一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 方程组的渐近行为

献给陈恕行教授 80 华诞

李海梁*, 寿凌云

首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

E-mail: hailiang.li.math@gmail.com, shoulingyun11@gmail.com

收稿日期: 2020-08-31; 接受日期: 2020-11-05; 网络出版日期: 2021-03-02; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11931010, 11671384 和 11871047) 资助项目

摘要 本文研究一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 耦合模型在空间周期区域上初值问题整体解的渐近行为; 证明随着时间发展, 流体速度和粒子宏观平均速度以指数速率收敛到同一个常速度, 并且粒子分布函数关于速度变量的紧支集以指数速率收缩到一个点集.

关键词 流体 - 粒子耦合模型 可压缩 Navier-Stokes 方程组 Vlasov 方程 渐近行为

MSC (2020) 主题分类 35Q30, 35Q83, 82C40

1 引言

流体 - 粒子耦合模型可以用来模拟微观粒子分散在宏观流体中的运动过程, 如燃烧、喷雾和沉积等 (参见文献 [1–8]), 在许多现代工业领域有广泛的应用, 如生物技术、医药科学、矿物加工、火箭推进和污水处理等 (参见文献 [6–12]).

本文考虑如下一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 耦合方程组的初值问题:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (1.1)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2)_x + (P(\rho))_x = (\mu(\rho)u_x)_x - \int_{\mathbb{R}} F_d f dv, \quad (1.2)$$

$$f_t + v f_x + (F_d f)_v = 0, \quad (x, v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

其初始值为

$$(\rho(x, 0), u(x, 0), f(x, v, 0)) = (\rho_0(x), u_0(x), f_0(x, v)), \quad (x, v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

英文引用格式: Li H L, Shou L Y. Asymptotical behavior of one-dimensional compressible Navier-Stokes-Vlasov system (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 985–1002, doi: 10.1360/SSM-2020-0275

其中 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是周期为 1 的空间周期区域, $\rho = \rho(x, t)$ 和 $u = u(x, t)$ 表示流体的密度和速度, $f = f(x, v, t)$ 表示粒子的分布函数. Vlasov 方程 (1.3) 及可压缩 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 和 (1.2) 通过摩擦力 F_d 相互耦合. 假设压力 $P(\rho)$ 为

$$P(\rho) = A\rho^\gamma, \quad (1.5)$$

黏性系数 $\mu(\rho)$ 为

$$\mu(\rho) = \mu_0 + \mu_1\rho^\beta, \quad (1.6)$$

摩擦力 F_d 为

$$F_d = \kappa\rho(u - v), \quad (1.7)$$

其中常数 A 、 μ_0 、 μ_1 、 κ 、 γ 和 β 满足

$$A > 0, \quad \mu_0 > 0, \quad \mu_1 > 0, \quad \kappa > 0, \quad \gamma > 1, \quad \beta \geq 0.$$

不失一般性, 下文中取 $A = \mu_0 = \mu_1 = \kappa = 1$.

对于可压缩或不可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 方程组及相关模型整体解的存在性和动力学行为的研究目前已有诸多重要结果 (参见文献 [13–20]), 例如, 对于高维的不可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 方程组, Boudin 等 [13] 首先建立了在空间周期区域上整体弱解的存在性, Glass 等 [14] 研究了在带有吸收边界的管道上稳态解附近的稳定性. 在一些小扰动情形下, 3 维不可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 方程组初值问题的弱解被证明是整体适定的, 并且随时间发展整体解将以指数速率 [15] 或代数速率 [16] 收敛到其平衡态. Wang 和 Yu [17] 证明了吸收边界情形下 3 维非齐次 Navier-Stokes-Vlasov 方程组弱解的整体存在性. Bae 等 [18] 和 Choi [19] 证明了, 如果高维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 系统在空间周期区域上整体正则解存在且满足一些条件, 则这个解将随时间以指数衰减速率渐近收敛到其平衡态. Choi [20] 证明了任意维度可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 系统允许真空的正则解可能在有限时间内爆破等.

本文研究一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 系统在空间周期区域上整体解的渐近行为. 当初值问题 (1.1)–(1.7) 的整体正则解存在且满足一些一致估计时, 我们分析了流体密度的真空状态对于解长时间行为的影响, 并且证明了在流体密度远离真空时解随时间以指数衰减速率收敛到该方程组的平衡态.

首先给出初值问题 (1.1)–(1.7) 整体正则解的定义.

定义 1.1 称 (ρ, u, f) ($\rho \geq 0$, $f \geq 0$) 为初值问题 (1.1)–(1.7) 的一个整体正则解, 如果对任意的 $T > 0$, (ρ, u, f) 满足

$$\rho \in C^1(\mathbb{T} \times [0, T]), \quad u \in C^1([0, T]; C^2(\mathbb{T})), \quad f \in C^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times [0, T]),$$

且对任意 $(x, v, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times (0, T]$, (ρ, u, f) 满足方程组 (1.1)–(1.3).

下面, 给出 Wasserstein 距离 [21] 的定义.

定义 1.2 令 f_1 和 f_2 是两个在 $X = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上的 Borel 概率测度. 对 $p \geq 1$, f_1 与 f_2 间的 p -Wasserstein 距离定义为

$$W_p(f_1, f_2) := \left(\inf_{\varpi \in \Gamma(f_1, f_2)} \int_{X \times X} |z - z'|^p d\varpi(z, z') \right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $\Gamma(f_1, f_2)$ 表示在 $X \times X$ 上所有投影为 f_1 和 f_2 的测度集合. 根据 Monge-Kantorovich 对偶定理, $W_1(f_1, f_2)$ 可以等价地表示为

$$W_1(f_1, f_2) = \sup \left\{ \int_X \phi(z) df_1(z) - \int_X \phi(z) df_2(z) : \forall \phi \in \text{Lip}(X), \|\nabla \phi\|_{L^\infty(X)} \leq 1 \right\}.$$

记 Vlasov 方程 (1.3) 解 f 的宏观平均密度 n 和宏观平均速度 w 分别为

$$n(x, t) := \int_{\mathbb{R}} f(x, v, t) dv, \quad nw(x, t) := \int_{\mathbb{R}} v f(x, v, t) dv, \quad (1.8)$$

其初始值为

$$n_0(x) := \int_{\mathbb{R}} f_0(x, v) dv, \quad n_0 w_0(x) := \int_{\mathbb{R}} v f_0(x, v) dv. \quad (1.9)$$

假设初值问题 (1.1)–(1.7) 的整体正则解 (ρ, u, f) 满足以下性质:

(A1) 质量守恒成立:

$$\int_{\mathbb{T}} \rho(x, t) dx = \int_{\mathbb{T}} \rho_0(x) dx = \overline{\rho_0} > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.10)$$

$$\int_{\mathbb{T}} n(x, t) dx = \int_{\mathbb{T}} n_0(x) dx = \overline{n_0} > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad (1.11)$$

(A2) 动量守恒成立:

$$\int_{\mathbb{T}} (\rho u + n w)(x, t) dx = \int_{\mathbb{T}} (\rho_0 u_0 + n_0 w_0)(x) dx = \overline{\rho_0} m_1(t) + \overline{n_0} m_2(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.12)$$

其中

$$m_1(t) := \frac{\int_{\mathbb{T}} \rho u(x, t) dx}{\overline{\rho_0}}, \quad m_2(t) := \frac{\int_{\mathbb{T}} n w(x, t) dx}{\overline{n_0}}; \quad (1.13)$$

(A3) 相对熵 - 耗散不等式成立:

$$\mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t)) + \int_0^t \mathcal{D}(\rho(\tau), u(\tau), f(\tau)) d\tau \leq \mathcal{E}(\rho_0, u_0, f_0) < \infty, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.14)$$

其中相对熵定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t)) := & \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2} \rho |u - m_1|^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} - \frac{\overline{\rho_0}^\gamma}{\gamma - 1} - \frac{\gamma \overline{\rho_0}^{\gamma-1}}{\gamma - 1} (\rho - \overline{\rho_0}) \right) (x, t) dx \\ & + \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} \frac{1}{2} |v - m_2(t)|^2 f(x, v, t) dv dx + \frac{\overline{\rho_0} \overline{n_0}}{\overline{\rho_0} + \overline{n_0}} \frac{1}{2} |(m_2 - m_1)(t)|^2, \end{aligned} \quad (1.15)$$

相应的耗散率为

$$\mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t)) := \int_{\mathbb{T}} (\mu(\rho) |u_x|^2)(x, t) dx + \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} \rho(x, t) |u(x, t) - v|^2 f(x, v, t) dv dx; \quad (1.16)$$

(A4) 存在一个与时间无关的常数 $\rho_+ > 0$ 使得流体密度 ρ 满足

$$\rho(x, t) \leq \rho_+, \quad (x, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+; \quad (1.17)$$

(A5) 存在一个与时间无关的常数 $\rho_- > 0$ 使得流体密度 ρ 满足

$$\rho(x, t) \geq \rho_- > 0, \quad (x, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+; \quad (1.18)$$

(A6) 分布函数 f 在 $t = 0$ 时刻关于速度变量有紧支集, 即存在一个常数 $R_0 > 0$ 使得

$$\text{Supp}_v f_0(x, \cdot) \subset \{v \in \mathbb{R} \mid |v| \leq R_0\}, \quad x \in \mathbb{T}. \quad (1.19)$$

首先, 如果初值问题 (1.1)–(1.7) 的整体正则解满足条件 (A1)–(A4), 我们证明其流体密度及速度具有以下长时间行为:

定理 1.1 令 (ρ, u, f) 为初值问题 (1.1)–(1.7) 的一个整体正则解, 并且满足条件 (A1)–(A4), 则 (ρ, u) 在以下的意义下收敛到 $(\bar{\rho}_0, m_1)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|(\sqrt{\rho}(u - m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}) = 0, \quad p \in [1, \infty), \quad (1.20)$$

其中 $\bar{\rho}_0$ 和 m_1 分别由 (1.10) 和 (1.13) 给出.

其次, 除条件 (A1)–(A4) 外, 如果流体密度远离真空, 我们证明初值问题 (1.1)–(1.7) 的整体正则解随时间以指数速率收敛到其平衡态:

定理 1.2 令 (ρ, u, f) 为初值问题 (1.1)–(1.7) 的一个整体正则解, 并且满足条件 (A1)–(A5), 则对任意 $t \in \mathbb{R}_+$, 以下性质成立:

$$\mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t)) \leq C_0 \mathcal{E}(\rho_0, u_0, f_0) e^{-\lambda_0 t}, \quad (1.21)$$

$$\|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|(u - u_s)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad p \in [1, \infty), \quad (1.22)$$

$$\|(n(w - u_s))(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} + \|(\sqrt{n}(w - u_s)\mathbf{I}_{\{n>0\}})(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad (1.23)$$

$$\|(\sqrt{f}(v - u_s))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + W_1(f(t), (n\delta(v - u_s))(t)) \leq C_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad (1.24)$$

其中常数 $C_i > 0$ 和 $\lambda_i > 0$ ($i = 0, 1$) 是与时间无关的常数, n 、 $\bar{\rho}_0$ 和 $\mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t))$ 分别由 (1.8)、(1.10) 和 (1.15) 给出, $\delta(v)$ 表示 Dirac 测度, $W_1(f, g)$ 是由定义 1.2 给出的 1-Wasserstein 距离, 且常数 u_s 为

$$u_s := \frac{\int_{\mathbb{T}} (\rho_0 u_0 + n_0 w_0)(x) dx}{\int_{\mathbb{T}} (\rho_0 + n_0)(x) dx}. \quad (1.25)$$

若初值问题 (1.1)–(1.7) 的整体正则解 (ρ, u, f) 满足条件 (A1)–(A6), 我们证明分布函数 f 关于速度变量的紧支集随时间以指数速率收敛到点集 $\{v = u_s\}$:

定理 1.3 令 (ρ, u, f) 为初值问题 (1.1)–(1.7) 的一个整体正则解, 并且满足条件 (A1)–(A6), 则对任意 $(x, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$, 以下性质成立:

$$\text{Supp}_v f(x, \cdot, t) \subset \{v \in \mathbb{R} \mid |v - u_s| \leq C_2 e^{-\lambda_2 t}\}, \quad (1.26)$$

其中 $C_2 > 0$ 和 $\lambda_2 > 0$ 是与时间无关的常数, u_s 由 (1.25) 给出.

注 1.1 对于任意非负的 $(\rho_0, f_0) \in L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ 以及有限的初始熵 $\mathcal{E}(\rho_0, u_0, f_0)$, 容易验证初值问题 (1.1)–(1.7) 的整体正则解 (ρ, u, f) 满足特性 (A1)–(A3).

注 1.2 定理 1.2 中一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 系统整体解的渐近行为 (1.21)–(1.24) 与高维的情形类似 (参见文献 [18, 19]). 需要指出的是, 除了条件 (A1)–(A5) 外, 文献 [18, 19] 还假设流体密度 u 的 $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{T}^N))$ 范数以及粒子宏观平均密度的 $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{T}^N))$ 范数有关于时间一致的估计, 其中 $N \geq 3$ 为维数.

注 1.3 在文献 [22] 中, 我们将研究对于一般的初始值, 初值问题 (1.1)–(1.7) 满足特性 (A1)–(A6) 的整体解的存在性和唯一性.

注 1.4 对于更一般的黏性系数

$$\mu(\rho) \in C([0, \rho_+]), \quad \inf_{\rho \in [0, \rho_+]} \mu(\rho) > 0,$$

以及摩擦力

$$F_d = \kappa(\rho)(u - v), \quad \kappa(\rho) \in C([0, \rho_+]), \quad \inf_{\rho \in [\rho_-, \rho_+]} \kappa(\rho) > 0,$$

可以验证定理 1.1–1.3 仍然成立.

2 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明由以下引理 2.1–2.3 组成.

引理 2.1 令 (ρ, u, f) 是初值问题 (1.1)–(1.7) 的一个整体正则解, 则对任意 $t \in \mathbb{R}_+$, 以下等式成立:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2} \rho |u - m_1|^2 + \Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0) \right) (x, t) dx + \int_{\mathbb{T}} (\mu(\rho) |u_x|^2) (x, t) dx \\ &= - \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)(u - m_1)] (x, t) dx, \end{aligned} \quad (2.1)$$

以及

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t)) + \mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t)) = 0, \quad (2.2)$$

其中 $\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)$ 由以下定义给出:

$$\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0) := \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} - \frac{\bar{\rho}_0^\gamma}{\gamma - 1} - \frac{\gamma \bar{\rho}_0^{\gamma-1}}{\gamma - 1} (\rho - \bar{\rho}_0), \quad (2.3)$$

并且 $\bar{\rho}_0$ 、 m_1 、 $\mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t))$ 和 $\mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t))$ 分别由 (1.10)、(1.13)、(1.15) 和 (1.16) 给出.

证明 首先证明 (2.1). 由方程 (1.2) 可以推出

$$\frac{d}{dt} m_1(t) = \frac{1}{\bar{\rho}_0} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} \rho u(x, t) dx = - \frac{1}{\bar{\rho}_0} \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)](x, t) dx, \quad (2.4)$$

因而, 方程 (1.2) 可重写为

$$\begin{aligned} & (\rho(u - m_1))_t + (\rho u(u - m_1))_x + (\rho^\gamma - \bar{\rho}_0^\gamma)_x \\ &= (\mu(\rho) u_x)_x - \rho n(u - w) + \frac{\rho}{\bar{\rho}_0} \int_{\mathbb{T}} \rho n(u - w) dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

用 $u - m_1$ 乘以 (2.5) 并在 $\mathbb{T}$ 上分部积分, 可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} (\rho |u - m_1|^2)(x, t) dx + \int_{\mathbb{T}} (\mu(\rho) |u_x|^2)(x, t) dx \\
 &= - \int_{\mathbb{T}} [(\rho^\gamma - \overline{\rho_0}^\gamma)_x (u - m_1)](x, t) dx - \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)(u - m_1)](x, t) dx \\
 & \quad + \frac{1}{\overline{\rho_0}} \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)](x, t) dx \int_{\mathbb{T}} [\rho(u - m_1)](x, t) dx \\
 &= \int_{\mathbb{T}} (\rho^\gamma u_x)(x, t) dx - \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)(u - m_1)](x, t) dx,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

此处用到了以下事实:

$$\int_{\mathbb{T}} [\rho(u - m_1)](x, t) dx = 0.$$

根据方程 (1.1) 和 (2.3), 有

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} \Pi_\gamma(\rho | \overline{\rho_0})(x, t) dx &= \int_{\mathbb{T}} \frac{\gamma(\rho^{\gamma-1} \rho_t)(x, t)}{\gamma - 1} dx - \int_{\mathbb{T}} \frac{\gamma \overline{\rho_0}^{\gamma-1} \rho_t(x, t)}{\gamma - 1} dx \\
 &= - \int_{\mathbb{T}} (\rho^\gamma u_x)(x, t) dx.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

将 (2.6) 与 (2.7) 相加, 得到 (2.1).

下证 (2.2). 由方程 (1.3) 可推出

$$\frac{d}{dt} m_2(t) = \frac{1}{\overline{n_0}} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} v f(x, v, t) dv dx = \frac{1}{\overline{n_0}} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} [\rho n(u - w)](x, t) dx. \tag{2.8}$$

根据 m_2 的定义 (1.13), 有

$$\int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} (v - m_2(t)) f(x, v, t) dv dx = 0. \tag{2.9}$$

用 $\frac{1}{2}|v - m_2|^2$ 乘 Vlasov 方程 (1.3), 在 $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上分部积分并应用 (2.8) 和 (2.9), 可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} \frac{1}{2} |v - m_2(t)|^2 f(x, v, t) dv dx \\
 &= \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} \frac{1}{2} |v - m_2(t)|^2 f_t(x, v, t) dv dx + \frac{d}{dt} m_2(t) \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} (v - m_2(t)) f(x, v, t) dv dx \\
 &= \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} \frac{1}{2} |v - m_2(t)|^2 [-v f_x - (\rho(u - v) f)_v](x, v, t) dv dx \\
 & \quad + \frac{1}{\overline{n_0}} \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)](x, t) dx \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} (v - m_2(t)) f(x, v, t) dv dx \\
 &= \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} \rho(x, t) (u(x, t) - v) (v - m_2(t)) f(x, v, t) dv dx \\
 &= - \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} \rho(x, t) |u(x, t) - v|^2 f(x, v, t) dv dx + \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)(u - m_2)](x, t) dx.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

又由 (1.8)、(2.4) 和 (2.8), 直接计算可得

$$\frac{\overline{\rho_0} \overline{n_0}}{2(\overline{\rho_0} + \overline{n_0})} \frac{d}{dt} |(m_2 - m_1)(t)|^2 = (m_2 - m_1)(t) \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)](x, t) dx. \tag{2.11}$$

将 (2.1)、(2.10) 和 (2.11) 相加得到了 (2.2). 引理 2.1 证毕. $\square$

引理 2.2 令 (ρ, u, f) 是初值问题 (1.1)–(1.7) 的一个整体正则解, 并且满足条件 (A1) 和 (A4), 则以下不等式成立:

$$c_- |\rho - \bar{\rho}_0|^2 \leq \Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0) \leq c_+ |\rho - \bar{\rho}_0|^2, \quad (2.12)$$

其中 $\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)$ 由 (2.3) 给出, 且

$$\begin{aligned} c_- &:= \min \left\{ \frac{\gamma}{2} (\rho_+ + \bar{\rho}_0)^{\gamma-2}, \bar{\rho}_0^{\gamma-2} \right\}, \\ c_+ &:= \max \left\{ \frac{\gamma}{2} (\rho_+ + \bar{\rho}_0)^{\gamma-2}, \bar{\rho}_0^{\gamma-2} \right\}. \end{aligned}$$

证明 注意到 $\Pi_\gamma(\bar{\rho}_0 | \bar{\rho}_0) = \partial_\rho \Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)|_{\rho=\bar{\rho}_0} = 0$, 因而易得

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0) &= \int_0^1 \frac{\gamma}{\gamma-1} [(\theta_1 \rho + (1-\theta_1)\bar{\rho}_0)^{\gamma-1} - \bar{\rho}_0^{\gamma-1}] d\theta_1 (\rho - \bar{\rho}_0) \\ &= C(\rho, \bar{\rho}_0) |\rho - \bar{\rho}_0|^2, \end{aligned}$$

其中

$$C(\rho, \bar{\rho}_0) := \int_0^1 \int_0^1 \gamma \theta_1 [\theta_1 \theta_2 \rho + (1-\theta_1 \theta_2) \bar{\rho}_0]^{\gamma-2} d\theta_2 d\theta_1.$$

对于 $1 \leq \gamma < 2$, 有

$$\begin{aligned} C(\rho, \bar{\rho}_0) &\leq \bar{\rho}_0^{\gamma-2} \int_0^1 \int_0^1 \gamma \theta_1 (1-\theta_1 \theta_2)^{\gamma-2} d\theta_2 d\theta_1 = \bar{\rho}_0^{\gamma-2}, \\ C(\rho, \bar{\rho}_0) &\geq (\rho_+ + \bar{\rho}_0)^{\gamma-2} \int_0^1 \int_0^1 \gamma \theta_1 d\theta_2 d\theta_1 = \frac{\gamma}{2} (\rho_+ + \bar{\rho}_0)^{\gamma-2}; \end{aligned}$$

对于 $\gamma \geq 2$, 有

$$\begin{aligned} C(\rho, \bar{\rho}_0) &\leq (\rho_+ + \bar{\rho}_0)^{\gamma-2} \int_0^1 \int_0^1 \gamma \theta_1 d\theta_2 d\theta_1 = \frac{\gamma}{2} (\rho_+ + \bar{\rho}_0)^{\gamma-2}, \\ C(\rho, \bar{\rho}_0) &\geq \bar{\rho}_0^{\gamma-2} \int_0^1 \int_0^1 \gamma \theta_1 (1-\theta_1 \theta_2)^{\gamma-2} d\theta_2 d\theta_1 = \bar{\rho}_0^{\gamma-2}. \end{aligned}$$

(2.12) 得证. $\square$

注意到 (1.16) 中耗散率 $\mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t))$ 缺少关于密度 ρ 的估计, 从而 $\mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t))$ 无法控制相对熵 $\mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t))$. 为了克服这个困难, 我们需要如下引理:

引理 2.3 令 (ρ, u, f) 是初值问题 (1.1)–(1.7) 的一个整体正则解, 并且满足条件 (A1) 和 (A4), 则以下估计成立:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{T}} [\rho(u - m_1) \mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)](x, t) dx \right| \\ &\leq c_1 \left(\frac{1}{2} \|(\sqrt{\rho}(u - m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

以及

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} [\rho(u - m_1) \mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)](x, t) dx$$

$$\geq c_0 \|\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} - c_1 (\|(\sqrt{\mu(\rho)}u_x)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|(\sqrt{\rho}f(u-v))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2), \quad (2.14)$$

其中算子 $\mathcal{J} : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{T})$ 定义为

$$\mathcal{J}(g)(x) := \int_0^x g(y)dy - \int_0^1 \int_0^y g(z)dzdy, \quad \forall g \in L^1(\mathbb{T}), \quad (2.15)$$

并且常数 c_0 和 c_1 由下式给出:

$$c_0 := \frac{\bar{\rho}_0^{\gamma-1}}{4c_+}, \quad c_1 := \max \left\{ \frac{\bar{\rho}_0^{\frac{1}{2}}}{c_-^{\frac{1}{2}}}, \frac{\mu(\rho_+)}{\bar{\rho}_0^{\gamma-1}} + \bar{\rho}_0^2, \frac{4\rho_+ \bar{n}_0}{\bar{\rho}_0^{\gamma-1}} \right\}.$$

证明 对于任意 $g \in L^1(\mathbb{T})$, 易证

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} \mathcal{J}(g)(x) \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}, \quad (\mathcal{J}(g)(x))_x = g, \quad \mathcal{J}(g - \bar{g})(x) \in W^{1,1}(\mathbb{T}), \quad (2.16)$$

以及若 $g \in W^{1,1}(\mathbb{T})$, 则有

$$\mathcal{J}(g_x)(x) = g(x) - \int_0^1 g(y)dy. \quad (2.17)$$

由条件 (A1) 中关于 ρ 的质量守恒 (1.10)、估计式 (2.12)、(2.16) 和 Young 不等式, 得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{T}} [\rho(u - m_1)\mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)](x, t)dx \right| \\ & \leq \|\rho(t)\|_{L^1(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \|(\sqrt{\rho}(u - m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \|\mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\ & \leq \frac{\bar{\rho}_0^{\frac{1}{2}}}{c_-^{\frac{1}{2}}} \|(\sqrt{\rho}(u - m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \|\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{\bar{\rho}_0^{\frac{1}{2}}}{c_-^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2} \|(\sqrt{\rho}(u - m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} \right). \end{aligned}$$

从而 (2.13) 得证.

其次, 证明 (2.14). 根据方程 (1.1)、(1.13) 和 (2.17), 有

$$(\mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0))_t = -\mathcal{J}((\rho u)_x) = -\rho u + \int_{\mathbb{T}} \rho u(y, t)dy = -\rho(u - m_1) - (\rho - \bar{\rho}_0)m_1. \quad (2.18)$$

注意到 $\mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)(1) = \mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)(0)$, 从而利用方程 (2.5) 和 (2.18) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} [\rho(u - m_1)\mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)](x, t)dx \\ & = \int_{\mathbb{T}} [(\rho^\gamma - \bar{\rho}_0^\gamma)(\rho - \bar{\rho}_0)](x, t)dx - \int_{\mathbb{T}} [\bar{\rho}_0 \rho |u - m_1|^2 + \mu(\rho)u_x(\rho - \bar{\rho}_0)](x, t)dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{T}} \mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)(x, t) \left(-[\rho n(u - w)](x, t) + \frac{\rho(x, t)}{\bar{\rho}_0} \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)](y, t)dy \right) dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

为了估计 (2.19) 右端的第一个形式, 我们利用 ρ 的非负性和微分中值定理得到

$$\int_{\mathbb{T}} [(\rho^\gamma - \bar{\rho}_0^\gamma)(\rho - \bar{\rho}_0)](x, t)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_0^1 \gamma(\theta\rho + (1-\theta)\bar{\rho}_0)^{\gamma-1} d\theta |\rho - \bar{\rho}_0|^2 \right) (x, t) dx \\
&\geq \bar{\rho}_0^{\gamma-1} \|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

由 (1.10) 及 m_1 的定义 (1.13), 有

$$\begin{aligned}
u(x, t) - m_1(t) &= u(x, t) - \frac{\int_{\mathbb{T}} \rho u(y, t) dy}{\int_{\mathbb{T}} \rho(y, t) dy} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{T}} \rho(y, t) \int_y^x u_z(z, t) dz dy}{\int_{\mathbb{T}} \rho(y, t) dy} \\
&\leq \|u_x(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} \\
&\leq \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

再根据 (1.10)、(1.6)、(2.21) 和 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{T}} [\bar{\rho}_0 \rho |u - m_1|^2 + \mu(\rho) u_x (\rho - \bar{\rho}_0)](x, t) dx \right| \\
&\leq \bar{\rho}_0^2 \|(u - m_1)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^2 + \sqrt{\mu(\rho_+)} \|(\sqrt{\mu(\rho)} u_x)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \\
&\leq \frac{\bar{\rho}_0^{\gamma-1}}{4} \|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \left(\frac{\mu(\rho_+)}{\bar{\rho}_0^{\gamma-1}} + \bar{\rho}_0^2 \right) \|(\sqrt{\mu(\rho)} u_x)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

类似地, 由 (1.8)、(1.10)、(1.11) 和 (2.16), 有

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{T}} \mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)(x, t) \left(-[\rho n(u - w)](x, t) + \frac{\rho(x, t)}{\bar{\rho}_0} \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)](y, t) dy \right) dx \right| \\
&\leq 2 \|\mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|(\rho f(u - v))(t)\|_{L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\
&\leq 2 \rho_+^{\frac{1}{2}} \|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} \|f(t)\|_{L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|(\sqrt{\rho} f(u - v))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\
&\leq \frac{\bar{\rho}_0^{\gamma-1}}{4} \|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{4\rho_+ \bar{n}_0}{\bar{\rho}_0^{\gamma-1}} \|(\sqrt{\rho} f(u - v))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

将估计 (2.20)–(2.23) 代入 (2.19) 并应用 (2.12) 得到 (2.14). 引理 2.3 得证. $\square$

定理 1.1 的证明 令 (ρ, u, f) 是初值问题 (1.1)–(1.7) 的一个整体正则解, 并且满足条件 (A1)–(A4). 对一个待定的常数 $\eta > 0$, 定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) &:= \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2} \rho |u - m_1|^2 + \Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0) \right) (x, t) dx \\
&\quad - \eta \int_{\mathbb{T}} [\rho(u - m_1) \mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)](x, t) dx,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

以及

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) &:= \int_{\mathbb{T}} (\mu(\rho) |u_x|^2)(x, t) dx \\
&\quad + \eta \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} [\rho(u - m_1) \mathcal{J}(\rho - \bar{\rho}_0)](x, t) dx,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

其中算子 $\mathcal{J}$ 由 (2.15) 给定, 从而由 (2.1) 可知,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) + \mathcal{D}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) = - \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)(u - m_1)](x, t) dx. \tag{2.26}$$

根据条件 (A1) 中关于 ρ 的质量守恒 (1.10) 及 (2.21), 有

$$\begin{aligned}\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} &\geq \frac{1}{\rho_0^{\frac{1}{2}}} \|\rho(t)\|_{L^1(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \|(u - m_1)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\ &\geq \frac{1}{\rho_0^{\frac{1}{2}}} \|(\sqrt{\rho}(u - m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})},\end{aligned}\quad (2.27)$$

从而由 (1.6)、(2.12)–(2.14) 和 (2.27), 可得

$$\mathcal{E}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) \geq (1 - c_1\eta) \left(\frac{1}{2} \|(\sqrt{\rho}(u - m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} \right), \quad (2.28)$$

$$\mathcal{E}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) \leq (1 + c_1\eta) \left(\frac{1}{2} \|(\sqrt{\rho}(u - m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} \right), \quad (2.29)$$

以及

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) &\geq \frac{1}{2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{2} - c_1\eta \right) \|(\sqrt{\rho}(u - m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &\quad + c_0\eta \|\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} - c_1\eta \|(\sqrt{\rho}f(u - v))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.\end{aligned}\quad (2.30)$$

又由条件 (A1) 中关于 f 的质量守恒 (1.11)、条件 (A4) 中关于 ρ 的上界 (1.17) 和估计式 (2.21), 得到

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\mathbb{T}} [\rho n(u - w)(u - m_1)](x, t) dx \right| \\ &\leq \rho_+^{\frac{1}{2}} \|(u - m_1)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|f(t)\|_{L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|(\sqrt{\rho}f(u - v))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{\rho_+ \bar{n}_0}{2} \|(\sqrt{\rho}f(u - v))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2.\end{aligned}\quad (2.31)$$

在 (2.24) 和 (2.25) 中选取常数

$$\eta = \frac{1}{4c_1}, \quad (2.32)$$

并应用 (2.28)–(2.30), 可得

$$\frac{4}{5} \mathcal{E}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) \leq \frac{1}{2} \|(\sqrt{\rho}(u - m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \frac{4}{3} \mathcal{E}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)), \quad (2.33)$$

$$\mathcal{D}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) \geq \frac{1}{2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \lambda \mathcal{E}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)), \quad \lambda := \frac{2}{5} \min \left\{ \frac{1}{\rho_0}, \frac{c_0}{2c_1} \right\}, \quad (2.34)$$

从而结合 (2.26)、(2.31)、(2.33) 和 (2.34), 有如下不等式:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) + \lambda \mathcal{E}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) \leq \frac{2\rho_+ \bar{n}_0 + 1}{4} \|(\sqrt{\rho}f(u - v))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2. \quad (2.35)$$

对 (2.35) 应用 Grönwall 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{NS}^\eta(t) &\leq e^{-\lambda t} \mathcal{E}_{NS}^\eta(0) + \frac{2\rho_+ \bar{n}_0 + 1}{4} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|(\sqrt{\rho}f(u - v))(s)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 ds \\ &\leq e^{-\lambda t} \mathcal{E}_{NS}^\eta(0) + \frac{2\rho_+ \bar{n}_0 + 1}{4} e^{-\frac{\lambda t}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} \|(\sqrt{\rho}f(u - v))(s)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 ds \\ &\quad + \frac{2\rho_+ \bar{n}_0 + 1}{4} \int_{\frac{t}{2}}^t \|(\sqrt{\rho}f(u - v))(s)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 ds.\end{aligned}\quad (2.36)$$

根据条件 (A3) 中的相对熵不等式 (1.14), 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|(\sqrt{\rho}f(u-v))(s)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})}^2 ds \leq \mathcal{E}(\rho_0, u_0, f_0) < \infty. \quad (2.37)$$

在 (2.36) 中取极限 $t \rightarrow \infty$ 并应用 (2.12)、(2.33) 和 (2.37), 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|(\sqrt{\rho}(u - m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{NS}^\eta(\rho(t), u(t)) = 0. \quad (2.38)$$

根据 (1.17)、(2.38) 和 Hölder 不等式可知, 随着 $t \rightarrow \infty$,

$$\|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0, \quad p \in [1, 2),$$

以及

$$\begin{aligned} \|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^p(\mathbb{T})} &\leq \|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1-\frac{2}{p}} \|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{2}{p}} \\ &\leq (\rho_+ + \bar{\rho}_0)^{1-\frac{2}{p}} \|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{2}{p}} \rightarrow 0, \quad p \in (2, \infty). \end{aligned}$$

定理 1.1 证毕. $\square$

3 定理 1.2 的证明

定理 1.2 的证明由引理 2.1–2.3 和以下引理 3.1 组成.

引理 3.1 令 (ρ, u, f) 是初值问题 (1.1)–(1.7) 的一个整体正则解, 并且满足条件 (A1) 和 (A5), 则存在与时间无关的常数 $c_2 > 0$ 使得以下估计成立:

$$\mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t)) + \|\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} \geq c_2 \mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t)), \quad (3.1)$$

其中 $\mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t))$ 和 $\mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t))$ 分别由 (1.15) 和 (1.16) 给出, 且常数 c_2 定义为

$$c_2 := \min \left\{ 1, \frac{1}{\bar{\rho}_0}, \frac{\rho_-(\bar{\rho}_0 + \bar{n}_0)}{2\bar{\rho}_0(1 + 5\rho_-\bar{n}_0)}, \frac{\rho_-}{2(1 + 5\rho_-\bar{n}_0)} \right\}.$$

证明 根据条件 (A5) 中关于密度 ρ 的一致下界 (1.18) 和等式 (2.9), 直接计算可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} \rho(x, t) |u(x, t) - v|^2 f(x, v, t) dv dx \\ &\geq \rho_- \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} |u(x, t) - m_1(t) + m_1(t) - m_2(t) + m_2(t) - v|^2 f(x, v, t) dv dx \\ &= \rho_- \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} |u(x, t) - m_1(t)|^2 f(x, v, t) dv dx + \rho_- |(m_1 - m_2)(t)|^2 \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} f(x, v, t) dv dx \\ &\quad + \rho_- \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} |v - m_2(t)|^2 f(x, v, t) dv dx \\ &\quad + 2\rho_-(m_1 - m_2)(t) \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} (u(x, t) - m_1(t)) f(x, v, t) dv dx \\ &\quad + 2\rho_- \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} (u(x, t) - m_1(t))(m_2(t) - v) f(x, v, t) dv dx, \end{aligned}$$

从而应用 (1.11)、(2.21) 和 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
& 5\rho_-\bar{n}_0\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|(\sqrt{\rho}f(u-v))(t)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}^2 \\
& \geq 5\rho_-\bar{n}_0\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \rho_-\bar{n}_0\|(u-m_1)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^2 + \rho_-\bar{n}_0|(m_1-m_2)(t)|^2 \\
& \quad + \rho_-\|((v-m_2)f)(t)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}^2 - 2\rho_-\bar{n}_0|(m_1-m_2)(t)|\|(u-m_1)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\
& \quad - 2\rho_-\bar{n}_0^{\frac{1}{2}}\|((v-m_2)f)(t)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\|(u-m_1)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\
& \geq \frac{\rho_-\bar{n}_0}{2}|(m_1-m_2)(t)|^2 + \frac{\rho_-}{2}\|((v-m_2)f)(t)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}^2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

根据 (1.6)、(1.16)、(2.27) 和 (3.2), 有

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t)) \\
& \geq \frac{1}{2}(\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|(\sqrt{\rho}f(u-v))(t)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}^2) + \frac{1}{2}\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\
& \geq \frac{1}{2(1+5\rho_-\bar{n}_0)}\left(\frac{\rho_-\bar{n}_0}{2}|(m_1-m_2)(t)|^2 + \frac{\rho_-}{2}\|((v-m_2)f)(t)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}^2\right) \\
& \quad + \frac{1}{2\rho_0}\|(\sqrt{\rho}(u-m_1))(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2,
\end{aligned}$$

因而,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t)) + \|\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} \\
& \geq \min\left\{1, \frac{1}{\rho_0}, \frac{\rho_-(\bar{\rho}_0 + \bar{n}_0)}{2\rho_0(1+5\rho_-\bar{n}_0)}, \frac{\rho_-}{2(1+5\rho_-\bar{n}_0)}\right\}\mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t)).
\end{aligned}$$

引理 3.1 得证. $\square$

定理 1.2 的证明 令 (ρ, u, f) 是初值问题 (1.1)–(1.7) 的一个整体正则解, 并且满足条件 (A1)–(A5). 对于待定的常数 $\alpha > 0$, 定义

$$\mathcal{E}^\alpha(\rho(t), u(t), f(t)) := \mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t)) - \alpha \int_{\mathbb{T}} [\rho(u-m_1)\mathcal{J}(\rho-\bar{\rho}_0)](x, t)dx, \tag{3.3}$$

以及

$$\mathcal{D}^\alpha(\rho(t), u(t), f(t)) := \mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t)) + \alpha \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} [\rho(u-m_1)\mathcal{J}(\rho-\bar{\rho}_0)](x, t)dx, \tag{3.4}$$

从而由等式 (2.2), 有

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}^\alpha(\rho(t), u(t), f(t)) + \mathcal{D}^\alpha(\rho(t), u(t), f(t)) = 0. \tag{3.5}$$

由 (1.14)、(2.13) 和 (3.3) 可以推出

$$(1 - c_1\alpha)\mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t)) \leq \mathcal{E}^\alpha(\rho(t), u(t), f(t)) \leq (1 + c_1\alpha)\mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t)). \tag{3.6}$$

又根据 (2.14)、(3.1) 和 (3.4), 有以下的估计:

$$\mathcal{D}^\alpha(\rho(t), u(t), f(t))$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left(\frac{1}{2} - c_1\alpha\right) \mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t)) + \frac{1}{2} \mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t)) + c_0\alpha \|\Pi_\gamma(\rho | \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - c_1\alpha\right) \mathcal{D}(\rho(t), u(t), f(t)) + \min\left\{\frac{1}{2}, c_0\alpha\right\} c_2 \mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t)).
\end{aligned} \quad (3.7)$$

在 (3.3) 和 (3.4) 中选取常数

$$\alpha = \frac{1}{2c_1}, \quad (3.8)$$

则由 (3.6) 和 (3.7), 得到

$$\frac{3}{2} \mathcal{E}^\alpha(\rho(t), u(t), f(t)) \leq \mathcal{E}(\rho(t), u(t), f(t)) \leq 2\mathcal{E}^\alpha(\rho(t), u(t), f(t)), \quad (3.9)$$

$$\mathcal{D}^\alpha(\rho(t), u(t), f(t)) \geq \lambda_0 \mathcal{E}^\alpha(\rho(t), u(t), f(t)), \quad \lambda_0 := \frac{1}{3} \min\left\{1, \frac{c_0}{c_1}\right\} c_2. \quad (3.10)$$

将估计 (3.10) 代入等式 (3.5) 并应用 Grönwall 不等式, 有

$$\mathcal{E}^\alpha(\rho(t), u(t), f(t)) \leq e^{-\lambda_0 t} \mathcal{E}^\alpha(\rho_0, u_0, f_0). \quad (3.11)$$

结合 (3.9) 和 (3.11), (1.21) 得证.

其次, 我们证明初值问题 (1.1)–(1.7) 整体解的长时间行为 (1.22)–(1.24). 由 (1.15)、(1.18)、(1.21) 和 (2.12) 可知, 存在一个与时间无关的常数 $C_3 > 0$ 使得以下估计成立:

$$\|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|(u - m_1)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_3 e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}, \quad (3.12)$$

$$\|(\sqrt{f}(v - m_2))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + |(m_1 - m_2)(t)| \leq C_3 e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}. \quad (3.13)$$

结合 (1.17)、(3.12) 和 Hölder 不等式, 得到

$$\|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_3 e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}, \quad p \in [1, 2), \quad (3.14)$$

$$\|(\rho - \bar{\rho}_0)(t)\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_3^{\frac{2}{p}} (\rho_+ + \bar{\rho}_0)^{1-\frac{2}{p}} e^{-\frac{\lambda_0}{p}t}, \quad p \in (2, \infty). \quad (3.15)$$

利用条件 (A2) 中的动量守恒 (1.12) 以及 m_i ($i = 1, 2$) 的定义 (1.13), 有

$$m_1(t) = \frac{1}{\bar{\rho}_0} \left(\int_{\mathbb{T}} (\rho_0 u_0 + n_0 w_0)(x) dx - \bar{n}_0 m_2(t) \right),$$

由此可得

$$\begin{aligned}
|(m_2 - m_1)(t)| &= \left| m_2(t) - \frac{1}{\bar{\rho}_0} \left(\int_{\mathbb{T}} (\rho_0 u_0 + n_0 w_0)(x) dx - \bar{n}_0 m_2(t) \right) \right| \\
&= \frac{\bar{\rho}_0 + \bar{n}_0}{\bar{\rho}_0} |(m_2 - u_s)(t)|,
\end{aligned} \quad (3.16)$$

其中常数 u_s 由 (1.25) 给定. 结合 (3.12) 和 (3.16), 有

$$|(m_2 - u_s)(t)| \leq \frac{C_3 \bar{\rho}_0}{\bar{\rho}_0 + \bar{n}_0} e^{-\frac{\lambda_0}{2}t} \leq C_3 e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}, \quad (3.17)$$

$$|(m_1 - u_s)(t)| \leq |(m_1 - m_2)(t)| + |(m_2 - u_s)(t)| \leq 2C_3 e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}, \quad (3.18)$$

从而, 结合 (3.12) 和 (3.18) 可知, 流体速度 u 满足

$$\|(u - u_s)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|(u - m_1)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} + |(m_1 - u_s)(t)| \leq 3C_3 e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}. \quad (3.19)$$

我们估计关于 f 的长时间行为. 由 (1.11)、(3.13) 和 (3.17), 得

$$\begin{aligned} & \|(\sqrt{f}(v - u_s))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ & \leq \|(\sqrt{f}(v - m_2))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} + \overline{n_0}^{\frac{1}{2}} |(m_2 - u_s)(t)| \\ & \leq C_3(1 + \overline{n_0}^{\frac{1}{2}}) e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

又根据 (1.8)、(1.11)、(3.20) 和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \|n(w - u_s)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} & \leq \|f(v - u_s)(t)\|_{L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ & \leq \overline{n_0}^{\frac{1}{2}} \|(\sqrt{f}(v - u_s))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \\ & \leq C_3(\overline{n_0}^{\frac{1}{2}} + \overline{n_0}) e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

以及

$$\begin{aligned} & \|n(w - u_s)\mathbf{I}_{n>0}(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ & = \left(\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{\int_{\mathbb{R}} (v - u_s) f(x, v, t) dv}{\sqrt{n(x, t)}} \mathbf{I}_{n(x, t) > 0} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} |v - u_s|^2 f(x, v, t) dv dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C_3(1 + \overline{n_0}^{\frac{1}{2}}) e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

由 (1.11)、(3.20) 以及定义 1.2 中给出的 Monge-Kantorovich 对偶定理, 有

$$\begin{aligned} & W_1(f(t), (n\delta(v - u_s))(t)) \\ & = \sup_{\|(\psi_x, \psi_v)\|_{L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq 1} \left\{ \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} f(x, v, t) \psi(x, v) dv dx - \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} \psi(x, v) \delta(v - u_s) \int_{\mathbb{R}} f(x, \tilde{v}, t) d\tilde{v} dv dx \right\} \\ & = \sup_{\|(\psi_x, \psi_v)\|_{L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq 1} \left\{ \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} f(x, v, t) (\psi(x, v) - \psi(x, u_s)) dv dx \right\} \\ & \leq \sup_{\|(\psi_x, \psi_v)\|_{L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq 1} \left\{ \|\psi_v\|_{L^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}} |v - u_s| f(x, v, t) dv dx \right\} \\ & \leq \overline{n_0}^{\frac{1}{2}} \|(\sqrt{f}(v - u_s))(t)\|_{L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})} \leq C_3(\overline{n_0}^{\frac{1}{2}} + \overline{n_0}) e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

结合 (3.14) 和 (3.19)–(3.23), 可得 (1.22). 定理 1.2 证毕. $\square$

4 定理 1.3 的证明

定理 1.3 的证明由定理 1.2 和以下引理 4.1 组成.

引理 4.1 令 $a_1 > 0$ 和 $a_2 > 0$ 为两个常数, 则对于任意 $t \in \mathbb{R}_+$, 以下不等式成立:

$$\int_0^t e^{-a_1(t-\tau)} e^{-a_2\tau} d\tau \leq \frac{1}{a_2} e^{-\frac{a_1}{2}t} + \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_2}{2}t}. \quad (4.1)$$

证明 易得

$$\int_0^t e^{-a_1(t-\tau)} e^{-a_2\tau} d\tau = \int_0^{\frac{t}{2}} e^{-a_1(t-\tau)} e^{-a_2\tau} d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-a_1(t-\tau)} e^{-a_2\tau} d\tau.$$

直接计算得到

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{t}{2}} e^{-a_1(t-\tau)} e^{-a_2\tau} d\tau &\leq e^{-\frac{a_1}{2}t} \int_0^{\frac{t}{2}} e^{-a_2\tau} d\tau \leq \frac{1}{a_2} e^{-\frac{a_1}{2}t}, \\ \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-a_1(t-\tau)} e^{-a_2\tau} d\tau &\leq e^{-\frac{a_2}{2}t} \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-a_1(t-\tau)} d\tau \leq \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_2}{2}t}. \end{aligned}$$

引理 4.1 得证. $\square$

定理 1.3 的证明 令 (ρ, u, f) 是初值问题 (1.1)–(1.7) 的一个整体正则解, 并且满足条件 (A1)–(A6). 对于任意 $(x, v, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, 引入如下双重特征线 $(X^{x,v,t}(s), V^{x,v,t}(s))$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} X^{x,v,t}(s) &= V^{x,v,t}(s), \\ X^{x,v,t}(t) &= x, \\ \frac{d}{ds} V^{x,v,t}(s) &= \rho(X^{x,v,t}(s), s)(u(X^{x,v,t}(s), s) - V^{x,v,t}(s)), \\ V^{x,v,t}(t) &= v, \quad s \in [0, t]. \end{aligned}$$

由方程 (1.3) 知,

$$f_t + v f_x + \rho(u - v) f_v - \rho f = 0, \quad (4.2)$$

从而, 我们沿着双重特征线 $(X^{x,v,t}(s), V^{x,v,t}(s))$ 重写方程 (4.2) 如下:

$$\frac{d}{ds} f(X^{x,v,t}(s), V^{x,v,t}(s), s) - \rho(X^{x,v,t}(s), s) f(X^{x,v,t}(s), V^{x,v,t}(s), s) = 0,$$

因而, f 满足表达式

$$f(x, v, t) = e^{\int_0^t \rho(X^{x,v,t}(s), s) ds} f_0(X^{x,v,t}(0), V^{x,v,t}(0)). \quad (4.3)$$

解 $V^{x,v,t}(s)$ 的特征线方程, 可得

$$V^{x,v,t}(s) = e^{-\int_0^s \rho(X^{x,v,t}(\tau), \tau) d\tau} V^{x,v,t}(0) + \int_0^s e^{-\int_\tau^s \rho(X^{x,v,t}(\omega), \omega) d\omega} \rho u(X^{x,v,t}(\tau), \tau) d\tau.$$

特别地, 对于 $s = t$, 成立

$$v = e^{-\int_0^t \rho(X^{x,v,t}(\tau), \tau) d\tau} V^{x,v,t}(0) + \int_0^t e^{-\int_\tau^t \rho(X^{x,v,t}(\omega), \omega) d\omega} \rho u(X^{x,v,t}(\tau), \tau) d\tau. \quad (4.4)$$

易验证

$$u_s = e^{-\int_0^t \rho(X^{x,v,t}(\omega), \omega) d\omega} u_s + \int_0^t e^{-\int_\tau^t \rho(X^{x,v,t}(\omega), \omega) d\omega} \rho(X^{x,v,t}(\tau), \tau) u_s d\tau. \quad (4.5)$$

结合 (4.4) 和 (4.5), 有

$$\begin{aligned} v - u_s &= e^{-\int_0^t \rho(X^{x,v,t}(\tau), \tau) d\tau} (V^{x,v,t}(0) - u_s) \\ &\quad + \int_0^t e^{-\int_\tau^t \rho(X^{x,v,t}(\omega), \omega) d\omega} (\rho(u - u_s))(X^{x,v,t}(\tau), \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.6)$$

为了计算 f 关于速度变量的最大支集半径, 引入

$$\Sigma(x, t) := \{v \in \mathbb{R} \mid f(x, v, t) \neq 0\},$$

则易知对于任意 $(x, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$ 和常数 R , 有

$$\text{Supp}_v f(x, \cdot, t) \subset \left\{v \in \mathbb{R} \mid |v - R| \leq \sup_{v \in \Sigma(x, t)} |v - R|\right\}. \quad (4.7)$$

由 (1.17)、(1.18) 和 (4.6), 可得

$$\begin{aligned} \sup_{v \in \Sigma(x, t)} |v - u_s| &\leq e^{-\rho_- t} \sup_{v \in \Sigma(x, t)} |V^{x,v,t}(0) - u_s| \\ &\quad + \rho_+ \int_0^t e^{-\rho_-(t-\tau)} \|(u - u_s)(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} d\tau. \end{aligned} \quad (4.8)$$

根据 f 的表达式 (4.3) 以及 (4.7), 我们有如下事实:

$$f(x, v, t) \neq 0 \Rightarrow V^{x,v,t}(0) \in \text{Supp}_v f_0(X^{x,v,t}(0), \cdot) \subset \{v \in \mathbb{R} \mid |v| \leq R_0\}, \quad (4.9)$$

从而由条件 (A6) 中 f_0 关于 v 的紧支集 (1.19), 得到

$$\sup_{v \in \Sigma(x, t)} |V^{x,v,t}(0) - u_s| \leq R_0 + |u_s|. \quad (4.10)$$

又由 (2.21)、(3.12)、(3.17)–(3.19) 和 Gagliardo-Nirenberg 不等式知, 对于任意 $(x, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$, 有

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u_s| &\leq \left| u(x, t) - \int_{\mathbb{T}} u(y, t) dy \right| + \left| \int_{\mathbb{T}} (u(y, t) - u_s) dy \right| \\ &\leq \sqrt{2} \left\| \left(u - \int_{\mathbb{T}} u(y, \cdot) dy \right)(t) \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} + \|(u - u_s)(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\|(u - m_1)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} + \left| \int_{\mathbb{T}} (m_1 - u)(y, t) dy \right| \right)^{\frac{1}{2}} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \|(u - u_s)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leq 2 \|(u - m_1)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} + \|(u - u_s)(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leq 2C_3^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda_0}{4}t} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} + 3C_3 e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

将 (4.9)–(4.11) 代入 (4.8) 并利用 (1.14) 和 (4.1), 得到

$$\begin{aligned} \sup_{v \in \Sigma(x,t)} |v - u_s| &\leq e^{-\rho_- t} (|u_s| + R_0) + 2\rho_+ C_3^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_{L^2(0,t;L^2)}^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t e^{-\frac{4\rho_-}{3}(t-\tau)} e^{-\frac{\lambda_0}{3}\tau} d\tau \right)^{\frac{3}{4}} \\ &\quad + 3\rho_+ C_3 \int_0^t e^{-\rho_-(t-\tau)} e^{-\frac{\lambda_0}{2}\tau} d\tau \\ &\leq C_4 (e^{-\frac{\rho_-}{2}t} + e^{-\frac{\lambda_0}{8}t}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

其中 $C_4 > 0$ 为一个与时间无关的常数. 结合 (4.7) 和 (4.12) 可以推出 (1.26). 定理 1.3 证毕. $\square$

参考文献

- 1 Boudin L, Desvillettes L, Motte R. A modeling of compressible droplets in a fluid. *Commun Math Sci*, 2003, 1: 657–669
- 2 Boudin L, Grandmont C, Lorz A, et al. Modelling and numerics for respiratory aerosols. *Commun Comput Phys*, 2015, 18: 723–756
- 3 Caffisch R, Papanicolaou G C. Dynamic theory of suspensions with Brownian effects. *SIAM J Appl Math*, 1983, 43: 885–906
- 4 Desvillettes L, Golse F, Ricci V. The mean-field limit for solid particles in a Navier-Stokes flow. *J Stat Phys*, 2008, 131: 941–967
- 5 Jabin P-E, Perthame B. Notes on mathematical problems on the dynamics of dispersed particles interacting through a fluid. In: *Modeling in Applied Sciences. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*. Boston: Birkhäuser, 2000, 111–147
- 6 O'Rourke P J. Collective drop effects on vaporizing liquid sprays. PhD Thesis. Princeton: Princeton University, 1981
- 7 Williams F A. Spray combustion and atomization. *Phys Fluids*, 1958, 1: 541–545
- 8 Williams F A. *Combustion Theory*, 2nd ed. Menlo Park: The Benjamin /Cummings Publishing Company, 1985
- 9 Amsden A A, O'Rourke P J, Butler T D. KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays. Technical Report. Los Alamos: Los Alamos National Laboratory, 1989
- 10 Baranger C, Boudin L, Jabin P E, et al. A modeling of biospray for the upper airways. *ESAIM Proc*, 2005, 14: 41–47
- 11 Berres S, Bürger R, Karlsen K H, et al. Strongly degenerate parabolic-hyperbolic systems modeling polydisperse sedimentation with compression. *SIAM J Appl Math*, 2003, 64: 41–80
- 12 Berres S, Bürger R, Tory E M. Mathematical model and numerical simulation of the liquid fluidization of polydisperse solid particle mixtures. *Comput Vis Sci*, 2004, 6: 67–74
- 13 Boudin L, Desvillettes L, Grandmont C, et al. Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations. *Differential Integral Equations*, 2009, 22: 1247–1271
- 14 Glass O, Han-Kwan D, Moussa A. The Vlasov-Navier-Stokes system in a 2D pipe: Existence and stability of regular equilibria. *Arch Ration Mech Anal*, 2018, 230: 593–639
- 15 Han-Kwan D, Moussa A, Moyano I. Large time behavior of the Vlasov-Navier-Stokes system on the torus. *Arch Ration Mech Anal*, 2020, 236: 1273–1323
- 16 Han-Kwan D. Large time behavior of small data solutions to the Vlasov-Navier-Stokes system on the whole space. *arXiv:2006.09848*, 2020
- 17 Wang D, Yu C. Global weak solution to the inhomogeneous Navier-Stokes-Vlasov equations. *J Differential Equations*, 2015, 259: 3976–4008
- 18 Bae H O, Choi Y P, Ha S Y, et al. Asymptotic flocking dynamics of Cucker-Smale particles immersed in compressible fluids. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2014, 34: 4419–4458
- 19 Choi Y P. Large-time behavior for the Vlasov/compressible Navier-Stokes equations. *J Math Phys*, 2016, 57: 071501
- 20 Choi Y P. Finite-time blow-up phenomena of Vlasov/Navier-Stokes equations and related systems. *J Math Pures Appl* (9), 2017, 108: 991–1021
- 21 Villani C. *Optimal Transport: Old and New*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2009
- 22 Li H L, Shou L Y. Global well-posedness of one-dimensional compressible Navier-Stokes-Vlasov system. *J Differential Equations*, 2021, 280: 841–890

Asymptotical behavior of one-dimensional compressible Navier-Stokes-Vlasov system

Hailiang Li & Lingyun Shou

Abstract In this paper, we investigate the asymptotical behavior of global solutions to the initial value problem for one-dimensional compressible Navier-Stokes-Vlasov system in the spatial periodic domain. It is showed that both the fluid velocity and the macroscopic velocity of the particles converge to the same speed exponentially in time, and the compact support of the distribution function associated with the velocity variable converges to a point set exponentially in time.

Keywords fluid-particle model, compressible Navier-Stokes system, Vlasov equation, asymptotical behavior

MSC(2020) 35Q30, 35Q83, 82C40

doi: 10.1360/SSM-2020-0275