? 事实上, 此时有如下的相对等周不等式成立:

$$\frac{|\Sigma| - \cos \theta |\widehat{\partial \Sigma}|}{|\mathbb{S}_\theta^n| - \cos \theta |\widehat{\partial \mathbb{S}_\theta^n}|} \geq \left(\frac{|\widehat{\Sigma}|}{|\mathbb{B}_\theta^{n+1}|} \right)^{\frac{n}{n+1}}, \quad (3.3)$$

并且等号成立当且仅当 Σ 是一个毛细球冠, 其中,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_\theta^n &= \{x \in \mathbb{S}^n \mid \langle x, e_{n+1} \rangle > \cos \theta\}, \quad \mathbb{B}_\theta^{n+1} = \{x \in \mathbb{B}^{n+1} \mid \langle x, e_{n+1} \rangle > \cos \theta\}, \\ \widehat{\partial \mathbb{S}_\theta^n} &= \{x \in \mathbb{B}^{n+1} \mid \langle x, e_{n+1} \rangle = \cos \theta\}. \end{aligned}$$

注意到, 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 通过对超曲面 Σ 沿着 $\partial \mathbb{R}_+^{n+1}$ 进行反演得到一个光滑闭超曲面, 再利用闭凸超曲面的结论 (1.1) 可以直接得到相对等周不等式 (3.1), 但是对于一般的毛细边界, 即 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, 这种方法不适用. 相对等周不等式 (3.3) 的证明可以通过球面对称化方法完成 (参见文献 [27, 46]).

为了后文叙述方便, 记 $e = -e_{n+1}$, 其中 e_{n+1} 是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中第 $n+1$ 个取正方向的坐标轴, 令 μ 为 $\partial \Sigma$ 关于 Σ 的单位外法向, $\bar{\nu}$ 为 $\partial \Sigma$ 关于 $\partial \mathbb{R}_+^{n+1}$ 的单位外法向, 使得 $\{\nu, \mu\}$ 和 $\{\bar{\nu}, \bar{N}\}$ 在 $\partial \Sigma \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ 的法丛中具有相同的定向, 由接触角 θ 的定义可知

$$\langle \nu, \bar{N} \rangle = \cos(\pi - \theta).$$

从而

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sin \theta \mu - \cos \theta \nu, \\ \bar{\nu} &= \cos \theta \mu + \sin \theta \nu, \end{aligned} \quad (3.4)$$

记 D 为半空间中 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 关于标准度量 δ 的 Levi-Civita 联络, ∇ 是 Σ 上关于由浸入 x 决定的诱导度量 g 的 Levi-Civita 联络, x 的第二基本形式 h 定义为

$$D_X Y = \nabla_X Y - h(X, Y)\nu,$$

对于任意 $X, Y \in T\Sigma$, 令 $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$ 为 Σ 的主曲率, 即它是 h 关于诱导度量 g 的特征值. 对 $1 \leq k \leq n$, 令 $\sigma_k = \sigma_k(\kappa)$ 和 $H_k = H_k(\kappa)$ 分别为 Σ 的 k 阶平均曲率和归一化的 k 阶平均曲率, 并约定

$$\sigma_0 = H_0 = 1, \quad \sigma_{n+1} = H_{n+1} = 0.$$

更一般地, 关于半空间中带毛细边界的超曲面引入了一类更广的几何量 $\mathcal{V}_{k,\theta}$, 一方面, 它可以视为能量泛函 (3.2) 的高阶推广; 另一方面, 它可以视为全空间中闭超曲面的均质积分 (1.3) 在半空间中的自然对应量, 即相对均质积分.

定义 $\mathcal{V}_{k,\theta}$ 如下:

$$\mathcal{V}_{0,\theta}(\widehat{\Sigma}) := |\widehat{\Sigma}|, \quad \mathcal{V}_{1,\theta}(\widehat{\Sigma}) := \frac{1}{n+1} (|\Sigma| - \cos \theta |\widehat{\partial \Sigma}|),$$

对所有的 $1 \leq k \leq n$, 有

$$\mathcal{V}_{k+1,\theta}(\widehat{\Sigma}) := \frac{1}{n+1} \left(\int_{\Sigma} H_k dA - \frac{\cos \theta \sin^k \theta}{n} \int_{\partial \Sigma} H_{k-1}^{\mathbb{R}^n} ds \right), \quad (3.5)$$

其中 $H_{k-1}^{\mathbb{R}^n}$ 是关于 $\partial \Sigma \subset \mathbb{R}^n$ 的归一化 $k-1$ 阶平均曲率. 特别地,

$$\mathcal{V}_{n+1,\theta}(\widehat{\Sigma}) = \frac{1}{n+1} \int_{\Sigma} H_n dA - \cos \theta \sin^n \theta \frac{\omega_{n-1}}{n(n+1)}.$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 上述相对均质积分 $\mathcal{V}_{k+1,\theta}$ 即是经典的均质积分 (1.3).

类似单位球体内的情形, 首先得到半空间中带毛细边界超曲面上高阶 Minkowski 型积分公式.

命题 3.1 ^[39] $\Sigma := x(M) \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ 为给定的一个光滑浸入带有毛细边界的超曲面, 则对所有 $1 \leq k \leq n$, 成立

$$\int_{\Sigma} H_{k-1} (1 + \cos \theta \langle \nu, e \rangle) dA = \int_{\Sigma} H_k \langle x, \nu \rangle dA, \quad (3.6)$$

其中 dA 是 Σ 关于半空间中的诱导度量 g 的面积元.

特别地, 当 $k=1$ 或 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, Minkowski 积分公式 (3.6) 是熟知的 (参见文献 [2, 命题 5.1 的证明] 和 [19, 命题 2.5]). 对于后续的研究, 需要关于一般夹角 θ 的高阶 Minkowski 型公式.

在 (3.5) 中, 定义的相对均质积分 $\mathcal{V}_{k,\theta}$ 满足如下的第一变分公式.

定理 3.1 ^[39] 考虑一族光滑带毛细边界的超曲面 $\Sigma_t \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ 且它们由等距嵌入 $x(\cdot, t) : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ 给出, 并且对某个速度函数 f , 其满足

$$(\partial_t x)^\perp = f\nu,$$

那么对所有的 $0 \leq k \leq n$, 成立

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}_{k,\theta}(\widehat{\Sigma}_t) = \frac{n+1-k}{n+1} \int_{\Sigma_t} f H_k dA_t \quad (3.7)$$

和

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}_{n+1,\theta}(\widehat{\Sigma}_t) = 0. \quad (3.8)$$

此外, 可以证明一类半空间中带毛细边界的凸超曲面上的 Alexandrov-Fenchel 不等式.

定理 3.2 ^[39] 当 $n \geq 2$ 时, 假设 $\Sigma \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ 为一个带毛细边界的凸超曲面, 并且夹角满足 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 那么

$$\frac{\mathcal{V}_{n,\theta}(\widehat{\Sigma})}{b_\theta} \geq \left(\frac{\mathcal{V}_{k,\theta}(\widehat{\Sigma})}{b_\theta} \right)^{\frac{1}{n+1-k}}, \quad \forall 0 \leq k < n, \quad (3.9)$$

并且等号成立当且仅当 Σ 是半空间中的一个毛细球冠 (即边界和 $\partial \mathbb{R}_+^{n+1}$ 相交于夹角是 θ 的标准球冠), 以及

$$\mathcal{V}_{n+1,\theta}(\widehat{\Sigma}) = \omega_\theta = (n+1)b_\theta, \quad (3.10)$$

其中

$$b_\theta := |\{x \in \mathbb{B}^{n+1} \mid \langle x, e_{n+1} \rangle > \cos \theta\}|.$$

定理 3.2 中的毛细球冠指

$$C_{r,\theta}(e) := \{x \in \overline{\mathbb{R}}_+^{n+1} \mid |x - r \cos \theta e| = r\}, \quad r \in [0, \infty). \quad (3.11)$$

等式 (3.10) 可直接从 (3.8) 得到, 进一步有

$$\int_{\Sigma} H_n dA = (n+1)\omega_{\theta} + \cos \theta \sin^n \theta \frac{\omega_{n-1}}{n} = |\mathbb{S}_{\theta}^n|,$$

即得到一个半空间中带毛细边界超曲面上的 Gauss-Bonnet-Chern 型定理.

与定理 2.3 中的结果对比发现, 定理 2.3 中的相对 Alexandrov-Fenchel 型不等式没有一个显式的表达式; 而对于半空间中的情形, 可以得到一个显式的整洁形式 (3.9).

为了证明定理 3.2, 考虑构造一类限制型完全非线性曲率流 (3.12), 沿着流方程, l 阶均质积分 $\mathcal{V}_{l,\theta}(\widehat{\Sigma})$ 保持不变, 而 k 阶均质积分 $\mathcal{V}_{k,\theta}(\widehat{\Sigma})$ 随着时间单调递增. 如果能够证明这种流方程解的长时间存在性和收敛性, 即可证明一般形式的 Alexandrov-Fenchel 型不等式.

令 M 是一个可定向的光滑带边流形, 假设 $x_0 : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ 是一个初始嵌入超曲面, 满足 $x_0(M)$ 在 $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ 中是凸的并且边界和 $\partial \overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ 相交于一个常夹角 $\theta \in (0, \pi)$. 考虑一族光滑嵌入超曲面 $x : M \times [0, T) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$, 它满足流方程

$$\begin{aligned} \partial_t x(p, t) &= f(p, t)\nu + T(\cdot, t), \quad (p, t) \in M \times [0, T), \\ \langle \nu(p, t), \overline{N} \circ x(p, t) \rangle &= \cos(\pi - \theta), \quad (p, t) \in \partial M \times [0, T), \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中

$$f := \frac{1 + \cos \theta \langle \nu, e \rangle}{F} - \langle x, \nu \rangle, \quad (3.13)$$

这里

$$F := \frac{H_l}{H_{l-1}}, \quad 1 \leq l \leq n. \quad (3.14)$$

类似单位球体的毛细边界情形, 流方程 (3.12) 中切向分量 T 是为了确保 $x|_{\partial M}$ 保持在 $\mathbb{R}^n$ 内, 即选取 T 满足

$$f\nu + T|_{\partial \Sigma_t} = \partial_t x|_{\partial M} \in T\mathbb{R}^n.$$

由 Minkowski 公式 (3.6) 和定理 3.1 可知, 沿着流方程 (3.12), $\mathcal{V}_{l,\theta}(\widehat{\Sigma})$ 随着时间保持不变而 $\mathcal{V}_{k,\theta}(\widehat{\Sigma})$ 单调递增 (其中 $1 \leq k < l \leq n$).

命题 3.2 ^[39] 假设流方程 (3.12) 的解存在且 Σ_t 是 l -凸的, 那么对于任意 $1 \leq k < l \leq n$, $\mathcal{V}_{l,\theta}(\widehat{\Sigma}_t)$ 随着时间保持不变, 而 $\mathcal{V}_{k,\theta}(\widehat{\Sigma}_t)$ 随着时间单调递增.

由于曲率流方程 (3.12) 中存在权重因子项, 我们只证明了一类特殊情形下流方程 (3.12) 解的长时间存在性和收敛性, 即

$$F = \frac{H_n}{H_{n-1}} \quad (3.15)$$

和

$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

定理 3.3 ^[39] 当 $n \geq 2$ 时, 假设初始超曲面 $x_0 : M \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+1}$ 是一个带毛细边界的凸超曲面, 并且夹角满足 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. 那么对所有的时间 $t \in [0, +\infty)$, 总存在光滑解 $x : M \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+1}$ 满足流方程 (3.12) 和 $x(M, 0) = x_0(M)$, 其中 F 如 (3.15) 所示. 此外, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(\cdot, t)$ 光滑收敛到一个毛细球冠.

类似之前的工作, 根据流方程 (3.12) 解的长时间存在性和光滑收敛性, 再结合单调性 (命题 3.2), 可以证明关于均质积分 $\mathcal{V}_{k,\theta}$ 与 $\mathcal{V}_{n,\theta}$ 之间的 Alexandov-Fenchel 型不等式 (即定理 3.2), 进一步的细节参见文献 [39].

如上讨论, 自然地提出如下的猜测:

猜想 3.1 当 $n \geq 2$ 时, 假设 $\Sigma \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ 是一个带毛细边界的嵌入凸超曲面, 接触角 $\theta \in (0, \pi)$, 那么成立

$$\frac{\mathcal{V}_{l,\theta}(\widehat{\Sigma})}{b_\theta} \geq \left(\frac{\mathcal{V}_{k,\theta}(\widehat{\Sigma})}{b_\theta} \right)^{\frac{n+1-l}{n+1-k}}, \quad \forall 0 \leq k < l \leq n, \quad (3.16)$$

等号成立当且仅当 Σ 是一个毛细球冠.

更进一步地, 我们期望 (3.16) 对带毛细边界的 l -凸、星形超曲面也成立.

参考文献

- 1 Agostiniani V, Fogagnolo M, Mazziere L. Minkowski inequalities via nonlinear potential theory. Arch Ration Mech Anal, 2022, 244: 51–85
- 2 Ainouz A, Souam R. Stable capillary hypersurfaces in a half-space or a slab. Indiana Univ Math J, 2016, 65: 813–831
- 3 Alexandrov A D. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern, II: Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und ihre Anwendungen (in Russian). Mat Sb (NS), 1937, 2(44): 1205–1238
- 4 Alexandrov A D. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern, III: Die Erweiterung zweier Lehrsätze Minkowskis über die konvexen Polyeder auf die beliebigen konvexen Körper (in Russian). Mat Sb (NS), 1938, 3(45): 27–46
- 5 Andrews B, Hu Y X, Li H Z. Harmonic mean curvature flow and geometric inequalities. Adv Math, 2020, 375: 107393
- 6 Andrews B, Wei Y. Quermassintegral preserving curvature flow in hyperbolic space. Geom Funct Anal, 2018, 28: 1183–1208
- 7 Barbosa J L M, Colares A G. Stability of hypersurfaces with constant r -mean curvature. Ann Global Anal Geom, 1997, 15: 277–297
- 8 Bokowski J, Sperner E Jr. Zerlegung konvexer Körper durch minimale Trennflächen. J Reine Angew Math, 1979, 1979: 80–100
- 9 Bonnesen T, Fenchel W. Theorie der Konvexen Körper. (German) Berichtiger Reprint. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1974
- 10 Burago Y D, Maz'ya V G. Certain questions of potential theory and function theory for regions with irregular boundaries (in Russian). Zap Nauchn Sem Leningrad Otdel Mat Inst Steklov (LOMI), 1967, 3: 3–152
- 11 Burago Y D, Zalgaller V A. Geometric Inequalities. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 285. Berlin: Springer-Verlag, 1988
- 12 Chen C Q, Guan P F, Li J F, et al. A fully-nonlinear flow and quermassintegral inequalities in the sphere. Pure Appl Math Q, 2022, 18: 437–461
- 13 Chen M, Sun J. Alexandrov-Fenchel type inequalities in the sphere. Adv Math, 2022, 397: 108203
- 14 de Lima L L, Girão F. An Alexandrov-Fenchel-type inequality in hyperbolic space with an application to a Penrose inequality. Ann Henri Poincaré, 2016, 17: 979–1002
- 15 Finn R. Equilibrium Capillary Surfaces. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 284. New York: Springer-Verlag, 1986

- 16 Ge Y X, Wang G F, Wu J. Hyperbolic Alexandrov-Fenchel quermassintegral inequalities II. *J Differential Geom*, 2014, 98: 237–260
- 17 Gerhardt C. Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres. *J Differential Geom*, 1990, 32: 299–314
- 18 Guan P F, Li J F. The quermassintegral inequalities for k -convex starshaped domains. *Adv Math*, 2009, 221: 1725–1732
- 19 Guan P F, Li J F. A mean curvature type flow in space forms. *Int Math Res Not IMRN*, 2015, 2015: 4716–4740
- 20 Guan P F, Li J F. A fully-nonlinear flow and quermassintegral inequalities (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2018, 48: 147–156 [管鹏飞, 李军方. 一类完全非线性流和均质积分不等式. *中国科学: 数学*, 2018, 48: 147–156]
- 21 Guan P F, Li J F. Isoperimetric type inequalities and hypersurface flows. *J Math Study*, 2021, 54: 56–80
- 22 Hsiung C C. Some integral formulas for closed hypersurfaces. *Math Scand*, 1954, 2: 285–294
- 23 Hu Y X, Li H Z. Geometric inequalities for static convex domains in hyperbolic space. *Trans Amer Math Soc*, 2022, 375: 5587–5615
- 24 Hu Y X, Li H Z, Wei Y. Locally constrained curvature flows and geometric inequalities in hyperbolic space. *Math Ann*, 2022, 382: 1425–1474
- 25 Lambert B, Scheuer J. The inverse mean curvature flow perpendicular to the sphere. *Math Ann*, 2016, 364: 1069–1093
- 26 Li H Z, Wei Y, Xiong C W. A geometric inequality on hypersurface in hyperbolic space. *Adv Math*, 2014, 253: 152–162
- 27 Maggi F. *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems. An Introduction to Geometric Measure Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 135. Cambridge: Cambridge University Press, 2012
- 28 Makowski M, Scheuer J. Rigidity results, inverse curvature flows and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the sphere. *Asian J Math*, 2016, 20: 869–892
- 29 McCoy J A. Mixed volume preserving curvature flows. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2005, 24: 131–154
- 30 Nitsche J C C. Stationary partitioning of convex bodies. *Arch Ration Mech Anal*, 1985, 89: 1–19
- 31 Nunes I. On stable constant mean curvature surfaces with free boundary. *Math Z*, 2017, 287: 473–479
- 32 Reilly R C. Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms. *J Differential Geom*, 1973, 8: 465–477
- 33 Ros A, Vergasta E. Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary. *Geom Dedicata*, 1995, 56: 19–33
- 34 Scheuer J, Wang G F, Xia C. Alexandrov-Fenchel inequalities for convex hypersurfaces with free boundary in a ball. *J Differential Geom*, 2022, 120: 345–373
- 35 Scheuer J, Xia C. Locally constrained inverse curvature flows. *Trans Amer Math Soc*, 2019, 372: 6771–6803
- 36 Schneider R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Second Expanded Edition. *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, 151. Cambridge: Cambridge University Press, 2014
- 37 Urbas J I E. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures. *Math Z*, 1990, 205: 355–372
- 38 Wang G F, Weng L J. A mean curvature type flow with capillary boundary in a unit ball. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2020, 59: 149
- 39 Wang G F, Weng L J, Xia C. Alexandrov-Fenchel inequalities for convex hypersurfaces in the half-space with capillary boundary. *Math Ann*, 2024, 388: 2121–2154
- 40 Wang G F, Xia C. Isoperimetric type problems and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the hyperbolic space. *Adv Math*, 2014, 259: 532–556
- 41 Wang G F, Xia C. Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball. *Math Ann*, 2019, 374: 1845–1882
- 42 Wang G F, Xia C. Hsiung-Minkowski's formula for hypersurfaces and their applications. In: *Proceedings of the International Consortium of Chinese Mathematicians 2019*. In press
- 43 Wei Y, Xiong C W. Inequalities of Alexandrov-Fenchel type for convex hypersurfaces in hyperbolic space and in the sphere. *Pacific J Math*, 2015, 277: 219–239
- 44 Wei Y, Xiong C W. A volume-preserving anisotropic mean curvature type flow. *Indiana Univ Math J*, 2021, 70: 881–906
- 45 Weng L J, Xia C. Alexandrov-Fenchel inequality for convex hypersurfaces with capillary boundary in a ball. *Trans Amer Math Soc*, 2022, 375: 8851–8883
- 46 Wente H C. The symmetry of sessile and pendent drops. *Pacific J Math*, 1980, 88: 387–397
- 47 Xia C. Inverse anisotropic mean curvature flow and a Minkowski type inequality. *Adv Math*, 2017, 315: 102–129

The relative Alexandrov-Fenchel type inequalities

Guofang Wang, Liangjun Weng & Chao Xia

Abstract The Alexandrov-Fenchel inequality is one of the important inequalities in convex geometry, and its special form can be regarded as an isoperimetric inequality between higher-order quermassintegrals. In recent years, hypersurfaces with free or capillary boundaries have received much attention. In this paper, we will study a class of relative Alexandrov-Fenchel type inequalities on convex hypersurfaces with free or capillary boundaries in the unit ball or half-space from the perspective of differential geometry, and review its recent progress. First, we introduce the higher-order Minkowski-type integral formula for capillary hypersurfaces in the unit ball or half-space. From the first variational point of view, we give the definition of the quermassintegrals of the capillary hypersurfaces in the unit ball or half-space. After that, we use the Minkowski-type formula to construct a locally constrained curvature flow. By analyzing the long-time existence and convergence of the flow, we prove a class of relative Alexandrov-Fenchel type inequalities in the unit ball and half-space.

Keywords relative quermassintegral, relative Alexandrov-Fenchel type inequality, constrained hypersurface curvature flow, capillary boundary

MSC(2020) 53E40, 53C24, 53E10

doi: 10.1360/SSM-2022-0116