第 46 卷 第 2 期
2007 年 3 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol.46 No.2
Mar. 2007

关于半直积同构的一点注记

王慧群, 曾吉文*
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 给定一个有限群 N 和 H, 满足 $G_\varphi = N \rtimes_\varphi H$ 和 $G_\psi = N \rtimes_\psi H$, 在互素的前提下, 给出了半直积同构的一个充分必要条件. 由此给出了当算子群是循环群时, 计算半直积同构类个数的一个方法. 作为上述结论的应用, 简明地算出了 24 阶群的完全同构分类.

关键词: 半直积; 群作用; 自同构
中图分类号: O 152 文献标识码: A 文章编号: 0438-0479(2007)02-0149-04

设 N, H 为有限群, $\varphi, \psi: H \to \mathrm{Aut}(N)$ 是两个群作用. 记 $G_\varphi = N \rtimes_\varphi H$ 和 $G_\psi = N \rtimes_\psi H$ 为相应的半直积. 研究 $G_\varphi \quad G_\psi$ 成立的条件是一个重要课题, 由于这些条件和群的扩张理论, 群的上同调理论等密切相关, 因而也是一个非常难的课题. 文献[1]曾给出 $G_\varphi \cong G_\psi$ 成立的一个充分条件. 在此基础上, 本文采用群作用的观点, 给出一个充分必要条件(下文中的定理 1). 当 H 是循环群时, 在这一特殊的环境中如何选择扩张函数决定 N 的所有循环扩张, 一般的群论教科书(比如说文献[2]定理 3.9)都有介绍, 然而遗憾的是根据已知文献难于区分这些扩张的同构类, 甚至也不知道有几个同构类. 本文在互素作用的条件下, 成功地解决了当 H 是循环群时半直积同构类的个数问题(下文的定理 2). 当群的阶已知时, 讨论低阶群的同构分类是一个专业性很强的课题, 文献[3]列出了 2 000 阶以下各阶群的同构类数. 对于具体的 $2^3 \cdot q$ 阶群(q 是奇素数), 特别是 24 阶群, 文献[4]给出了具体的同构分类, 同时, 文献[4], 687 页曾指出, 当 p 较大时, 讨论过于复杂困难. 本文作为主要定理的应用, 以 24 阶群为例, 简明地计算出其同构分类及其生成关系; 并指出其他情形的 $2^3 \cdot q$ 阶群同构分类可以类似简洁地得到. 相关的文献也请参考文献[5].

1 引理部分

以下大多数结论可以在一般的群论教科书中查到, 比如文献[2, 4, 6]. 为方便阅读, 罗列如下:

引理 1 设 G 是 8 阶群. 则其可能的结构及其相应的自同构群结构如下:

(1) $G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1, [a, b] = [b, c] = [c, a] = 1 \rangle$ (初等交换群), $\mathrm{Aut}(G) = GL(3, 2)$;

(2) $G = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, [a, b] = 1 \rangle$ ((4, 2)-型交换群), $\mathrm{Aut}(G) = D_8$;

(3) $G = \langle a \mid a^8 = 1 \rangle$ (循环群), $\mathrm{Aut}(G) = K_4$(4 阶初等交换群);

(4) $G = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, ab = ba^{-1} \rangle$ (二面体群), $\mathrm{Aut}(G) = D_8$;

(5) $G = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, ab = ba^{-1} \rangle$ (四元数群), $\mathrm{Aut}(G) = S_4$.

定义 1 设 N, H 为有限群, Ω 是一个非空集合, S_Ω 表示 Ω 上的对称群. 称 φ 是 H 在 Ω 上的一个作用, 如果 φ 是 H 到 S_Ω 的群同态; 称 φ 是 H 在 N 上的一个作用, 如果 φ 是 H 到 $\mathrm{Aut}(N)$ 的群同态. 设 $\alpha, \beta \in \Omega$ (或者 N), $h \in H$. 符号 α^h 表示 α 在 $\varphi(h)$ 下的像, 集合 $\{\alpha^h \mid h \in H\}$ 称为 Ω(或 N) 的一个 H-轨道. 称 α, β 同在一个 H-轨道, 如果有 $x \in H$ 使得 $\alpha = \beta^x$.

引理 2 N, H 为有限群, $\varphi: H \to \mathrm{Aut}(N)$ 是一个群作用. 在笛卡儿集合 $N \times H$ 上规定运算

$$(n, h)(m, k) = (nm^{\varphi(h)^{-1}}, hk).$$

则在该规定下, 笛卡儿集合 $N \times H$ 是群, 其单位元是 $(1_N, 1_H)$.

上述引理中的群常记为 $G = N \rtimes_\varphi H$, 称作 N 和 H 关于 φ 的半直积. 在同构意义下, 可以把 N, H 当作 G 的子群, 并且 $N \trianglelefteq G$.

引理 3 (Schur-Zassenhaus) 设 N 是 G 的正规 Hall 子群, 则 N 在 G 中有补, 且补子群关于 N 共轭(即若 K, H 都是 N 的补子群, 则有 $n \in N$, 使得 $K = H^n$).

2 主要定理及其证明

引理 4 设 N, H 为有限群, 记 $\Omega = \mathrm{Hom}(H, \mathrm{Aut}$

收稿日期: 2006-10-19
* 通讯作者: jwzeng@xmu.edu.cn

$(N))$为H 在N 上所有作用构成的集合.

(1)对于给定的 $\varphi\in\Omega$, $\alpha\in \mathrm{Aut}(N)$, $\beta\in\mathrm{Aut}(H)$, 定义

$$\varphi^{(\alpha,\beta)}: H\to\mathrm{Aut}(N), h\mapsto\alpha^{-1}\varphi(h^{\beta^{-1}})\alpha.$$

则 $\varphi^{(\alpha,\beta)}\in\Omega$.

(2)设 $\Gamma=\mathrm{Aut}(N)\times\mathrm{Aut}(H)$, 则上述定义给出 Γ 在集合 Ω 上的一个作用.

证明　(1)显然 Ω 是一个非空集合. 因为 α^{-1}, $\varphi(h^{\beta^{-1}})$, α 都是N 的自同构, 所以 $\alpha^{-1}\varphi(h^{\beta^{-1}})\alpha$ 也是N 的自同构. 又容易验证 $\varphi^{(\alpha,\beta)}(hk)=\varphi^{(\alpha,\beta)}(h)\varphi^{(\alpha,\beta)}(k)$, 其中 $h,k\in H$, 所以 $\varphi^{(\alpha,\beta)}\in\Omega$.

(2)固定 α,β, 容易验证 $\varphi\mapsto\varphi^{(\alpha,\beta)}$ 是 Ω 的一个置换. 用$f(\alpha,\beta)$表示置换 $\varphi\to\varphi^{(\alpha,\beta)}$, 以下验证 $f:(\alpha,\beta)\mapsto f(\alpha,\beta)$ 是 Γ 在 Ω 上的一个作用. 设$(\alpha,\beta),(\gamma,\lambda)\in\Gamma$, $f(\alpha\gamma,\beta\lambda)$ 表示:

$$\varphi\to\varphi^{(\alpha\gamma,\beta\lambda)}: h\mapsto(\alpha\gamma)^{-1}\varphi(h^{(\beta\lambda)^{-1}})\alpha\gamma.$$

并且$f(\alpha,\beta)f(\gamma,\lambda)$ 表示:

$$\varphi\to(\varphi^{(\alpha,\beta)})^{(\gamma,\lambda)}: h\mapsto\gamma^{-1}\varphi^{(\alpha,\beta)}(h^{\lambda^{-1}})\gamma.$$

但是 $\gamma^{-1}\varphi^{(\alpha,\beta)}(h^{\lambda^{-1}})\gamma=\gamma^{-1}(\alpha^{-1}\varphi((h^{\lambda^{-1}})^{\beta^{-1}})\alpha)\gamma=(\alpha\gamma)^{-1}\varphi(h^{(\beta\lambda)^{-1}})\alpha\gamma$. 即$f$ 是同态.

由引理 4(1)知, 对于给定的 $\varphi\in\Omega$, $\alpha\in\mathrm{Aut}(N)$, $\beta\in\mathrm{Aut}(H)$, 总有 $\phi=\varphi^{(\alpha,\beta)}$, 使之满足 $\phi(h^{\beta})=(\varphi(h))^{\alpha}$, 即下式可交换:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Aut}(N) \\ \beta\downarrow & & \downarrow(\ )^{\alpha} \\ H & \xrightarrow[\phi]{} & \mathrm{Aut}(N) \end{array}$$

由上交换式可以清楚的看出 $\varphi\to\varphi^{(\alpha,\beta)}$ 是 Ω 的一个置换.

定理 1　在引理 4 的条件和符号下, 并设$(|H|,|N|)=1$. 对于两个群作用 $\varphi,\phi: H\to\mathrm{Aut}(N)$, 设 $G_{\varphi}=N\rtimes_{\varphi}H$ 和 $G_{\phi}=N\rtimes_{\phi}H$ 是对应的两个半直积. 则 $G_{\varphi}\cong G_{\phi}$ 当且仅当 φ,ϕ 属于同一个 Γ-轨道.

证明　(1)如果 φ,ϕ 属于同一个 Γ-轨道, 即存在(α,β)时 Γ 使得 $\phi=\varphi^{(\alpha,\beta)}$. 设 $\gamma: (n,h)\mapsto(n^{\alpha},h^{\beta})$, 下证 γ 就是 G_{φ} 到 G_{ϕ} 的一个同构.

由于 α 和 β 是双射, 故 γ 也是一个双射.

根据引理 2 可知:

$$\gamma((n,h)(m,k))=\gamma(nm^{\varphi(h^{-1})},hk)=$$
$$((nm^{\varphi(h^{-1})})^{\alpha},(hk)^{\beta})=(n^{\alpha}m^{\varphi(h^{-1})\alpha},h^{\beta}k^{\beta}),$$

且

$$\gamma(n,h)\gamma(m,k)=(n^{\alpha},h^{\beta})(m^{\alpha},k^{\beta})=$$
$$(n^{\alpha}(m^{\alpha})^{\phi(h^{\beta})^{-1}},h^{\beta}k^{\beta})=(n^{\alpha}m^{\alpha\phi(h^{\beta})^{-1}},h^{\beta}k^{\beta}).$$

注意到 $\phi=\varphi^{(\alpha,\beta)}$ 以及 $\varphi^{(\alpha,\beta)}$ 的定义, 可知:

$$\phi((h^{\beta})^{-1})=\alpha^{-1}\varphi(((h^{\beta})^{-1})^{\beta^{-1}})\alpha=\alpha^{-1}\varphi(h^{-1})\alpha,$$

所以说 $\gamma((n,h)(m,k))=\gamma(n,h)\gamma(m,k)$, 即 γ 是一个群同构.

(2)如果 $G_{\varphi}\cong G_{\phi}$, 设 $\gamma: G_{\varphi}\to G_{\phi}$ 是一个群同构. 由于正规 Hall 子群是特征子群以及题设中的互素条件, 可知N 是特征子群, 因此 γ 可以诱导出N 的一个自同构. 又因为 H^{γ} 也是N 在 G_{ϕ} 的一个补, 由 Schur-Zassenhaus 定理可知, 存在 n 时 N, 使得$(H^{\gamma})^{n}=H$. 如果把 n 视作G 的一个自同构, 仍记做 n. 由$(H^{\gamma})^{n}=H^{\gamma n}=H$, 可知$G$ 的自同构 γn 不仅可以诱导出N 的自同构, 而且可以诱导出H 的自同构. 由此, 不妨假定 γ 可以同时诱导出N 的自同构和H 的自同构, 分别记为 α,β, 则$(n,h)^{\gamma}=(n^{\alpha},h^{\beta})$. 以下证明 $\phi=\varphi^{(\alpha,\beta)}$.

对于 $n,m\in N$, $h,k\in H$,

$$((n,h)(m,k))^{\gamma}=(n,h)^{\gamma}(m,k)^{\gamma}=$$
$$(n^{\alpha},h^{\beta})(m^{\alpha},k^{\beta})=(n^{\alpha}m^{\alpha\phi((h^{\beta})^{-1})},h^{\beta}k^{\beta}),$$

而又有:

$$((n,h)(m,k))^{\gamma}=(nm^{\varphi(h^{-1})},hk)^{\gamma}=$$
$$((nm^{\varphi(h^{-1})})^{\alpha},(hk)^{\beta})=(n^{\alpha}m^{\varphi(h^{-1})\alpha},h^{\beta}k^{\beta}).$$

这迫使:

$$\varphi(h^{-1})\alpha=\alpha\phi((h^{\beta})^{-1}),$$

即:

$$\alpha^{-1}\varphi(h^{-1})\alpha=\phi((h^{\beta})^{-1}),$$

也即 $\phi=\varphi^{(\alpha,\beta)}$.

由定理 1 的充分性可知, 只要 φ,ϕ 属于同一个 Γ-轨道, 就有 $G_{\varphi}\cong G_{\phi}$. 特别地, $\mathrm{Aut}(N)$ 忠实地作用在 N 上, 则相应的半直积在同构意义下惟一.

推论 1　在定理 1 的条件和符号下, 所有可能的半直积同构类个数恰好等于 Ω 的 Γ-轨道个数.

定义 2　设H 是 r 阶循环群, 互素地作用在有限群N 上, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathrm{Aut}(N)$. 在 $\mathrm{Aut}(N)$定义一个关系, 称 α_1 和 α_2 是 r-共轭的, 如果存在 $1\leqslant i\leqslant r$, $(i,r)=1$, 满足 α_1^{i} 与 α_2 在 $\mathrm{Aut}(N)$中是共轭的.

显然 r-共轭关系是等价关系, r-共轭关系等价类是一些通常共轭类的并. 并且也容易说明如果 r 是素数, 满足 $r\mid|\mathrm{Aut}(N)|$ 但 $r^2\nmid|\mathrm{Aut}(N)|$, 则 $\mathrm{Aut}(N)$中的 r 阶元全是 r-共轭的.

定理 2　设H 是 r 阶循环群, 互素地作用在有限群N 上. 则所有可能的半直积同构类个数恰好等于方程 $x^{r}=1$ 在 $\mathrm{Aut}(N)$中的解集合在 r-共轭关系下的等价类个数.

证明　固定H 的生成元 h, 则群作用 $\varphi: H\to\mathrm{Aut}(N)$由 h^{φ} 的取值惟一确定, 并且该取值可遍历方程 $x^{r}=1$ 在 $\mathrm{Aut}(N)$中的解集合. 再设 $\phi: H\to\mathrm{Aut}(N)$是另一个群作用. 由定理 1, 可知半直积 $G_{\varphi}=N\rtimes_{\varphi}H$ 和 $G_{\phi}=N\rtimes_{\phi}H$ 同构当且仅当存在 $\alpha\in\mathrm{Aut}(N)$和 $\beta\in\mathrm{Aut}$

(H) 满足 $\psi=\varphi^{(\alpha\beta)}$, 即有: $\psi(h^{\beta})=(\varphi(h))^{\alpha}$.

又因为, H 是循环群, β 必是方幂形式: $h^{1}\to h^{i}$, 其中 $1\leqslant i\leqslant r$, $(i,r)=1$; 并且 β 和 i 相互惟一确定. 所以说, G_{φ} 和 G_{ψ} 同构当且仅当存在 $\alpha\in\mathrm{Aut}(N)$ 和上述的 i, 满足 $\psi(h^{i})=(\varphi(h))^{\alpha}$, 即 $\psi(h)^{i}=(\varphi(h))^{\alpha}$. 也即 $\psi(h)$ 和 $\varphi(h)$ 是 r-共轭的. 再由推论 1 可得结论.

推论 2　H 是 r 阶循环群, 互素、忠实地作用在有限群 N 上. 则所有可能的半直积(不含直积)同构类个数恰好等于方程 $x^{r}=1$ 在 $\mathrm{Aut}(N)$ 中 r 阶元集合在 r-共轭关系下的等价类个数.

3　定理应用

本节主要讨论 24 阶群的同构分类, 并且约定: 下文从结论 1 到结论 4 中, G 总是 24 阶群, 且总有 $P\in\mathrm{Syl}_2(G)$, $Q\in\mathrm{Syl}_3(G)$.

对于 24 阶群 G, 按照 P, Q 在 G 中是否正规, 可以有 4 种不同的组合, 以下分别对每个组合讨论.

结论 1　设 $P\lhd G$, $Q\lhd G$, 则 G 有 5 种互不同构类型, 即:

(1) $G=\langle a,b,c,d\mid a^2=b^2=c^2=d^3=1,[a,b]=[b,c]=[c,d]=[d,a]=1\rangle$ (交换群);

(2) $G=\langle a,b,c\mid a^4=b^2=c^3=1,[a,b]=[b,c]=[c,d]=1\rangle$ (交换群);

(3) $G=\langle a,b\mid a^8=b^3=1,[a,b]=1\rangle$ (循环群);

(4) $G=\langle a,b,c\mid a^4=b^2=c^3=1,ab=ba^{-1},[a,c]=[b,c]=1\rangle$;

(5) $G=\langle a,b\mid a^4=1=c^3,a^2=b^2,ab=ba^{-1},[a,c]=[b,c]=1\rangle$.

证明　显然 $G=P\times Q$, G 的结构由 P 完全决定. 当 P 依次取遍引理 1 中 5 种不同的结构, 相应地可得到 G 的结构.

其中情形 1、情形 2 和情形 3 是交换幂零群, 情形 4 和情形 5 是非交换幂零群. 以下讨论 24 阶非幂零群, 此时西罗 2-子群和西罗 3-子群不能同时正规于 G.

结论 2　设 $P\lhd G$, $Q\ntriangleleft G$, 则 G 有两种互不同构类型, 即:

(6) $G=\langle a,b,c\mid a^3=b^4=1,b^2=c^2,c^{-1}bc=b^{-1},a^{-1}ba=c,a^{-1}ca=cb\rangle$;

(7) $G=\langle a,b,c,d\mid a^3=b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1,a^{-1}ba=c,a^{-1}ca=d,a^{-1}da=b\rangle$.

证明　设 $Q=\langle A\rangle$. 由于 $P\lhd G$, $Q\ntriangleleft G$, 可知 $G=P\rtimes Q$. 对于 8 阶子群 P, 表面上可以取到引理 1 中的 5 种情况, 但事实上, P 只能是四元数群或者是 8 阶初等交换群. 这是因为: 考虑 Q 作用在 P 上, 由于 G 是非幂零群, 该作用不能是平凡作用; 由于 Q 是 3 阶群, 只能是忠实作用, 即可把 Q 当作 $\mathrm{Aut}(P)$ 的子群. 再考虑 $|\mathrm{Aut}(P)|$, 由引理 1, 即可知 P 只能是四元数群或者是 8 阶初等交换群. 以下分情况讨论.

当 $P=Q_8=\langle b,c\mid b^4=1,b^2=c^2,c^{-1}bc=b^{-1}\rangle$, 则 $\mathrm{Aut}(P)=S_4$. 注意到 S_4 中的 3 阶元全部共轭, 自然是 3-共轭, 方程 $x^{r}=1$ 在 $\mathrm{Aut}(P)$ 中 3 阶元集合在 3-共轭关系下的等价类个数是 1, 由推论 2, 可知 $G=P\rtimes Q$ 仅一个同构类, 而第 6 个群满足条件. 即在同构意义下, 只能是第 6 个群.

当 $P=\langle b,c,d\mid b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1\rangle$, 是初等交换群时. 则 $\mathrm{Aut}(P)=GL(3,2)$. 注意到 $|GL(3,2)|=168=2^3\cdot 3\cdot 7$, 知 $\mathrm{Aut}(P)=GL(3,2)$ 中的 3 阶元全部 3-共轭(事实上是全部共轭), 由推论 2 可得, 在同构意义下仅有第 7 个群满足条件.

两者显然不同构.

注　上述群中 $G=\langle a,b,c\mid a^3=b^4=1,b^2=c^2,c^{-1}bc=b^{-1},a^{-1}ba=c,a^{-1}ca=cb\rangle\cong SL(2,3)$ (可参见文献[6], 第 245 页).

结论 3　设 $P\ntriangleleft G$, $Q\lhd G$, 则 G 有 7 种互不同构类型, 即:

(8) $G=\langle a,b,c\mid a^3=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},b^{-1}ab=a,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle$;

(9) $G=\langle a,b,c\mid a^3=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1},b^{-1}ab=a^{-1},c^{-1}ac=a\rangle$;

(10) $G=\langle a,b,c\mid a^3=b^4=1,b^2=c^2,c^{-1}bc=b^{-1},b^{-1}ab=a,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle$;

(11) $G=\langle a,b\mid a^3=b^8=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$;

(12) $G=\langle a,b,c\mid a^3=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b,b^{-1}ab=a,c^{-1}ac=a^{-1}\rangle$;

(13) $G=\langle a,b,c\mid a^3=b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b,b^{-1}ab=a^{-1},c^{-1}ac=a\rangle$;

(14) $G=\langle a,b,c,d\mid a^3=b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1,b^{-1}ab=a^{-1},[a,c]=[a,d]=1\rangle$.

证明　设 $Q=\langle a\rangle$. 考虑 P 作用在 Q 上(自然是非平凡作用). 因为 $\mathrm{Aut}(Q)=Z_2$ 是 2 阶群, 所以作用核一定是 4 阶群. 容易证明, 作用核是循环群的所有作用都在一个 Γ-轨道里, 作用核是 4 阶非循环群的所有作用也都在一个 Γ-轨道里, 其中 $\Gamma=\mathrm{Aut}(Q)\times\mathrm{Aut}(P)$, 因而上述作用最多两个轨道. 考虑到 Q 的非平凡自同构就是求逆自同构以及推论 1, 那么可以知道刻画该作用的本质一是确定作用核, 二是确定引起求逆自同构的元素. 设作用核为 K, 以下根据 P 和 K 的具体结构进行讨论.

(1) 当 $P=\langle b,c\mid b^4=c^2=1,c^{-1}bc=b^{-1}\rangle$ 是二面体群时, K 或是循环群, 或是 Klain 四元群.

如果 K 循环, 可知必有 $K=\langle b\rangle$. 此时, 易知 c 引起求逆自同构, 对应的半直积就是上述第 8 个群.

如果 K 非循环, 则 b 引起求逆自同构. 注意到 $b^2\in K$, 取 K 中的一个非单位元并且 $\neq b^2$, 设为 b^ic. 再令 $c_1=b^ic$, 则 $P=\langle b,c_1\rangle$, 并且 $b^4=c_1^2=1,c_1^{-1}bc_1=b^{-1}$. 因而适当替换 P 的生成元, 可使 $K=\langle b^2,c\rangle$, 此时对应的半直积就是上述第 9 个群.

这两个群不同构, 只要注意到第 8 个群中有 12 阶循环子群 $\langle ab\rangle$, 而第九个群没有 12 阶循环子群. 事实上, 第 8 个群就是 24 阶二面体群, 即 $G=\langle x,y\mid x^{12}=y^2=1,y^{-1}xy=x^{-1}\rangle=D_{24}$, 其中 $x=ab,y=c$.

(2) 当 $P=\langle b,c\mid b^4=1,b^2=c^2,c^{-1}bc=b^{-1}\rangle$ 是四元数群时, 由于 P 仅有一个 2 阶元, 因而 K 必循环. 不妨假定 $K=\langle b\rangle$. 此时, 易知 c 引起求逆自同构, 对应的半直积就是上述第 10 个群.

(3) 当 $P=\langle b\mid b^8=1\rangle$ 是循环群时, 4 阶子群惟一, 即 $K=\langle b^2\rangle$. 此时, 易知 b 引起求逆自同构, 对应的半直积就是上述第 11 个群.

(4) 当 $P=\langle b,c\mid b^4=c^2=1,bc=cb\rangle$ 是(4, 2)-型交换群时, 类似于 1 可知:

如果 K 循环, 可使 $K=\langle b\rangle$, 使 c 引起求逆自同构, 对应的半直积就是上述第 12 个群; 如果 K 非循环, 则 b 引起求逆自同构, 对应的半直积就是上述第 13 个群. 并且, 第 12 个群就是广义四元数群, 令 $x=ab,y=bc$, 则 $G=\langle x,y\mid x^{12}=y^4=1,x^6=y^2,y^{-1}xy=x^{-1}\rangle=Q_{24}$, 它有 12 阶元素. 由于第 13 个群没有 12 阶元素, 所以这两个群不同构.

(5) 当 $P=\langle b,c,d\rangle$ $b^2=c^2=d^2=1,[b,c]=[c,d]=[d,b]=1$ 时是初等交换群时, K 必非循环, 对应的半直积就是上述第 14 个群.

结论 4 设 $P\ntriangleleft G,Q\ntriangleleft G$, 则:

(15) $G\cong S_4$.

证明 由西罗定理可知, G 有 3 个西罗 2-子群, 有 4 个西罗 3-子群. 设 $H=N_G(Q)$ 是 Q 的正规化子, 则易知 $|G:H|=4,|H|=6$. 首先可以断言 $H\cong S_3$ (若否, 则 H 必循环. 考虑 G 中元素的阶, 有 8 个 3 阶元, 至少有 8 个 6 阶元. 这迫使西罗 2-子群惟一, 矛盾). 其次考虑 G 在 H 上的置换表示, 则必为忠实表示, 即 G 可视为 S_4 的子群, 这只有 $G\cong S_4$.

由于同构的群, 必有同构的西罗子群, 并且有相同的正规性, 因此上述 15 个 24 阶群是彼此不同构的. 另外, 上述的生成关系并不是生成元最少的生成关系, 有许多情况可以减少生成元个数(比如第 8 个群和第 12 个群).

对于一般的 $2^3\cdot q,(q\neq 3)$ 阶群 G, 设 $P\in Syl_2(G),Q\in Syl_q(G)$. 容易证明当 $q\neq 7$ 时, 总有 $Q\lhd G$, 因而只需讨论类似结论 1 和 3 两种情况. 当 $q=7$ 时, 如果 $Q\ntriangleleft G$, 必有 $P\lhd G$, 可分 3 种情况讨论. 总之一般地, $2^3\cdot q(q\neq 3)$ 阶群 G 可以类似地得到其同构分类及其相应的生成关系.

参考文献:

[1] 刘修生. 关于半直积的同构[J]. 武汉大学学报: 理学版, 2003, 49(3): 293-296.

[2] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[3] Besche H U, Eick B, Brien E A Ó. A millennium project: constructing small groups[J]. International Journal of Algebra and Computation, 2002, 12(5): 623-644.

[4] 张远达. 有限群构造[M]. 北京: 科学出版社, 1984.

[5] 樊恽, 黄平安. 有限群分裂扩张的稳定自同构群[J]. 数学年刊, 2001, 22A(6): 791-796.

[6] Robinson D J S. A course in the theory of groups[M]. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1982.

A Note on the Isomorphisms of the Semidirect Product

WANG Hui-qun, ZENG Ji-wen*

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Let $G_\varphi=N\rtimes_\varphi H$ and $G_\phi=N\rtimes_\phi H$ be two semi-direct products of N and H. We give a sufficient and necessary condition for $G_\varphi\cong G_\phi$. This offers a way to calculate the number of different G_φ (up to isomorphism). If H is a cyclic group, we have another way to calculate the number of different G_φ (up to isomorphism). As a application, we have a simple way to calculate the isomorphic types of groups of order 24.

Key words: semidirect product; action of a group on a set; isomorphism