

卫星距离的新经验公式及其说明

胡中为 陈子雄

(南京大学天文系)

摘 要

本文求出木卫、土卫、天卫系中卫星离行星的距离 a_n 的一种新经验公式: $a_n = B_1 \cdot B^n$, 其中 B_1 、 B 对各卫星系是常数。由此计算结果与观测值偏差一般小于 10%。我们认为, 卫星是在行星周围的气体-星子盘中, 通过小星子聚集形成的, 盘中主要成分是气体, 气体阻尼效应在星子聚集形成卫星过程中起重要作用。分析表明, 盘中的一种径向小扰动可以导致引力不稳定性而形成密度增加的气体环系。在这种环系中小星子聚集形成卫星。环分布形式导致距离规律。

一、卫星系距离规律的经验公式

在太阳系中, 有木卫系、土卫系和天卫系三个典型的卫星系统, 它们有同样形式的距离规律, 对此近年来有不少新的研究^[2,4-6]。由于各卫星系形成的具体条件有所不同, 因而距离规律中的常数也应不同。然而, 无论在提丢斯-波得型或 Blag-Richardson 的经验公式中^[1], $n = -\infty$, 0 及负值都难于理解其起源演化意义。我们力求找到 n 均取正整数的较合理的距离规律的经验公式。考虑到卫星一般的可能形成范围是介于行星的洛希极限和相对太阳而言的引力范围^[9]之间, 所以我们取 n 从略大于洛希极限向外计算, 即依次取为 1, 2, 3, …, 对各卫星系画出 $n \sim \lg a_n$ 图(图 1)。结果表明, 多数卫星在图上位于直线附近, 而另外几个卫星只要赋予新编号 n , 也位于直线附近。因此, 相当近似地存在距离规律经验关系式

$$\lg a_n = b_1 + bn, \quad (1)$$

或

$$\begin{aligned} a_n &= B_1 \cdot B^n, \\ b_1 &= \lg B_1, b = \lg B. \end{aligned} \quad (1)$$

这样, 对于各卫星系(至少 5 个卫星), 只需两个常数就可用(1)式表达距离规律。木卫系、土卫系和天卫系的 B_1 、 B , 计算的 a_n 及观测 a_n 值^[7], 列于表 1—表 3。表中也列出了相对误差 $\Delta = \frac{a_n - a_{\text{观}}}{a_{\text{观}}}$ 。结果表明, 对大多数卫星, $\Delta < 10\%$, 最大误差 $\Delta_{\text{max}} \sim 20\%$, 而且误差大的都是易于轨道演化的卫星。

表 1 木卫的 a_n 观测值和计算值(公里)

n	卫 星	$a_{n\text{观}}$	$a_{n\text{计}}$	Δ
1	J16	127900	97360	+0.238
	J14	128400		+0.241
2	J5	181300	157340	+0.132
3	J15	222400	254260	-0.143
4	J1	412600	410890	+0.004
5	J2	670900	663990	+0.005
6	J3	1070000	1073000	-0.003
7	J4	1880000	1734000	+0.078
11	J13	11110000	11825000	-0.065
	J6	11470000		-0.031
	J10	11710000		-0.011
	J7	11740000		-0.008
12	J12	20700000	19109700	+0.043
	J11	22350000		+0.143
	J8	23300000		+0.180
	J9	23700000		+0.190

注: $a_n = 6.025 \times 10^4 \times 1.616^n$ $B_1 = 6.025 \times 10^4$ 公里 $B = 1.616$

表 2 土卫的 a_n 观测值和计算值(公里)

n	卫 星	$a_{n\text{观}}$	$a_{n\text{计}}$	Δ
1	S15	138000	137100	+0.007
	S14	139000		+0.013
	S13	142000		+0.035
	S10, S11	151000		+0.092
2	S1	185000	179900	+0.027
3	S2	238000	236000	+0.008
4	S3	295000	309600	-0.049
5	S4	377000	406200	-0.077
6	S5	527000	533000	-0.012
9	S6	1222000	1204000	+0.007
10	S7	1481000	1579000	-0.066
13	S8	3560000	3566600	+0.002
18	S9	12930000	1386200	-0.072

注: $a_n = 1.045 \times 10^5 \times 1.312^n$ $B_1 = 1.045 \times 10^5$ 公里 $B = 1.312$

二、距离规律的理论说明

我们认为,木卫、土卫和天卫分别是在中心体木星、土星和天王星引力场作用下的气体-星子盘中形成的^[8];气体-星子盘中主要成分是气体,但卫星主要是由固态物质组成的星子聚集形成的;星子集聚过程中,气体阻尼起了重要作用。 气体-星子盘中的动力学过

表 3 天卫的 a_n 观测值和计算值(公里)

n	卫 星	$a_{n\text{观}}$	$a_{n\text{计}}$	Δ
3	U5	130000	130300	-0.002
4	U1	192000	190500	-0.008
5	U2	267000	278400	-0.043
6	U3	438000	407100	+0.071
7	U4	586000	595200	-0.015

注: $a_n = 4.1687 \times 10^4 \times 1.462^n$ $B_1 = 4.1687 \times 10^4$ 公里 $B = 1.462$

程导致引力不稳定性,结果形成气体环系. 星子易于在密度大的气体环中聚集成卫星,这就决定了卫星系有距离规律.

用流体力学理论可证明气体-星子盘中的扰动可以导致上述气体环系的形成. 我们把行星周围的气体-星子盘近似取为轴对称的转动薄盘. 在柱坐标系 (r, θ, z) 中,流体力学的完整方程组(连续性方程,运动方程和泊松方程)对小扰动(以下标 1 表示)线性化为^[10,11]

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_0 u_1)}{\partial r} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - 2\Omega_0 v_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial r} - c_0^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\kappa^2}{2\Omega_0} u_1 = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 4\pi G \sigma_1 \delta(z); \quad (5)$$

$$\kappa^2 = 2\Omega_0 \left[2\Omega_0 + \frac{\partial (r\Omega_0)}{\partial r} \right], \quad \Omega_0 = \frac{v_0}{r}. \quad (6)$$

其中 σ_1 为面密度, u_1 和 v_1 分别为径向速度和切向速度, ϕ_1 为引力势, c_0 为声速, $\delta(z)$ 为 δ 函数. 考虑(2)–(5)如下形式的解:

$$\begin{cases} \sigma_1(r, t) = \tilde{\sigma}_1(r) e^{-i\omega t}, & u_1(r, t) = \tilde{u}_1(r) e^{-i\omega t}, \\ v_1(r, t) = \tilde{v}_1(r) e^{-i\omega t}, & \phi_1(r, z, t) = \tilde{\phi}_1(r, z) e^{-i\omega t}. \end{cases} \quad (7)$$

对于(5)式,取引力势 $\tilde{\phi}_1(r, z)$ 的形式为^[10]

$$\tilde{\phi}_1(r, z) = e^{-k(r)|z|} R(r). \quad (8)$$

而(5)化为两个式子:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + k^2 R = 0, \quad (9)$$

$$-2kR = 4\pi \tilde{\sigma}_1 G. \quad (10)$$

(10)式改写为

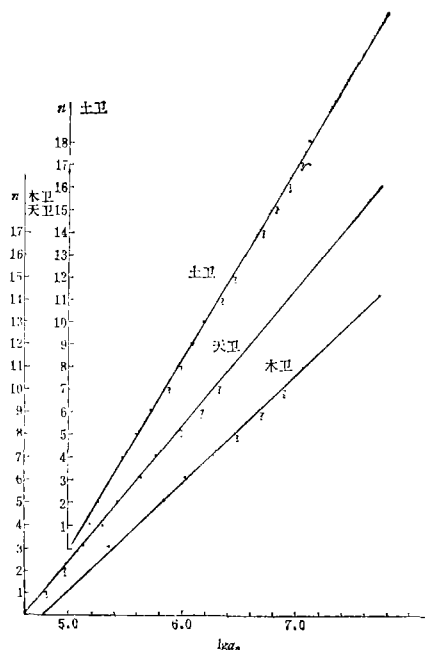


图 1

$$\tilde{\sigma}_1(r) = -\frac{k(r)}{2\pi G} R(r). \quad (11)$$

考虑到小扰动, 令

$$R(r) = e^{iA\xi(r)}, \quad \xi(r) = \xi_0(r) - i\xi_1(r)/A, \quad \xi_1(r) < \xi_0(r) \quad (12)$$

$$k(r) = k_0(r) - ik_1(r)/A, \quad k_1(r) < k_0(r) \quad (13)$$

其中, 下标 0 表示非扰值(以下同), A 是个大参数(常数). 以下按大参数 A 的量级近似, 可得面密度和引力势如下形式的解(推导略):

$$\tilde{\sigma}_1(r) = -\frac{\eta_0}{r^2 G \ln B} \cos \left[\frac{2\pi}{\ln B} \left(\ln r - \ln B_1 - \frac{1}{2} \ln B \right) \right], \quad (14)$$

$$\tilde{\phi}_1(r, z=0) = R(r) = \frac{\eta_0}{r} \cos \left[\frac{2\pi}{\ln B} \left(\ln r - \ln B_1 - \frac{1}{2} \ln B \right) \right]. \quad (15)$$

其中, η_0 为积分常数. 为满足小扰动条件, $|\tilde{\phi}_1| \ll \phi_0$, 即 $\left| \frac{\eta_0}{r} \right| \ll |\phi_0| = \left| \frac{GM}{r} \right|$. 综上所述, 气体-星子盘中形式(15)式的小扰动结果导致盘中形成的卫星有(1)式的规律.

三、结果与讨论

1. 由推导可知, $A = \frac{2\pi}{B}$. 对于木卫系、土卫系和天卫系, 分别算出 A 值为 13.1, 23.1, 16.8, 的确较大, 因此, A 作为大参数而取的近似较好.

2. 在木星、土星和天王星周围的气体-星子盘中的径向小扰动, 可以导致引力不稳定性 ($\omega^2 < 0$), 使盘形成密度增加的气体环系. 扰动密度分布由(14)式表示. 在气体密度较大处的小星子易聚集而形成卫星. 卫星有 $a_n = B_1 \cdot B^n$ 的距离规律. B 值与盘的非扰密度有关, B_1 值与洛希限有关.

3. 关于卫星实际轨道半长径与距离规律的偏差. 我们认为, 木星和土星的行星核吸积原始星云中的气体和小星子而形成气体-星子盘; 而天王星受大星子碰撞抛出的气体和碎块(可看作小星子)形成气体-星子盘^[8], 盘中主要成分-气体的分布是规则的, 但小星子分布有相当的随机性. 虽然气体阻尼作用使小星子易于在气体环密度大的地方聚集成卫星, 但是小星子分布的情况可导致与距离规律有一定的偏差. 在盘中气体大部份塌缩到行星上或逸散之后, 卫星形成过程基本结束. 卫星之间的引力作用可能导致其轨道变化, 甚至使某些卫星丢失(表中出现空缺). 行星际残余星子可能进入行星引力范围内, 其引力改变卫星轨道, 甚至碰走或碰碎卫星. 由于气体-星子盘外区气体密度小且易逸散, 那里不易形成大卫星, 很可能外木卫是卫星形成的半成品(由于气体消失尚未形成大卫星); 另一方面, 盘的內区, 因行星潮汐力大, 也难于形成大卫星.

4. 本文所得卫星距离规律表明, 三个卫星系都有空缺, 新发现的木卫 15 恰是空缺之一. 另些空缺的实际情况如何? 尤其是天卫系中, 已知卫星仅占卫星可能存在范围(洛希极限与引力范围之间区域)的小部分, 是否会有未发现的卫星呢? 卫星距离规律仅提供一种线索, 未知卫星问题还有待进一步探讨.

参 考 文 献

- [1] Nieto, M. M., The Titius-Bode Law of Planetary Distances: Its History and Theory. Pergamon Press 1972.
- [2] 戴文赛, 天文学报, 第 16 卷, 第 123 页, 1975.
- [3] Alfvén, H. and G. Arrhenius, Evolution of the Solar System, NASA, 1976.
- [4] Prentice, A. J. R. Ter Hear. D., *The Moon and the Planets*, Vol. 21, p. 43, 1979.
- [5] Nowotny, E., *The Moon and the Planets*, Vol. 21, p. 257, 1979.
- [6] Budapest, A. D., *Astron. Nachr.*, Vol. 302, p. 93, 1981.
- [7] Beatty, J. K. et al., New Solar. System, Cambridge Univ Press and Sky Publ. Corporation, 1981.
- [8] 戴文赛, 胡中为, 中国科学, 第 3 期, 第 254 页, 1980.
- [9] 戴文赛, 太阳系演化学(上册), 上海科技出版社, 1979.
- [10] Поляченко, В. Л., Фридман, А. М., Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, Изд. Наука, Москва, 1976.
- [11] 李启斌, 中国科学, 第 1 期, 第 84 页, 1978.

An New Experimental Formula of Satellite Distances and Its Explanation

Hu Zhong-wei Chen Zhi-xiong
(Astronomy Department, Nanjing University)

Abstract

In the solar system, there are three satellite systems—those of Jupiter, Saturn and Uranus. In each satellite system, there is a law of satellite distances. An new empirical formuls of this law is obtained, i.e. (1) in this paper, $a_n = B_1 \times B^n$, where a_n is the orbital semi-major axis of n -th satellite, B_1 and B are constants for each system. Gonorally, the relative error of the value calculated from above formula with the observational value is not more than 10%. However, small satellites have larger errors.

We consider that satellites are formed in the gas-satellitesimal disk around a planet and by aggregation of satellitesimals. In the disk, gas is the major component and its damping effect could play an important role on the process of aggregation of satellitesimal. It is proved that a sort of radical small disturbance in the disk could cause gravitational instability and the formation of a series of gas rings with increasing density where satellitesimals are easy to aggregate into satellite. The space distribution of disturbed density, $\delta_1(r)$, is written in (14). It is showed in (14) that distances of satellite formed in $(\tilde{\sigma}_1)_{\max}$ is just as (1). In addition, the difference of a_n values calculated from (1) to the observational values is discussed. It is especially interesting that the distance law suggests the presence of some unknown satellites, in particular those of Uranus (Fig. 1) which will be discovered in the furture.