

文章编号: 1002-0268 (2006) 03-0088-05

斜 T 型梁桥的有限元分析

王其功

(甘肃省公路局, 甘肃 兰州 730030)

摘要: 目前, 对于梁板组合的斜 T 型梁桥的计算方法, 从计算理论上可分为板理论和梁理论两大类, 从计算方法上可归纳为梁格法和各向异性板法。而这两种方法的计算结果都未能把梁和板所受的力区分开, 这就给梁和板的配筋计算带来一定困难。为此, 文章从分析模型和计算方法入手, 考虑了梁和板的组合作用, 推导出了板作为平面壳体单元的单刚阵, 主梁和横梁以板中面作为弯曲中性轴的梁单元单刚阵, 较好地解决了这个问题。并依此思路研制了有限元分析程序, 对一些实验模型桥进行了分析比较, 结果十分接近。

关键词: 有限单元法; 偏心梁单元; 平面壳体单元

中图分类号: U448.22⁺²

文献标识码: A

Finite Element Analysis of Skew T-beam Bridge

WANG Qi-gong

(Highway Bureau of Gansu Province, Gansu Lanzhou 730030, China)

Abstract: Up till now theories for beam slab structure in oblique T-beam bridge can be classified as plate theory and beam theory. Based on these theories, there are two essentially computation methods, i.e. anisotropic slab method and beam/mesh method. But the results of the methods mentioned above can not separate the force acting on beam from the force on slab, which makes it difficult to caculate the reinforcement. For this reason, considering the interaction of beams and slab, by use of analyzing models and caculation methods, the paper infered the element stiffness matrix of plate as a plain shell and the element stiffness matrix of beam (girder frame) element with the medial plain of plate as its neutral layer, and resolved the problems mentioned above adequately. Using these two kinds elements, a finite element analysis programe has been developed. Comparisons have been made with some experimental values of model bridge, with adequate results.

Key words: Finite element method; Eccentric beam element; Plane shell element

基于板理论和梁理论发展的各种计算方法, 对斜桥的设计和应用起到了积极作用。但是按照通常的梁板组合的斜 T 型梁桥的计算方法, 不能明确地区分梁板各自的受力状况, 因而给梁和板的配筋计算带来一定困难。为此, 笔者从分析模型和计算方法入手, 考虑了梁和板的组合作用, 较好地解决了这个问题。求出的截面内力, 清晰地分为两部分, 一部分作用在板上, 另一部分作用在加劲梁上。从而为斜 T 型梁桥提供了一种满意的有限元分析方法。

1 板和加劲体系的基本方程

1.1 组合结构的位移

如图 1 所示是从组合结构(桥面系)中截取的一个典型单元。该组合结构是用两个整体的偏心梁在相互正交方向加劲的。假定这个用弹性的、匀质的、各向同性的梁加劲了的板, 仍是一种弹性的、匀质的、各向同性的材料。

由薄板弯曲理论的有关假定知

收稿日期: 2005-01-04

作者简介: 王其功(1957-), 男, 甘肃武威人, 工学硕士, 从事公路工程建设管理工作。(gs-wangqg@tom.com)

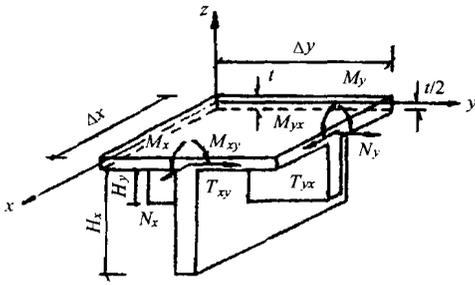


图 1 具有偏心加劲梁的板单元

Fig 1 Element of a plate reinforced by eccentric beams

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad \epsilon_z = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{即 } w = w(x, y))$$

这就使板和加劲梁组合体系板中面的法线和梁轴线的法线始终保持为直线, 而且仍然是变形后的体系的法线, 变形前在某点板与加劲梁的共同法线在发生挠曲后仍然是它们的共同法线。

根据以上假定, 结构的位移公式可写为

$$\begin{cases} U(z) = u - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ V(z) = v - z \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (1)$$

式中, U, V 分别为距离基准面(板的中面, 坐标系如图 1 所示)为 z 的任一点沿 x 和 y 方向的位移; u, v, w 分别为基准面上位移矢量沿坐标轴 x, y 和 z 的分量(注: 一般薄板理论中, 假定 $(u)_{z=0} = 0, (v)_{z=0} = 0$)。

1.2 板的应力与位移的关系

应用几何方程和胡克定律可得

$$\{\sigma\} = \{\sigma^p\} + \{\sigma^b\} \quad (2)$$

其中, $\{\sigma^p\} = \{\sigma_x^p, \sigma_y^p, \tau_{xy}^p\}^T$ 为板平面内应力

$\{\sigma^b\} = \{\sigma_x^b, \sigma_y^b, \tau_{xy}^b\}^T$ 为板弯曲应力

$$\{\sigma^p\} = [C] \{\epsilon^p\} \quad (3)$$

$$\{\sigma^b\} = [C] \{\chi\} z \quad (4)$$

式中

$$\{\epsilon^p\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T \quad (5)$$

$$\{\chi\} = - \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (6)$$

$$[C] = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中, $[C]$ 为弹性矩阵; E 为材料杨氏弹性模量; μ 为泊松比。

由此可见, 板的应力可以明确地分为相互独立的两部分, 一部分为板面内的平面应力, 它只与板中面的面内位移 (u, v) 有关, 一部分是弯曲应力, 而它只与板

中面的法线位移 (w) 有关。

1.3 加劲梁内力与位移的关系

作用于组合结构离散单元(图 1)上的力由两部分组成, 一部分作用于板上, 另一部分作用于加劲梁上, 例如, 对于弯矩可表示为

$$\begin{cases} \overline{M}_x = M_x \Delta y + M_{sx} \\ \overline{M}_y = M_y \Delta x + M_{sy} \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\overline{M}_x, \overline{M}_y$ 为离散单元上的总弯矩; M_x, M_y 为每单位板宽上的弯矩; M_{sx}, M_{sy} 为主、横梁上相对于基准面的弯矩。

对主梁, 正应力 σ_{xx} 可合成轴力 N_{sx} 和弯矩 M_{sx} , 写成矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix} N_{sx} \\ M_{sx} \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A_x & -S_x \\ -S_x & I_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式中, A_x 为主梁的横截面积; S_x 为主梁 A_x 对基准面的静矩; I_x 为主梁截面对基准面的惯性矩。

同理, 对于横梁也有类似的关系式, 这里不再赘述。

2 组合结构的单元刚度矩阵

在由桥面板和纵梁、横梁组成的桥梁结构中, 桥面板的作用可分为: 一是作为受弯曲的板起作用, 二是作为板梁组合系统上的上翼缘起作用。显然在起后一作用时, 在板的中面里存在面内的膜力。主、横梁由于其中性层与板的中面不重合, 当板弯曲变形时, 梁处于偏心弯曲, 有弯矩也有轴力。

由前述可知, 组合结构中板内的应力由两部分组成, 一部分是板内的平面应力, 另一部分是弯曲应力。前者是平面应力问题, 后者是薄板弯曲问题, 二者可组合为平面壳体问题。因此, 对于板可按平面壳单元求其单元刚度矩阵, 对于偏心梁, 可按以板的中面为中性轴的梁单元, 求其相应的单元刚度矩阵。

2.1 偏心梁单元的单元刚度矩阵

在图 2 中, 偏心梁单元的局部坐标以 (x, y, z) 表示(右手系), x 方向为梁轴方向, 且 xy 面与板中面重合。单元的结点取在板中面上, 每一端点(结点)取 4 个位移, 结点力作用在结点上。

图 2 中只表示出 j 点沿 x, z 轴的位移和力矢量 (\rightarrow) 及绕 x, y 轴的转角和力矩矢量 $(\rightarrow\rightarrow)$ 。转角和力矩矢量遵守右手螺旋定则。

单元结点位移为

$$\{\delta^e\} = \{u_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, u_j, w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}\}^T$$

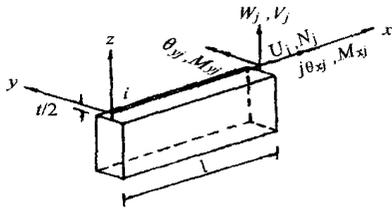


图 2 偏心梁单元的结点位移和结点力

Fig 2 Node displacement and node force of eccentric beam element

式中, u_i, w_i, u_j, w_j 分别为 i 点和 j 点沿 x 和 z 轴的线位移; $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{xj}, \theta_{yj}$ 分别为 i 点和 j 点绕 x 轴和 y 轴的转角。

单元结点力为

$$\{F\}^e = \{N_i, V_i, M_{xi}, M_{yi}, N_j, V_j, M_{xj}, M_{yj}\}^T$$

式中, N_i, V_i, N_j, V_j 分别为 i 点和 j 点沿 x 轴和 z 轴方向的力; $M_{xi}, M_{yi}, M_{xj}, M_{yj}$ 分别为 i 点和 j 点绕 x 轴和 y 轴的力矩。

推导分两步进行, 先建立挠曲刚度和轴向刚度, 然后再建立扭转刚度, 将两者合并可得偏心梁单元的刚度矩阵为 (为书写方便, 去掉式 (9) 中各符号的下标, 并令 $S = -S_x$), 得

$$[K]^e = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中, $[K_{rs}]$ ($r, s = 1, 2$) 为单元刚度子矩阵, 即

$$[K_{rs}] = \begin{bmatrix} \frac{EA(-1)^{r+s}}{l} & 0 & 0 & \frac{ES(-1)^{r+s}}{l} \\ 0 & \frac{12EI(-1)^{r+s}}{l^3} & 0 & \frac{6EI(-1)^r}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{G(-1)^{r+s}}{l} & 0 \\ \frac{ES(-1)^{r+s}}{l} & \frac{6EI(-1)^s}{l^2} & 0 & \frac{HEI}{l} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中, E, G, A 和 l 分别为杆的杨氏弹性模量, 剪切模量, 杆的横截面积和杆长; I 和 S 分别是杆截面对板中面的惯性矩和静矩; J 是杆的抗扭转惯矩; 当 $r = s$ 时, $H = 4$, $r \neq s$ 时, $H = 2$ 。

2.2 平面壳体单元的刚度矩阵

如前所述, 桥面板不仅受弯而且也同时承受平面应力, 在小变形情况下这两种受力状态是可以进行叠加的, 即可作为平面薄壳问题进行处理。

平面壳体单元的刚度矩阵所含的元素分为两类。第一类表示平面应力问题的结点力和相应的结点位移

之间的关系, 第二类表示薄板弯曲问题的结点力和相应的结点位移之间的关系。在同一单元, 第一类的结点位移不产生第二类的结点反力, 第二类的结点位移不产生第一类的结点反力。

为了适应斜交桥面板的边界, 平面应力问题和薄板弯曲问题均采用三角形单元, 把两种单元组合起来即为平面壳体单元。组合后单元的结点位移和结点力分别为

$$\{\delta\}^e = [\delta_1^T, \delta_2^T, \delta_3^T]^T \quad (12)$$

其中, $\{\delta\} = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}^T (i, j, m)$ (13)

$$\{F\}^e = [F_i^T, F_j^T, F_m^T]^T \quad (14)$$

其中, $\{F_i\} = \{X_i, Y_i, Z_i, M_{xi}, M_{yi}\}^T (i, j, m)$ (15)

单元结点力与结点位移的关系仍可以表示为

$$\{F\}^e = [K]^e \{\delta\}^e \quad (16)$$

式中, 单元刚度矩阵 $[K]^e$ 为

$$[K]^e = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中子矩阵 $[K_{rs}]$ ($r, s = i, j, m$) 为

$$[K_{rs}] = \begin{bmatrix} K_{rs}^p & 0 \\ 0 & K_{rs}^b \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中, $[K_{rs}^p]$ 、 $[K_{rs}^b]$ 分别为平面应力问题和薄板弯曲问题相应的子矩阵, 其中 $[K_{rs}^b]$ 本文采用文献 [4] 的结果。

3 有限元分析的计算机实现和算例

作者按前述方法研制了由板梁组合的 T 型梁桥的有限元分析程序, 对同济大学有机玻璃肋板桥模型^[6] (模型 A) 分 3 种情况进行了梁下缘应力分析; 并分别对同济大学有机玻璃肋板桥模型^[6], 东北林业大学有机玻璃肋板桥模型^[3] (模型 B) 和东北林业大学钢肋板桥模型^[3] (模型 C) 进行了跨中横向分布系数的计算; 还对用有机玻璃制成的斜肋板桥模型^[5] (模型 D) 进行了挠度分析。并取 4 种模型实验数据进行验证。

3.1 主梁下缘应力分析

模型 A 是以钢筋混凝土梁桥标准设计中的一种桥型为对象, 取比例尺为 1/20 的有机玻璃模型。原型为跨径 $l = 15.50\text{m}$, 有 5 根 T 型主梁, 间距 $b_1 = 1.60\text{m}$, 有端横梁, 中间则分 3 种情况: 无内横梁, 仅有一根跨中横梁, 有 3 根内横梁在跨中和 4 分点。模型计算跨径为 77.5cm, 桥宽 $B = 40\text{cm}$, 桥面板厚 $t = 6.0\text{mm}$, 主梁肋为 $b \times h = 10\text{mm} \times 44\text{mm}$, 横梁肋为 $b' \times h' = 10\text{mm} \times 30\text{mm}$, 横截面如图 3 所示。已知

有机玻璃的弹性模量 $E=3.23 \times 10^3 \text{ MPa}$, 泊松比 $\mu=0.40$ 。

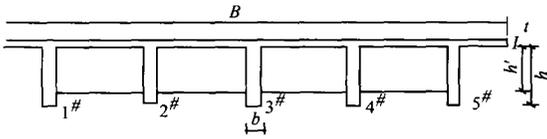


图 3 模型横截面

Fig 3 Model of cross-section

该实验分别在上述 3 种情况下, 分别于内外主梁的跨中或 4 分点加一个集中荷载 P ($P=500\text{N}$) 时, 在各个主梁的跨中或 4 分点的梁肋下缘测量纵向应变分布。为便于比较, 均以荷载 P 作用处全桥宽 5 根主梁的应变总和为 100。由于这个应变乘以弹性模量即为应力, 所以这也就是应力分布系数。

作者利用研制的程序对模型 A 的 3 种情况分别进行了计算。在计算中, 均采用 10×16 网格, 板单元共 320 个, 梁单元因不同情况而异, 分别为 96, 104, 120 个。输出主梁单元的杆端内力: 轴力 N 和弯矩 M , 经过计算求出主梁下缘的应力。

为了便于和实验值^[9]比较, 也以荷载 P 作用处全桥宽 5 根主梁的应力总和为 100。计算值和实验值均列于表 1, 并进行了比较。表中 Δ_p 为曲线平均偏差, Δ_d 为控制 (最大) 值偏差, 按下式计算。

$$\Delta_p = \frac{\sum |\sigma_{\text{计}} - \sigma_{\text{实}}|}{\sum \sigma_{\text{实}}} \times 100\%$$

$$\Delta_d = \frac{\sum \sigma_{\text{计max}} - \sigma_{\text{实max}}}{\sum \sigma_{\text{实max}}} \times 100\%$$

由表 1 比较可见, 横梁根数越多, 计算值越接近于实验值, 中载时与偏载时比较, 前者更接近于实验值。

3.2 按跨中挠度比例的荷载横向分布系数比较

用所研制的程序对上述 3 种模型分 4 种情况, 荷载分别作用在中梁跨中和边梁跨中分别进行了计算, 以实验挠度^[3,6]和计算的理论挠度, 推算出横向分布系数, 其结果由于篇幅所限未列出。经比较可以看出, 当荷载作用于中梁跨中时, 计算值与实验值两者十分接近, 只有当荷载在边梁跨中时, 两者稍有偏差。

3.3 无中横梁的斜交梁板式桥面系的挠度分析

笔者用所编制的程序对模型 D 进行了挠度分析, 并与实验值^[5]和改进的下伸梁排法的计算结果^[5]进行了比较。

模型 D 是一座小比例尺的斜交 45° 的简支单跨梁

表 1 主梁下缘应力分布系数比较

Tab. 1 Distribution factor of beam sbottom surface stress is compared

横梁根数	荷载位置	方法	主梁号					Δ_p	Δ_d
			1	2	3	4	5		
3	#梁跨中	实验	15.5	20.7	27.6	20.7	15.5		
		计算	15.10	21.33	27.14	21.33	15.10	2.52	-1.67
1	#梁跨中	实验	60.2	30.3	14.0	2.4	-7.0		
		计算	61.31	31.76	14.00	2.18	-9.25	5.04	1.84
5	3#梁4分点	实验	13.2	22.0	29.6	22.0	13.2		
		计算	12.47	22.23	30.60	22.23	12.47	2.92	3.38
1	#梁4分点	实验	64.1	30.2	11.3	1.3	-6.9		
		计算	64.17	30.53	10.93	1.08	-6.70	1.19	0.11
3	#梁跨中	实验	15.7	20.4	27.8	20.4	15.7		
		计算	16.42	21.10	24.96	21.10	16.42	5.68	-10.22
1	#梁跨中	实验	57.5	32.1	14.4	3.3	-7.4		
		计算	59.60	33.24	15.52	1.93	-10.29	8.62	3.65
3	3#梁4分点	实验	8.0	16.7	50.6	16.7	8.0		
		计算	7.19	15.89	53.84	15.89	7.19	6.48	6.40
1	#梁4分点	实验	70.6	23.2	8.3	1.4	-3.5		
		计算	74.55	19.93	7.29	1.02	-2.79	9.32	5.59
3	#梁跨中	实验	6.9	20.6	45.0	20.6	-6.9		
		计算	5.02	19.85	50.26	19.85	5.02	10.52	11.69
1	#梁跨中	实验	70.2	25.4	7.2	1.0	-3.8		
		计算	73.71	21.95	5.36	-0.12	-0.91	12.81	5.00
2	3#梁4分点	实验	5.4	18.0	53.2	18.0	5.4		
		计算	3.57	17.69	57.48	17.69	3.57	8.56	8.05
1	#梁4分点	实验	76.4	18.4	4.3	1.1	-0.2		
		计算	77.46	17.92	3.53	0.65	0.44	3.4	1.39

板式桥面系, 其尺寸如图 4 所示。模型由有机玻璃制成, 梁宽 0.6cm, 其弹性模量和泊松比分别为 3176MPa 和 0.335, 桥面板厚 0.3cm, 其弹性模量和泊松比分别为 3354MPa 和 0.390, 梁是用 Tensol 胶粘在桥面板下面的。桥面在间距相等的纵梁两端支承, 支承处的垂直挠度和横梁方向的位移加以限制, 但垂直于横梁方向的水平变位是允许的。集中荷载 $P=100\text{N}$ 作用在桥面跨中边缘处。

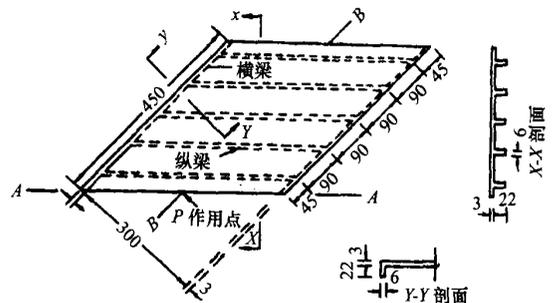


图 4 斜交梁板式桥面系模型/mm

Fig 4 Model of beam slab structure consist of beams and girder frames which are oblique to beam

对于桥面板用 10×8 网格划分单元, 共 160 个板

单元,主、横梁单元共 60 个,网格划分未示出。分析结果与实验值以及文献 [5] 的结果均示于图 5、图 6 中。

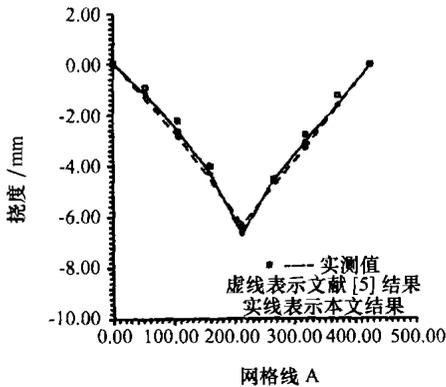


图 5 桥面系沿网格线 A 垂直挠度

Fig 5 Vertical deflection of along net line A

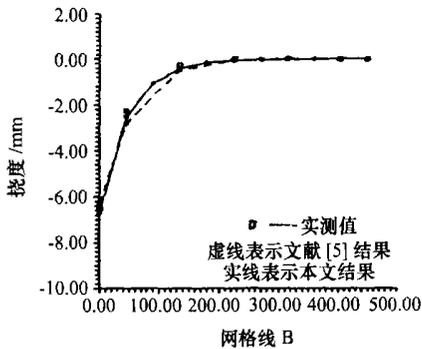


图 6 桥面系沿网格线 B 垂直挠度

Fig 6 Vertical deflection of along net line B

由图比较可知,本文的计算结果比文献 [5] 的计算结果更接近于实验值。

4 结论

(1) 该方法的特点是,它没有必要预先计算梁的

有效翼缘宽度,也无须考虑各项刚度确定的恰当与否,更不需要把梁和板的刚度合成为一个等效的正(斜)交异性板。而且在分析中,还可以直接得到结构每个单元(板单元和梁单元)内部的应力。获得每个单元的可靠内力对于结构设计有着重大意义。

(2) 由计算值与实验值的比较可以看出,无论是主梁下缘应力还是以跨中挠度比例的荷载横向分布系数,中载时计算值与实验值符合很好,偏载时,则有所偏离。这是由于偏载实验时,为防止边梁上翘,必须借助压重来平衡,因而误差较大。一般检验理论的正确与否多以中载实验为准,正是考虑到这一因素所致。

(3) 根据本文的思路编制的斜 T 型梁桥有限元分析程序对一些实例的分析,均能得到与实测值接近的结果,这表明分析程序是正确的,同时也说明本文的计算模型和计算方法是有效的,可行的。

参考文献:

- [1] 高岛春生(日). 公路桥横向分布实用算法(上编)[M]. 北京:人民交通出版社,1984
- [2] 高岛春生(日). 公路桥横向分布实用算法(下编)[M]. 北京:人民交通出版社,1984
- [3] 胡肇滋. 正交构造异性板刚度计算的探讨[J]. 土木工程学报,1987(11).
- [4] 华东水利学院. 弹性力学问题的有限元法[M]. 北京:水利电力出版社,1978.
- [5] 北京市市政设计院. 斜交梁板式桥面系的性能[J]. 市政工程译文,1984,418,(3).
- [6] 同济大学路桥教研组. 公路桥梁荷载横向分布计算[M]. 北京:人民交通出版社,1977.