小失效概率和多失效模式相关的结构可靠性分析方法

钱华明^{1,2}, 黄土地^{1,2*}, 黄洪钟^{1,2*}, 刘宇^{1,2}, 黄鹏^{1,2}

1. 电子科技大学机械与电气工程学院, 成都 611731;

2. 电子科技大学系统可靠性与安全性研究中心, 成都 611731

*联系人, 黄土地, E-mail: huangtudi@std.uestc.edu.cn; 黄洪钟, E-mail: hzhuang@uestc.edu.cn

收稿日期: 2021-01-31; 接受日期: 2021-05-21; 网络出版日期: 2021-11-17

国家重点研发计划(编号: 2017YFB1301300)资助项目

摘要 本文针对结构可靠性问题中普遍存在的小失效概率和多种失效模式的情形, 提出一种联合多维响应高斯过程模型(Multiple Response Gaussian Process, MRGP)和子集模拟(Subset Simulation, SS)的结构可靠性分析新方法MRGP-SS. 针对结构功能函数难以获取显式表达式及多种失效模式之间可能存在相关性的问题, 采用MRGP模型构建多失效模式下功能函数的代理模型, 并结合主动学习策略, 对代理模型进行更新迭代, 直至满足一定精度条件. 针对小失效概率导致构建功能函数代理模型效率低的问题, 采用SS方法来评估结构的失效概率, 从而获得更小的变异系数, 以提升MRGP构建代理模型的效率. 将提出的MRGP-SS方法应用到案例分析中, 并结合蒙特卡洛仿真, 验证了本文方法的有效性.

关键词 多维响应高斯过程, 子集模拟, 主动学习策略, 多失效模式, 小失效概率, 可靠性分析

PACS: 02.50.Ng, 02.60.Gf, 05.10.Ln, 47.11.Fg

1 引言

结构的可靠性是人们非常重视的问题, 尤其是对工程设计人员而言, 一旦发生失效更是责任重大. 然而, 早期针对结构可靠性问题, 工程设计人员主要依靠个人经验及安全系数法来进行设计, 这种方式存在明显的主观性. 因此, 基于概率论的随机可靠性理论孕育而生, 并被逐渐地应用到结构的可靠性设计中^[1]. 目前, 结构可靠性理论已得到了飞速的发展, 其旨在

确保结构在规定的时间内、规定的条件下, 完成规定功能的能力. 结构的随机可靠性理论基于结构的极限状态方程, 应用概率论和数理统计展开分析研究. 然而, 在实际工程中结构的极限状态方程往往不具有显式表达式, 而且还面临着小失效概率和多失效模式的问题. 基于此, 本文结合基于主动学习Kriging的结构可靠性分析方法, 对小失效概率及多失效模式相关下的结构可靠性问题展开研究.

当已知结构极限状态方程时, 经典的结构可靠性

引用格式: 钱华明, 黄土地, 黄洪钟, 等. 小失效概率和多失效模式相关的结构可靠性分析方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2022, 52: 224612
Qian H M, Huang T D, Huang H Z, et al. Structural reliability analysis for a small failure probability problem under multiple failure modes (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2022, 52: 224612, doi: [10.1360/SSPMA-2021-0031](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0031)

方法包括: 一次二阶矩法(First Order Second Moment, FOSM)^[2]、一阶可靠性方法(First Order Reliability Method, FORM)^[3,4]、二阶可靠性方法(Second Order Reliability Method, SORM)^[5,6]、基于一阶鞍点近似(First Order Saddlepoint Approximation, FOSPA)的可靠性方法^[7,8]、基于矩的可靠性方法^[9,10]等. 然而如前文所述, 实际工程中结构极限状态方程往往不具有显式表达式, 此时建立极限状态方程的高精度近似函数便成为研究重点. 目前, 常用的构建近似函数的方法有: 响应面法^[11,12](Response Surface Method, RSM)、神经网络^[13,14]、Kriging模型^[15,16]、支持向量机^[17,18]等. 近年来, 由于Kriging模型在描述响应值的不确定性方面独具优势, 因而被广泛应用到结构可靠性分析中.

Kriging模型最早由Kriging^[19]提出并用于矿产分布及储量情况的勘测. 在此基础上, 法国数学家Matheron^[20]进一步完善了Kriging模型的数学推导, 使之成为一套完整的理论体系. Nielsen等人^[21]基于MATLAB编制了专门用于构建Kriging模型的DACE工具箱, 从而极大地方便了研究人员对Kriging模型的构建及开展进一步的相关工作. 在DACE工具箱的基础上, Kaymaz^[22]将Kriging模型引入到结构可靠性分析中, 并与基于RSM的可靠性方法进行了对比, 给出了所提方法的优缺点. 张崎^[23]采用Kriging模型对某海洋平台的可靠性问题展开了研究, 并提出了一种联合Kriging和重要性抽样的可靠性分析方法. 但该方法不涉及主动学习过程, 因此, 为了使得构建的Kriging模型满足一定的精度要求往往需要较多的初始样本点, 从而增加了计算量. 为了解决这一问题, Bichon等人^[24]提出了一种基于主动学习Kriging的有效全局可靠性分析方法(Efficient Global Reliability Analysis, EGRA), 结合EFF(Expected Feasibility Function)学习函数不断更新Kriging模型, 有效减少了构建Kriging模型需要的样本量, 但该方法内部涉及优化流程, 计算效率仍有待进一步提高. 基于此, Echard等人^[25]提出了一种联合主动学习Kriging模型和蒙特卡洛仿真(Monte Carlo Simulation, MCS)的可靠性分析方法(Active Learning Kriging and MCS, AK-MCS), 其通过少量样本建立初始Kriging模型, 并结合U学习函数选择迭代样本点, 从而不断更新Kriging模型直至满足收敛条件, 该方法不仅保证了Kriging模型的预测精度而且避免了EGRA方法中的优化流程, 显著减少了用于构建Kriging模型的样本

量, 是经典的基于主动学习Kriging的可靠性方法. 但是, 针对小失效概率问题, AK-MCS方法迭代次数明显增加, 造成巨大的计算量, 对实际工程而言往往难以接受. 为此, Echard等人^[26]采用重要性抽样方法(Importance Sampling, IS)替换AK-MCS方法中的MCS, 形成针对小失效概率问题的AK-IS方法, 其优势在于通过抽样方法产生更好的候选样本点, 确保在U学习函数下样本点的预测值被大概率正确分类, 从而提高计算效率. 同时, Huang等人^[27]将子集模拟(Subset Simulation, SS)技术引入到AK-MCS方法中, 得到另一种处理小失效概率问题的AK-SS方法. 该方法的独到之处在于其从失效概率评估的角度进行考虑, 采用SS方法评估小失效概率, 与MCS方法相比可以得到更小的变异系数, 从而减少候选样本数量, 提高计算效率. 目前, AK-MCS方法以及改进的AK-IS和AK-SS方法在可靠性分析中的有效性已得到学者们的广泛认可, 不过它们还主要集中于单一失效模式下的可靠性问题, 尽管也能处理多个失效模式下的系统可靠性问题, 但计算效率较低. 针对这一问题, Fauriat和Gayton^[28]基于AK-MCS方法提出了一种处理系统可靠性问题的AK-SYS方法, 其在每一次更新Kriging模型中, 不再像AK-MCS方法那样对每一个失效模式下的极限状态方程进行计算, 而只针对最可能引发系统失效的失效模式所对应的极限状态方程进行更新迭代, 从而有效减少了计算量, 是非常高效的系统可靠性分析方法. 但是, 针对系统可靠性问题, 需要注意的是多个失效模式之间往往具有一定的相关性, 而Kriging模型在构建代理模型时, 只能处理单输出变量的情形, 对多失效模式间的相关性问题无法在构建模型时体现. 因此, Arendt等人^[29]提出了多维响应高斯过程模型(Multiple Response Gaussian Process, MRGP)来直接构建含有多输出变量情形的代理模型, 与Kriging方法相比, MRGP模型的优势在于其不仅可以直接构建多输出变量下的代理模型, 而且在建模过程中可以通过一个相关矩阵来充分体现输出变量间的相关性. 在此基础上, Wei等人^[30]将MRGP模型引入可靠性及重要度分析中, 并结合AK-MCS方法的策略进行系统可靠性分析, 且通过测试算例说明了该方法具有更高的计算效率.

综上所述, 本文结合主动学习策略, 针对结构极限状态方程未知的情形, 联合MRGP模型和SS技术, 提出一种处理小失效概率和多失效模式相关的结构可靠性

分析新方法, 其主要贡献在于: (1) MRGP代理模型可以通过一个相关矩阵有效描述多输出变量间的相关性; (2) 提出的MRGP-SS方法不仅能处理多失效模式间的相关性问题, 还能处理小失效概率问题; (3) MRGP-SS方法针对极限状态方程为隐函数的情形同样适用且计算效率高, 并采用MCS方法对提出的MRGP-SS方法进行验证, 以说明该方法的有效性.

本文结构安排如下: 首先, 对MRGP模型和SS技术的基本理论进行简介; 其次, 提出用于结构可靠性分析的联合MRGP模型和SS技术的MRGP-SS方法; 然后, 将提出的MRGP-SS方法应用到案例分析中, 说明本文提出方法的有效性; 最后, 给出全文总结与结论.

2 MRGP和SS的基本理论

2.1 MRGP的基本理论

类似于Kriging模型将单一输出变量看作高斯随机过程, MRGP模型假定多维输出响应变量 $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ 是一个 m 维的高斯过程, 并且假定其协方差函数可分离. 从而, MRGP模型在数学形式上可以描述为

$$\mathbf{y}(\cdot) \sim GP(\mathbf{H}(\cdot)\mathbf{W}, \Sigma R(\cdot, \cdot)), \quad (1)$$

其中, $GP(\cdot)$ 表示高斯过程; $\mathbf{H}(\cdot)$ 表示回归函数; $\mathbf{W}$ 表示回归系数; $R(\cdot, \cdot)$ 表示空间位置的相关性; Σ 为未知协方差矩阵, 表示多维输出响应变量的非空间位置相关性, 它是MRGP模型能处理多种失效模式间相关性问题的关键, 也是MRGP模型与Kriging模型的区别所在.

MRGP模型描述多维输出响应变量的相关性问题的原理图如图1所示, 本文采用各向同性的高斯模型

$$R(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j) = \prod_{mk=1}^n \exp\left[-\theta_{mk} (x_{mk}^i - x_{mk}^j)^2\right]$$

来描述空间位置相关性问题, 而多维输出响应变量的非空间位置相关性是MRGP模型的核心, 因此下面对如何获取非空间位置相关性矩阵 Σ 进行介绍.

未知参数 $\mathbf{W}$ 和 Σ 是与空间位置相关模型 $R(\cdot, \cdot)$ 中的超参数 θ 有关的, 其表达式为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{W}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y}, \\ \hat{\Sigma} = \frac{1}{p} (\mathbf{Y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{W}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{W}}), \end{cases} \quad (2)$$

图1 MRGP模型处理相关性问题的原理图

Figure 1 Schematic diagram of MRGP model for correlation problem.

其中, $\mathbf{R}$ 表示元素为 $R(x^i, x^j)$ 的相关矩阵; p 表示用于构建MRGP模型的输入样本点个数.

构建MRGP模型的关键是求解超参数 θ . 这里 θ 通过最大化似然函数 $p(\text{vec}(\mathbf{Y}) | \mathbf{W}, \Sigma, \theta)$ 的对数函数来反向求解得到, 并且其似然函数的对数函数为

$$\begin{aligned} \ln[p(\text{vec}(\mathbf{Y}) | \mathbf{W}, \Sigma, \theta)] \\ = -\frac{mp}{2} \ln(2\pi) - \frac{p}{2} \ln(|\Sigma|) - \frac{m}{2} \ln(|\mathbf{R}|) \\ - \frac{1}{2} \text{vec}(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{W})^T \times (\Sigma \otimes \mathbf{R})^{-1} \text{vec}(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{W}), \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\text{vec}(\cdot)$ 表示将一个矩阵按列向量排序; $\otimes$ 表示克罗内克积.

在得到 $\mathbf{W}$, Σ 和 θ 值后, MRGP模型便构建起来, 并能对任何一个未知点 $\mathbf{x}^*$ 处的多维响应值 $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*)$ 进行预测, 其预测值的均值 $\mu_{\hat{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}^*)$ 和方差 $\Sigma_{\hat{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}^*)$ 分别为

$$\begin{cases} \mu_{\hat{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)\mathbf{W} + \mathbf{r}(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{W}), \\ \Sigma_{\hat{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}^*) = \text{diag} \left\{ \Sigma \times \begin{pmatrix} 1 - \mathbf{r}(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}^*) + \\ (\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^T - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}^*))^T \times \\ (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^T - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}^*)) \end{pmatrix} \right\}, \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)$ 表示未知点 $\mathbf{x}^*$ 处的回归模型向量; $\mathbf{r}(\mathbf{x}^*)$ 表示未知点 $\mathbf{x}^*$ 与输入样本点之间的空间相关向量; $\text{diag}(\cdot)$ 表示对一个矩阵取对角元素.

这里需要特别指出的是, MRGP模型本质上是对Kriging模型的扩展, 因此在构建多输出响应变量下的代理模型时它们的思路基本一致, 而其不同之处主要体现在两个方面: 其一是MRGP模型采用相关矩阵 Σ 来刻画多输出响应变量间的相关性问题, 其二是针对超

参数 θ 的求解采用了不同的似然函数.

2.2 SS方法介绍

SS技术最早由美国学者Au和Beck^[31]提出, 是求解小失效概率问题的经典方法. 相比于MCS方法和IS方法, SS技术既能解决MCS方法的高昂计算成本问题, 又能有效解决实际工程中涉及的高维问题. 同时, 为了方便初学者对SS方法的理解与运用, Li和Cao^[32]给出了SS方法应用于可靠性分析及优化的MATLAB标准程序.

SS技术的核心思想是将小失效概率问题转化为一系列较大条件概率问题的连乘积. 给定性能函数 $g(x)$, 在阈值为 b 下的失效域为 $F = \{x : g(x) < b\}$, 较大的失效域 $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ 通过一系列递减的阈值 $\{b_1 > b_2 > \dots > b_m = b\}$ 确定. 并且, 失效域满足 $\{F_i = \{x : g(x) < b_i\}, i = 1, 2, \dots, m\}$, 显然这里可以得到 $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m = F$ 和 $F_k = \bigcap_{i=1}^k F_i$. 因此小失效域 F 下的概率可以表述为

$$\begin{aligned} \Pr(F) &= \Pr(F_m) = \Pr\left(\bigcap_{i=1}^m F_i\right) = \Pr(F_1) \times \Pr\left(\bigcap_{i=2}^m F_i | F_1\right) \\ &= \Pr(F_1) \times \Pr(F_2 | F_1) \times \Pr\left(\bigcap_{i=3}^m F_i \middle| \bigcap_{i=1}^2 F_i\right) \\ &\vdots \\ &= \Pr(F_1) \times \prod_{i=2}^m \Pr(F_i | F_{i-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

使用SS技术评估二维小失效概率问题的原理图如图2所示.

第一个较大失效概率 $\Pr(F_1)$ 可以通过下式计算:

$$\Pr(F_1) = \frac{1}{N_1} \sum_{F_1=1}^{N_1} I_{F_1}[g(x_{F_1}^1)], \quad (6)$$

其中, $\{x_1^1, x_2^1, \dots, x_{N_1}^1\}$ 表示由 $\mathbf{X}$ 的概率密度函数 $f_{\mathbf{X}}(x)$ 生成的 N_1 个样本. 中间事件的较大条件失效概率为

$$\Pr(F_i | F_{i-1}) = \frac{1}{N_i} \sum_{F_k=1}^{N_i} I_{F_i}[g(x_{F_k}^i)], \quad (7)$$

其中, $\{x_1^i, x_2^i, \dots, x_{N_i}^i\}$ 表示由条件概率密度函数 $q_{\mathbf{X}}(x | F_{i-1})$ 生成的 N_i 个样本. 并且, $q_{\mathbf{X}}(x | F_{i-1})$ 可以通过式

图2 SS技术评估小失效概率问题的原理图

Figure 2 Schematic diagram of subset simulation for a small failure probability problem.

(8)计算:

$$q_{\mathbf{X}}(x | F_{i-1}) = \frac{I_{F_{i-1}}[g(x)]f_{\mathbf{X}}(x)}{\Pr(F_{i-1})}, \quad (i = 2, 3, \dots, m), \quad (8)$$

其中, $\Pr(F_{i-1})$ 可以通过式(5)计算; $I_{F_i}(\cdot)$ 表示指示函数, 可以通过下式计算:

$$I_{F_i}[g(x)] = \begin{cases} 1, & g(x) \leq b_i, \\ 0, & g(x) > b_i, \end{cases} \quad (9)$$

($i = 1, 2, \dots, m$).

3 基于MRGP-SS的结构可靠性分析方法

本文所述的多失效模式下的可靠性问题主要针对结构中的串联系统、并联系统及串-并联系统, 其系统可靠度 R 数学表达式为

$$\begin{aligned} R &= \Pr(G_j(\mathbf{X}) > 0, j = 1, \dots, m) \\ &= \begin{cases} \Pr\left(\min_{j=1, \dots, m} G_j(\mathbf{X}) > 0\right), & \text{串联系统,} \\ \Pr\left(\max_{j=1, \dots, m} G_j(\mathbf{X}) > 0\right), & \text{并联系统,} \\ \Pr\left(\min_{j=1, \dots, m} \max_{k=1, \dots, m} G_k(\mathbf{X}) > 0\right), & \text{串-并联系统,} \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $G_j(\cdot)$ 表示系统第 j 个极限状态方程; m 表示极限状态方程个数.

如前所述, 在结构可靠性问题中, 往往难以获得极限状态方程的显式表达式, 此时采用代理模型技术来构建极限状态方程的近似函数对提高结构可靠性分析

的计算效率非常重要. 假定极限状态方程中的输入随机变量的初始样本点 $\mathbf{x}_{k \times n}^{\text{initial}}$ 为

$$\mathbf{x}_{k \times n}^{\text{initial}} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix},$$

其中, k 表示初始样本点的数量; n 表示输入随机变量的维数, 其对应的极限状态方程的输出响应值 $\mathbf{y}_{k \times m}^{\text{initial}}$ 为

$$\mathbf{y}_{k \times m}^{\text{initial}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{km} \end{pmatrix}.$$

基于初始输入输出样本点 $(\mathbf{x}_{k \times n}^{\text{initial}}, \mathbf{y}_{k \times m}^{\text{initial}})$, 采用 MRGP 模型便可以构建多失效模式下的极限状态方程的代理模型. 然而, 由于初始样本点的数量有限, 所构建的 MRGP 模型的精度往往比较低, 需要更新. 本文结合主动学习 Kriging 的策略, 采用 U-函数、EFF-函数和 H-函数三个学习函数^[30]从 MCS 候选样本点 $\mathbf{x}_{\text{MCS}}$ 中寻找最佳的更新迭代样本点, 更新初始的 MRGP 模型, 直至其满足一定的精度条件. 这里, U-函数所对应的是 Kriging 模型预测出的响应值均值的符号与实际情况的不同而产生的预测错误概率; EFF-函数所对应的是 Kriging 模型预测出的响应值均值落在极限状态面极小邻域内的程度; H-函数所对应的是 Kriging 模型预测出的响应值均值的熵值大小. 这三个学习函数尽管是从不同的角度选择新的迭代样本点, 但其对不同的工程问题普遍都是适用的, 只是迭代次数会有所不同, 它们的具体表达形式如下:

U-函数:

$$U(x) = \left| \frac{u_y^*}{\sigma_y^*} \right|, \quad (11)$$

EFF-函数:

$$\begin{aligned} \text{EFF}(x) = u_y^* & \left[2\Phi\left(-\frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) - \Phi\left(-2 - \frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) - \Phi\left(2 - \frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) \right] \\ & - \sigma_y^* \left[2\phi\left(-\frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) - \phi\left(-2 - \frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) - \phi\left(2 - \frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) \right] \\ & + 2\sigma_y^* \left[\Phi\left(2 - \frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) - \Phi\left(-2 - \frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

H-函数:

$$H(x) = \left| \ln \left(\sqrt{2\pi} \sigma_y^* + \frac{1}{2} \right) \left[\Phi\left(2 - \frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) - \Phi\left(-2 - \frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) \right] - \left[\frac{2\sigma_y^* - u_y^*}{2} \phi\left(2 - \frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) + \frac{2\sigma_y^* + u_y^*}{2} \phi\left(-2 - \frac{u_y^*}{\sigma_y^*}\right) \right] \right|, \quad (13)$$

其中, u_y^* 由 MRGP 模型预测值 $\mu_{\hat{y}}(\mathbf{x}_{\text{MCS}})$ 决定. 对于串联系统, $u_y^* = \min_{j=1 \dots m} u_{yj}$; 对于并联系统, $u_y^* = \max_{j=1 \dots m} u_{yj}$; 对于串-并联系统, $u_y^* = \min_{j=1 \dots m} \max u_{yj}$. 其中, $u_{yj}, j=1, 2, \dots, m$ 表示 $\mu_{\hat{y}}(\mathbf{x}_{\text{MCS}})$ 中第 j 个极限状态方程的预测均值, σ_y^* 表示对应于 u_y^* 的预测均方差.

从而, 根据上述学习函数, 最佳的输入迭代样本点可以选择为

$$\begin{aligned} x_{\text{new}} &= \underset{x \in \mathbf{x}_{\text{MCS}}}{\operatorname{argmin}} U(x), \\ \text{或 } x_{\text{new}} &= \underset{x \in \mathbf{x}_{\text{MCS}}}{\operatorname{argmax}} \text{EFF}(x), \\ \text{或 } x_{\text{new}} &= \underset{x \in \mathbf{x}_{\text{MCS}}}{\operatorname{argmax}} H(x). \end{aligned} \quad (14)$$

根据寻找的新输入样本点 x_{new} , 计算对应的输出响应值 y_{new} , 从而基于新的迭代样本点 $(x_{\text{new}}, y_{\text{new}})$ 更新 MRGP 模型, 直至满足收敛条件:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbf{x}_{\text{MCS}}} U(x) &> \varepsilon_U, \\ \text{或 } \max_{x \in \mathbf{x}_{\text{MCS}}} \text{EFF}(x) &< \varepsilon_{\text{EFF}}, \\ \text{或 } \max_{x \in \mathbf{x}_{\text{MCS}}} H(x) &< \varepsilon_H, \end{aligned} \quad (15)$$

其中, ε_U 和 ε_H 通常分别取值为 2 和 0.5; ε_{EFF} 是给定的极小正数.

当完成上述 MRGP 模型的更新流程后, 多失效模式下的系统失效概率便可以基于更新好的 MRGP 模型 $\hat{y}$ 来预测:

$$P_f = \Pr(\hat{y}(\mathbf{x}_{\text{MCS}}) < 0), \quad (16)$$

其中, $\Pr(\cdot)$ 表示事件的概率.

同时, 预测失效概率 P_f 的变异系数 COV_{MCS} 为:

$$\text{COV}_{\text{MCS}} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{P_f \times N_{\text{MCS}}}}, \quad (17)$$

其中, N_{MCS} 表示候选样本 $\mathbf{x}_{\text{MCS}}$ 的个数.

在实际工程的结构可靠性分析中, 通常要求评估

的失效概率变异系数 COV_{MCS} 在0.05以内, 这对候选样本点 $\mathbf{x}_{MCS}$ 的数量 N_{MCS} 便提出了一定的要求. 尽管上述流程已经通过MRGP模型来表征多失效模式间的相关性问题, 然而在实际工程中结构通常还存在着小失效概率问题, 此时采用上述MCS方法来评估失效概率, 需要非常多的候选样本数量 N_{MCS} , 这显然增加了更新MRGP模型的计算量, 因此该方法并不适用于小失效概率问题. 基于此, 本文在更新好的MRGP模型的基础上, 采用SS技术代替MCS方法来评估失效概率, 形成处理小失效概率及多失效模式相关下结构可靠性问题的MRGP-SS方法. 其中, 采用SS技术获得的失效概率的变异系数 COV_{SS} 为

$$COV_{SS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \delta_i^2}{m}}, \quad (18)$$

其中, m 对应于SS中所有事件的个数; δ_i 表示评估对应中间事件失效概率的变异系数, 可通过下式计算:

$$\delta_i = \sqrt{\frac{1 - Pr_i}{Pr_i N_i} (1 + \gamma_i)}, \quad i = 2, 3, \dots, m, \quad (19)$$

其中, Pr_i 表示SS中评估中间事件的失效概率; γ_i 反映了输入设计变量间的相关性. 这里需要特别指出的是, $\delta_1 = \sqrt{(1 - P_1) P N_1}$, 相互独立的设计变量 $\gamma_i = 0$.

由于采用SS技术评估得到的失效概率的变异系数比MCS方法获得的失效概率的变异系数要小, 即 $COV_{SS} < COV_{MCS}$, 因而在少量候选样本点数量的情形下, 采用MRGP-SS方法就能达到评估的失效概率变异系数在0.05以内的要求, 这也是其能处理小失效概率问题的根本原因.

本文提出的基于MRGP-SS方法的结构可靠性分析流程如图3所示.

这里需要说明的是, 与高效的系统可靠性分析方法AK-SYS相比, 本文提出的MRGP-SS方法着重处理多失效模式和小失效概率共存下的可靠性问题. 由于AK-SYS方法是逐一构建Kriging模型, 并且每次只对系统失效影响最大的失效模式对应的极限状态方程进行更新, 因而在系统涉及小失效概率时, AK-SYS方法与IS, SS等方差缩减技术结合有些困难. 而且, 在建模过程中, AK-SYS方法也没有考虑多失效模式间存在的相关性问题. 因此, 相比于AK-SYS方法, 本文提出的MRGP-SS方法在处理多失效模式相关及小失效概

图3 基于MRGP-SS方法的结构可靠性分析流程
Figure 3 Reliability analysis procedure of MRGP-SS.

率下的可靠性问题时更有效.

4 案例分析

为了说明本文提出的MRGP-SS方法对结构可靠性问题的有效性, 首先采用一个并联系统的数值算例进行验证, 然后再将其应用到某四杆桁架结构和蠕动泵软管的可靠性分析. 为了验证MRGP-SS方法所得结果的准确性, 采用MCS方法对结果进行对比分析. 为了说明MRGP-SS方法具有较高的计算效率, 将其与经典的AK-MCS算法进行对比分析.

4.1 数值算例

设一个含有4个极限状态方程的串联系统, 其极限状态方程的输入变量 x_1 和 x_2 为相互独立的标准正态随机变量, 并且其输出响应值的具体表达形式为

$$y(\mathbf{x}) = \begin{cases} G_1 = 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 - \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \\ G_2 = 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 + \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \\ G_3 = x_1 - x_2 + \frac{6}{\sqrt{2}}, \\ G_4 = x_2 - x_1 + \frac{6}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad (20)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$.

采用MRGP-SS方法和AK-MCS算法对其进行对比分析, 该算例中MCS方法的候选样本点取为 10^6 , MRGP-SS方法的候选样本点取为 5×10^4 . AK-MCS算法的候选样本点选为 2×10^5 . 在初始样本点选为12组的情形下, 两种算法迭代加点结果如图4所示.

由图4可知, 在U学习函数下, 针对该数值算例MRGP-SS方法的迭代次数比AK-MCS算例的迭代次数明显要少, 说明MRGP-SS方法具有较高的计算效率. 同时, 为了说明提出的MRGP代理模型考虑了多输出响应变量间相关性的准确性, 这里基于MRGP-SS方法中的学习策略, 将MRGP代理模型替换为Kriging代理模型进行分析, 具体结果如表1所示, 其中 N_{call} 表示迭代次数.

由表1可得, 针对该数值算例4个输出响应变量间存在的相关性问题, 采用MRGP构建的代理模型比Kriging构建的代理模型更加精确, 由MRGP代理模型预测出来的失效概率与MCS结果更加接近, 说明本文提出的考虑多输出变量间相关性的MRGP模型的有效性.

图 4 (网络版彩图)不同算法下数值算例迭代加点结果
Figure 4 (Color online) Iterated results of numerical example for different algorithms.

表 1 考虑相关性的MRGP模型验证分析结果
Table 1 Results of MRGP model considering correlation

方法	N_{call}	失效概率 P_f	误差 (%)
MCS	—	0.004466	—
MRGP-SS+U	20	0.004427	0.873265
Kriging-SS+U	12	0.004273	4.321541

下面采用本文提出的多失效模式相关及小失效概率下的MRGP-SS方法对该数值算例展开分析, 具体结果如表2所示.

从表2可知, 提出的MRGP-SS方法的精度普遍比AK-MCS算法的计算精度高, 说明了本文提出的考虑相关性的MRGP代理模型的有效性, 而且提出的MRGP-SS方法的计算结果与MCS方法的结果基本一致, 满足一定精度条件, 说明本文方法计算结果的准确性. 同时, 三个不同的学习函数都能与提出的MRGP-SS方法相结合, 说明了提出方法的普适性.

4.2 四杆桁架结构有限元仿真实例

为了充分说明MRGP-SS方法的有效性, 即适用于结构极限状态方程为隐函数的情形, 这里将MRGP-SS方法应用到四杆桁架结构中. 该桁架结构如图5所示, 其横截面积和单元杨氏模量分别取为 $A=100 \text{ mm}^2$ 和 $E=29.5 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$. 同时, 该桁架为刚性结构, 受到外部载荷 P 和 F 作用, 桁架内节点用 $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4\}$ 表示, 桁架涉及的变量信息如表3所示.

表 2 串联系统数值算例的计算结果
Table 2 Results of series system numerical example

方法	N_{call}	失效概率 P_f	误差 (%)
MCS	—	0.004466	—
MRGP-SS+U	20	0.004427	0.873265
AK-MCS+U	71	0.004382	1.880878
MRGP-SS+EFF	23	0.004645	4.008061
AK-MCS+EFF	79	0.004156	6.941335
MRGP-SS+H	25	0.004420	1.030004
AK-MCS+H	83	0.004232	5.239588

图 5 (网络版彩图)四杆平面桁架结构
Figure 5 (Color online) A four-bar plane truss structure.

表 3 四杆平面桁架结构的随机变量信息

Table 3 Random variables of the four-bar plane truss

参数 (单位)	分布类型	均值	均方差
F (N)	正态分布	20000	200
P (N)	正态分布	25000	250
x_2 (m)	正态分布	0.4	0.04
x_3 (m)	正态分布	0.4	0.04
y_3 (m)	正态分布	0.3	0.03

在本算例中, 桁架内最大节点位移和最大应力通过有限元分析得到, 由于该桁架的结构简单, 这里直接采用MATLAB软件进行有限元仿真分析. 同时, 当最大节点位移或最大应力中任何一个超过允许的阈值时, 该桁架结构即视为失效, 属于串联系统. 进一步地, 考虑到桁架内不确定性随机变量(F, P, x_2, x_3, y_3)对桁架结构的影响, 工程实际中桁架的最大节点位移和最大应力表现出一定的随机性, 并不是确定值, 从而引发桁架结构的可靠性问题, 即在不确定性因素影响下, 该桁架结构可能失效也可能不失效, 其是否失效属于一个概率测度. 基于此, 本文通过广义应力-强度干涉模型来构建该桁架结构的极限状态方程, 从而将桁架结构是否失效这一工程问题转化为概率测度下的可靠性问题. 具体地, 该桁架结构的极限状态方程为

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \begin{cases} G_1 = 3.8 \times 10^{-4} - d_{\max}(F, P, x_2, x_3, y_3), \\ G_2 = 4.5 \times 10^{12} - s_{\max}(F, P, x_2, x_3, y_3), \end{cases} \quad (21)$$

其中, $\mathbf{x} = [F, P, x_2, x_3, y_3]$; $d_{\max}(\cdot)$ 和 $s_{\max}(\cdot)$ 分别表示由有限元分析得到的桁架内最大节点位移和最大应力.

下面采用MRGP-SS方法对该桁架结构进行分析, 计算结果如表4所示. 该算例中MCS方法的候选样本点取为 2×10^7 , MRGP-SS方法的候选样本点取为 5×10^4 . 这里需要特别指出的是, 该算例涉及有限元分析, 因而给出运行时间来验证提出方法的效率十分必要. 同时, 该桁架结构的失效概率达到了 10^{-5} 量级, 属于小失效概率问题, MCS方法对该算例的计算效率非常低, 从表4可以看出, MCS方法的运行时间在18 min以上. 并且, AK-MCS算法并不适用于该算例, 因为在失效概率变异系数要求0.05以内, 该算例候选样本点的数量级在 10^7 以上, 此时一次迭代计算就需要10多分钟, 加之AK-MCS算法需要多次迭代才能得到稳定的失效概

率, 从而造成AK-MCS算法对该算例计算量非常大, 不能被工程实际所接受. 因此, 这里仅采用MCS方法对MRGP-SS方法进行验证.

从表4可以看出, 针对该四杆桁架结构的有限元分析实例, MRGP-SS方法的运行时间明显比MCS方法的运行时间少, 且计算结果满足一定的精度要求, 充分验证了MRGP-SS方法适用于结构极限状态方程为隐函数的情形.

4.3 蠕动泵软管的可靠性分析

为了进一步说明MRGP-SS方法在实际工程应用中的有效性, 将MRGP-SS方法应用到磁流变抛光设备的蠕动泵软管可靠性分析中. 该蠕动泵实物及其简化的三维模型如图6所示, 对蠕动泵软管及其内部抛光液开展流固耦合仿真分析, 得到蠕动泵软管上的最大应力和应变如图7所示.

在蠕动泵软管的实际工程应用中, 由于各种不确定性因素存在, 如蠕动泵转速对应的滚轮中心线速度 v 、软管内外径 r_1 和 r_2 、滚轮与软管接触的高斯力宽度 b 及抛光液密度 ρ 等都不存在不确定性, 从而导致实际工作中蠕动泵软管的应力应变具有一定的波动性, 进而引发蠕动泵的可靠性问题. 基于此, 本文从广义应

表 4 四杆平面桁架结构的计算结果

Table 4 Computational results of the four-bar plane truss

方法	N_{call}	$P_f (\times 10^{-5})$	误差 (%)	运行时间 (s)
MCS	—	3.635	—	1127.623
MRGP-SS+U	36	3.4306	5.623	48.797
MRGP-SS+EFF	35	3.9028	7.367	48.235
MRGP-SS+H	47	3.8198	5.084	57.280

图 6 (网络版彩图)蠕动泵三维模型简图

Figure 6 (Color online) Three-dimensional model of peristaltic pump.

图 7 (网络版彩图)软管应力应变仿真结果

Figure 7 (Color online) Stress and strain simulation results of hose.

力-强度干涉模型的角度出发构建蠕动泵软管的极限状态方程, 从而对其展开可靠性分析, 其极限状态方程为

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \begin{cases} G_1 = [\sigma] - \sigma_{\max}(v, r_1, r_2, b, \rho), \\ G_2 = [\varepsilon] - \varepsilon_{\max}(v, r_1, r_2, b, \rho), \end{cases} \quad (22)$$

其中, $[\sigma]$ 和 $[\varepsilon]$ 分别表示蠕动泵软管允许的最大应力和应变阈值, 取值分别为5 MPa和0.8; $\sigma_{\max}$ 和 $\varepsilon_{\max}$ 分别表示流固耦合仿真分析得到的最大应力和应变值; $\mathbf{x} = [v, r_1, r_2, b, \rho]$ 表示不确定性变量, 相关信息如表5所示。

由于蠕动泵软管的应力应变任何一个超过允许的阈值都会引发失效, 故其属于串联系统. 采用MRGP-SS方法对蠕动泵软管展开可靠性分析, 计算结果如表6所示, 其中MRGP-SS方法的候选样本点数量设为 10^4 . 这里需要特别说明的是, 虽然该算例的失效概率较大且达到了 10^{-2} 量级, 但该算例的流固耦合仿真分析计算量过大, 一次仿真大约需要15 min, 因此MCS方法和AK-MCS算法并不适用于该算例。

由表6可知, 该蠕动泵软管的失效概率在0.016–0.018, 说明该软管的失效概率较大, 极易产生故障, 这与工程中蠕动泵软管的实际情况是吻合的. 实际工程中, 该蠕动泵软管极易失效, 通常封闭式蠕动泵软管在使用30天后采取强制更换策略, 而开放式蠕动泵软

表 5 蠕动泵软管的随机变量信息

Table 5 Random variables of peristaltic pump hose

变量 (单位)	分布类型	均值	均方差
v (m/s)	正态分布	1	0.25
r_1 (m)	正态分布	0.00475	0.000475
r_1 (m)	正态分布	0.00325	0.000325
b (m)	正态分布	0.03124	0.003124
ρ (kg/m ³)	正态分布	3500	350

表 6 蠕动泵软管的计算结果

Table 6 Computational results of peristaltic pump hose

方法	N_{call}	失效概率 P_f	运行时间 (s)
MRGP-SS+U	73	0.0165	65721.642876
MRGP-SS+EFF	76	0.0176	68422.523309
MRGP-SS+H	87	0.0169	78325.794564

管仅用7天后就会更换, 以避免造成进一步的损失。

5 结论

本文针对结构极限状态方程为隐函数的情形, 提出了一种处理小失效概率及多失效模式相关下的结构可靠性分析新方法, 即MRGP-SS方法. 该方法通过MRGP模型来处理多失效模式间的相关性问题, 由SS技术来处理小失效概率问题, 并结合AK-MCS算法中的主动学习策略, 形成了一种主动学习的联合MRGP模型和SS技术的结构可靠性分析新方法. 同时, 通过一个数值案例和四杆桁架结构的有限元仿真实例, 说明了MRGP-SS方法的有效性及对极限状态方程为隐函数情形的适用性. 最后, 通过蠕动泵软管的实际工程应用案例分析, 得到了蠕动泵软管的失效概率在0.016–0.018, 该计算结果可为实际工程决策者提供参考。

致谢 向电子科技大学的肖宁聪副教授、中国工程物理研究院六所张云飞副研究员表示谢意。

参考文献

- 1 Zhao G F. Reliability Theory and its Applications for Engineering Structures (in Chinese). Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996 [赵国藩. 工程结构可靠性理论与应用. 大连: 大连理工大学出版社, 1996]

- 2 Freudenthal A M. Safety and the probability of structural failure. *T Am Soc Civ Eng*, 1956, 121: 1337–1375
- 3 Rackwitz R, Flessler B. Structural reliability under combined random load sequences. *Comput Struct*, 1978, 9: 489–494
- 4 Yang M, Zhang D, Cheng C, et al. Reliability-based design optimization for RV reducer with experimental constraint. *Struct Multidisc Optim*, 2021, 63: 2047–2064
- 5 Hohenbichler M, Gollwitzer S, Kruse W, et al. New light on first- and second-order reliability methods. *Struct Saf*, 1987, 4: 267–284
- 6 Huang X, Li Y, Zhang Y, et al. A new direct second-order reliability analysis method. *Appl Math Model*, 2018, 55: 68–80
- 7 Du X, Sudjianto A. First order saddlepoint approximation for reliability analysis. *AIAA J*, 2004, 42: 1199–1207
- 8 Huang B, Du X. Probabilistic uncertainty analysis by mean-value first order saddlepoint approximation. *Reliab Eng Syst Saf*, 2008, 93: 325–336
- 9 Zhao Y G, Ono T. Moment methods for structural reliability. *Struct Saf*, 2001, 23: 47–75
- 10 Wang C, Zhang H, Li Q. Moment-based evaluation of structural reliability. *Reliab Eng Syst Saf*, 2019, 181: 38–45
- 11 Huang H Z, Liu Z, Mi J H, et al. Reliability modeling and analysis of heavy-duty CNC machine tool spindle under hybrid uncertainty (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2018, 48: 014603 [黄洪钟, 刘征, 米金华, 等. 混合不确定性下机床主轴可靠性建模与分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 014603]
- 12 Roussouly N, Petitjean F, Salaun M. A new adaptive response surface method for reliability analysis. *Probab Eng Mech*, 2013, 32: 103–115
- 13 Mi J H, Li Y F, Peng W W, et al. Reliability modeling and analysis of complex multi-state system based on interval fuzzy Bayesian network (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2018, 48: 014604 [米金华, 李彦锋, 彭卫文, 等. 复杂多态系统的区间值模糊贝叶斯网络建模与分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 014604]
- 14 Chojaczyk A A, Teixeira A P, Neves L C, et al. Review and application of artificial neural networks models in reliability analysis of steel structures. *Struct Saf*, 2015, 52: 78–89
- 15 Yamamoto J K. An alternative measure of the reliability of ordinary Kriging estimates. *Math Geol*, 2000, 32: 489–509
- 16 Xie Y M. Research on Robust Optimization of Sheet Metal Forming Based on Kriging and Grey Relational Analysis (in Chinese). Dissertation for Master's Degree. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2007 [谢延敏. 基于Kriging模型和灰色关联分析的板料成形工艺稳健优化设计研究. 硕士学位论文. 上海: 上海交通大学, 2007]
- 17 Rocco C M, Moreno J A. Fast Monte Carlo reliability evaluation using support vector machine. *Reliab Eng Syst Saf*, 2002, 76: 237–243
- 18 Li H S, Lü Z Z, Yue Z F. Support vector machine for structural reliability analysis (in Chinese). *Appl Math Mech*, 2006, 27: 1135–1143 [李洪双, 吕震宙, 岳珠峰. 结构可靠性分析的支持向量机方法. 应用数学和力学, 2006, 27: 1135–1143]
- 19 Krige D G. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. *J South African Instit Mining Metall*, 1951, 52: 119–139
- 20 Matheron G. Principles of geostatistics. *Econom Geol*, 1963, 58: 1246–1266
- 21 Nielsen H B, Lophaven S N, Søndergaard J. DACE—a matlab Kriging toolbox. Technical Report, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark. 2002
- 22 Kaymaz I. Application of Kriging method to structural reliability problems. *Struct Saf*, 2005, 27: 133–151
- 23 Zhang Q. Structural Reliability Analysis and Optimization Based on Kriging Technique (in Chinese). Dissertation for Master's Degree. Dalian: Dalian University of Technology, 2005 [张崎. 基于Kriging方法的结构可靠性分析及优化设计. 硕士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2005]
- 24 Bichon B J, Eldred M S, Swiler L P, et al. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions. *AIAA J*, 2008, 46: 2459–2468
- 25 Echard B, Gayton N, Lemaire M. AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation. *Struct Saf*, 2011, 33: 145–154
- 26 Echard B, Gayton N, Lemaire M, et al. A combined importance sampling and Kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models. *Reliab Eng Syst Saf*, 2013, 111: 232–240
- 27 Huang X, Chen J, Zhu H. Assessing small failure probabilities by AK-SS: An active learning method combining Kriging and subset simulation. *Struct Saf*, 2016, 59: 86–95
- 28 Fauriat W, Gayton N. AK-SYS: An adaptation of the AK-MCS method for system reliability. *Reliab Eng Syst Saf*, 2014, 123: 137–144
- 29 Arendt P D, Apley D W, Chen W, et al. Improving identifiability in model calibration using multiple responses. *J Mech Des*, 2012, 134: 100909
- 30 Wei P, Liu F, Tang C. Reliability and reliability-based importance analysis of structural systems using multiple response Gaussian process model. *Reliab Eng Syst Saf*, 2018, 175: 183–195

- 31 Au S K, Beck J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probab Eng Mech*, 2001, 16: 263–277
- 32 Li H S, Cao Z J. Matlab codes of subset simulation for reliability analysis and structural optimization. *Struct Multidisc Optim*, 2016, 54: 391–410

Structural reliability analysis for a small failure probability problem under multiple failure modes

QIAN HuaMing^{1,2}, HUANG TuDi^{1,2*}, HUANG HongZhong^{1,2*},
LIU Yu^{1,2} & HUANG Peng^{1,2}

¹ School of Mechanical and Electrical Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China;

² Center for System Reliability and Safety, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China

This paper proposes a new structural reliability analysis method for a small failure probability problem under multiple failure modes by combining the multiple response Gaussian process (MRGP) and subset simulation (SS). First, as the structural performance function cannot be analytically formulated and the correlation may exist between multiple failure modes, the MRGP model is adopted to construct the surrogate model of the performance function. Simultaneously, the MRGP model is updated by the active learning strategy until the predicted accuracy is satisfied. Then, due to the small failure probability problem brings a huge computational cost and even causes the infeasibility of constructing the surrogate model of performance function, the SS method is used to assess the structural failure probability and thus a smaller coefficient of variation (COV) can be obtained with a significant improvement of the computational efficiency. Finally, the proposed MRGP-SS method is applied into several examples and the Monte Carlo simulation (MCS) is also performed to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

multiple response Gaussian process, subset simulation, active learning strategy, multiple failure modes, small failure probability, reliability analysis

PACS: 02.50.Ng, 02.60.Gf, 05.10.Ln, 47.11.Fg

doi: [10.1360/SSPMA-2021-0031](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0031)