中国科学 : 数学 2022 年 第 52 卷 第 1 期 : 1～22
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

具 De Giorgi 型非线性分数阶方程解的单调性

武乐云[1,2], 陈文雄[2*]

1. 上海交通大学数学科学学院, 上海 200240;
2. Department of Mathematical Sciences, Yeshiva University, New York 10033, USA
E-mail: leyunwu@sjtu.edu.cn, wchen@yu.edu

收稿日期: 2019-10-28; 接受日期: 2020-06-15; 网络出版日期: 2020-09-16; * 通信作者
中国博士后科学基金 (批准号: 2019M661472) 资助项目

摘要 本文发展了一套适用于分数阶 Laplace 算子的滑动 (sliding) 方法. 首先建立滑动方法中用到的两个重要定理: 狭窄区域原理和无界区域极值原理. 基于这两个定理, 本文说明了如何利用滑动方法得到半线性分数阶方程解在有界区域和全空间的单调性, 其中采用了一些新的想法. 第一点是利用 s- 下调和函数的 Poisson 积分表示来建立极大值原理, 第二点是沿着一列极大值点列利用平均值不等式来估计与分数阶 Laplace 算子相关的奇异积分. 相信这些新的结果可以成为分析分数阶方程的重要工具.

关键词 分数阶 Laplace 算子 无界区域极大值原理 狭窄区域原理 平均值不等式 单调性 滑动方法

MSC (2020) 主题分类 35R11, 35B50

1 引言

分数阶 Laplace 算子近年来受到了广泛的关注. 它经常出现在反常扩散和准地转流、湍流、水波、分子动力学及行星相对论量子力学中 (参见文献 [1–4] 及其相关文献), 并且在随机和金融领域 (参见文献 [5–7]) 也有着广泛的应用. 特别地, 分数阶 Laplace 算子可被当作 Lévy 扩散的无穷维生成元 (参见文献 [6]). 此外, 它与共形几何也有着密切的关系, 如文献 [8].

分数阶 Laplace 算子是 $\mathbb{R}^n$ 中的非局部算子, 形如

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy, \tag{1.1}$$

其中 $s \in (0,1)$, PV 表示 Cauchy 主值:

$$C_{n,s}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy.$$

英文引用格式: Wu L Y, Chen W X. Monotonicity of solutions for fractional equations with De Giorgi type nonlinearities (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 1–22, doi: 10.1360/SCM-2019-0668

为使 (1.1) 右端有意义, 这里要求

$$u \in C_{\mathrm{loc}}^{1,1} \cap \mathcal{L}_{2s},$$

其中

$$\mathcal{L}_{2s} := \left\{ u \in L_{\mathrm{loc}}^1 \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{1+|x|^{n+2s}} dx < \infty \right\}.$$

分数阶 Laplace 算子的非局部性使得对其研究变得困难, 为此, Caffarelli 和 Silvestre [9] 引入了延拓法将非局部问题转化为高一维的局部问题. 另外一种积分方程方法 [10] 是通过建立与分数阶方程等价的积分方程, 并且利用积分形式的移动平面法或者正则性提升来得到解的对称性和正则性. 这些方法已经成功用于解决含有分数阶 Laplace 算子的方程, 并且得到了丰硕的结果 (参见文献 [11–16]). 然而当应用上述两种方法时, 通常需要对解加上一些额外的条件; 当直接考虑拟微分方程时, 这些条件并非必要的. 这两种方法对一些非线性非局部算子却不适用, 如分数阶 p-Laplace 算子. 感兴趣的读者可参见文献 [17, 18]. 因此, 探索其他直接方法是必要的, 从而产生了分数阶 Laplace 算子的直接移动平面法 [19, 20] 和分数阶 p-Laplace 算子的直接移动平面法 [21], 可以用来得到非局部方程解的对称性、单调性和不存在性.

本文引入分数阶 Laplace 算子的滑动方法. 滑动方法最早由 Berestycki 和 Nirenberg [22–24] 引入, 主要用于研究 (含整数阶 Laplace 算子的) 偏微分方程解的定性性质, 如解的对称性、单调性和唯一性等, 其中最重要的工具是极大值原理. 主要思想是比较解在两不同点处值的大小, 其中一点是由另外一点沿一固定方向滑动区域得到的. 然而对于移动平面法, 其中一点是另外一点的反射点.

下面列举一些滑动方法的相关应用. Berestycki 和 Nirenberg [22] 研究了方程

$$\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0$$

在有界柱体区域中解的单调性和唯一性. 对于无界柱体区域, Berestycki 和 Nirenberg [23] 及 Berestycki 等 [25] 得到了方程

$$\Delta u + \beta(x') u_n + f(x', u) = 0$$

解的单调性和唯一性. 对任意的有界区域, Berestycki 和 Nirenberg [24] 及 Berestycki 等 [26] 证明了方程

$$\Delta u + f(u) = 0$$

解的单调性和唯一性, 并将此结果推广至完全非线性方程. 此外, 滑动方法也可以用于解决超定问题, 例如, 文献 [27, 28] 研究了下述超定问题:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u(x) = f(u(x), & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \\ (\partial_\nu)_s u(x) = \mathrm{const}, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $(\partial_\nu)_s u(x) = -\lim_{t\to 0} \frac{u(x-t\nu(x))}{t^s}$; 分别证明了当 Ω 为具有 C^2 边界的有界开集时, Ω 为一个球以及当 Ω 为

$$\Omega := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > \varphi(x')\}, \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

时解的单调性并且证明了 Ω 是半空间, 其中 $\varphi:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$.

本文分别在有界域和全空间考虑如下半线性分数阶方程:

$$(-\Delta)^s u(x)=f(u(x)).$$

在阐述主要结果之前, 我们先引入一些记号. 记 $x=(x',x_n)$, 其中 $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\tau\in\mathbb{R}$, 令 $u^\tau(x)=u(x',x_n+\tau)$, $w^\tau(x)=u^\tau(x)-u(x)$.

与移动平面法类似, 狭窄区域原理为滑动方法滑动区域提供起始位置, 因此, 首先建立如下狭窄区域原理.

定理 1.1 (狭窄区域原理)　令 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界狭窄区域, 假设 $u\in\mathcal{L}_{2s}\cap C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$, w^τ 在 $\overline{D}$ 中下半连续并且满足

$$\begin{cases}(-\Delta)^s w^\tau(x)+c(x)w^\tau(x)\geqslant 0, & x\in D,\\ w^\tau(x)\geqslant 0, & x\in D^c,\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 $c(x)$ 在 D 中下方有界. 假设 D 在 x_n 方向狭窄, 记 $d_n(D)$ 为 D 在 x_n 方向的宽度, 且满足

$$d_n(D)\Big|\inf_D c(x)\Big|^{\frac{1}{2s}}\leqslant C,\tag{1.3}$$

则有

$$w^\tau(x)\geqslant 0,\quad x\in D.\tag{1.4}$$

更进一步, 可以得到

$$w^\tau(x)>0,\quad x\in D\quad 或\quad w^\tau(x)\equiv 0,\quad x\in\mathbb{R}^n.\tag{1.5}$$

若 Ω 是在 x_n 方向的有界凸区域, 令 $\Omega^\tau=\Omega-\tau e_n$, 其中 $e_n=(0,\dots,0,1)$, 这是由 Ω 向下滑动 τ 个单位得到的. 显然, 当 τ 充分接近 Ω 在 x_n 方向的宽度时, $\Omega\cap\Omega^\tau$ 是一个狭窄区域. u 在 Ω 的余集内是单调的, 这保证可以使用定理 1.1 得到

$$w^\tau(x)\geqslant 0,\quad x\in\Omega\cap\Omega^\tau.\tag{1.6}$$

这为第 1 步滑动区域 Ω^τ 提供起点. 在第 2 步中, 继续向上滑动 Ω^τ 并且保持 (1.6) 滑动至极限位置时一直成立. 如果可以一直滑动区域至 $\tau=0$, 那么就推出解在 x_n 方向单调递增.

为使上述两步得以进行, 我们需要对 u 加上一些外部条件. 令

$$u(x)=\varphi(x),\quad x\in\Omega^c,\tag{1.7}$$

且设

(H) 任意 3 点 $x=(x',x_n)$、$y=(x',y_n)$ 和 $z=(x',z_n)$ 位于平行于 x_n 轴的直线上, 满足 $y_n<x_n<z_n$, 这里 $y,z\in\Omega^c$, 且有

$$\varphi(y)<u(x)<\varphi(z),\quad 如果\ x\in\Omega,\tag{1.8}$$

$$\varphi(y)\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(z),\quad 如果\ x\in\Omega^c.\tag{1.9}$$

注 1.1 文献 [24] 同样假设了条件 (1.8) 和 (1.9) 成立 (其中 Ω^c 改为 $\partial\Omega$).

应用滑动方法, 我们得到了分数阶方程在有界域中解的单调性.

定理 1.2 令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中在 x_n 方向凸的有界区域. 设 $u \in \mathcal{L}_{2s} \cap C^{1,1}_{\rm loc}(\Omega)$ 为方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u(x) = f(u(x)), & x \in \Omega,\\ u(x) = \varphi(x), & x \in \Omega^c\end{cases} \tag{1.10}$$

的解并且满足条件 (H). 假设 f 是 Lipschitz 连续函数, 则 u 在 Ω 内关于 x_n 是单调递增的, 即对于任意的 $\tau > 0$, 有

$$u(x', x_n + \tau) > u(x', x_n), \quad \text{对任意的 } (x', x_n), (x', x_n + \tau) \in \Omega.$$

为了在无界区域中利用滑动方法, 我们需证明下述极大值原理.

定理 1.3 (无界区域极值原理) 令 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 (可能无界、不连通), 设

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{|D^c \cap (B_{2^{k+1}}(q) \backslash B_{2^k}(q))|}{|B_{2^{k+1}}(q) \backslash B_{2^k}(q)|} > 0, \tag{1.11}$$

其中 q 是 D 中的任意点. 令 $u \in \mathcal{L}_{2s} \cap C^{1,1}_{\rm loc}(D)$ 是上方有界的下半连续函数且满足

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u + c(x)u(x) \leqslant 0, & \text{在 } D \text{ 内 } u(x) > 0 \text{ 的点处},\\ u(x) \leqslant 0, & x \in \mathbb{R}^n \backslash D\end{cases} \tag{1.12}$$

和 $c(x) \geqslant 0$, 则有 $u(x) \leqslant 0$, $x \in D$.

注 1.2 Dipierro 等 [28] 利用文献 [29] 中的增长引理证明了外锥条件 (D^c 含有开的连通无穷锥) 下的极大值原理. 这里利用新的方法来证明, 即利用 s 下调和函数的 Poisson 表示, 并将外锥条件减弱为 (1.11). 为更清晰起见, 下面列出几类满足条件 (1.11) 但不满足外锥条件的区域:

(1) 带形区域 (见图 1): $D = \{x \mid 2k < x_n < 2k+1, k = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$ (不连通);

(2) 环形区域 (见图 2): $D = \{x \mid 2k < |x| < 2k+1, k = 0, 1, 2, \dots\}$ (不连通);

(3) Archimedes 螺线 (见图 3) (连通),

这里 D 为阴影部分区域.

Berestycki 等 [30] 对方程

$$-\Delta u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

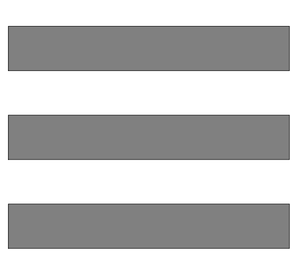

图 1 带形区域

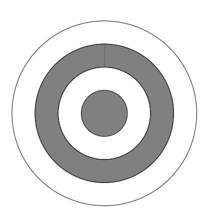

图 2 环形区域

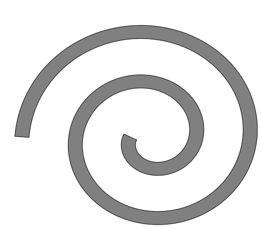

图 3 Archimedes 螺线

得到了解的单调性, 其中要求 f 在 $[-1,-1+\delta]$ 和 $[1-\delta,1]$ 上非增. 此外, 还需满足

$$f=f(u) \text{ 在 } [-1,1] \text{ 上 Lipschitz 连续并且 } f(\pm 1)=0. \tag{1.13}$$

当考虑分数阶方程时, 这些关于 f 的假设条件同样也需要 (参见文献 [28]). 下面应用滑动方法所得单调性结果不需要条件 (1.13).

定理 1.4 设 $u\in\mathcal{L}_{2s}\cap C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 是方程

$$\begin{aligned}&(-\Delta)^s u(x)=f(u(x)),\quad x\in\mathbb{R}^n, \qquad (1.14)\\ &|u(x)|\leqslant 1\end{aligned}$$

的解, 满足

$$u(x',x_n)\underset{x_n\to\pm\infty}{\longrightarrow}\pm 1 \text{ 关于 } x'=(x_1,\dots,x_{n-1}) \text{ 一致成立}. \tag{1.15}$$

设 $f(\cdot)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续函数, 且存在 $\delta>0$ 使得

$$f \text{ 在 } [-1,-1+\delta] \text{ 和 } [1-\delta,1] \text{ 上非增}, \tag{1.16}$$

则 $u(x)$ 关于 x_n 单调增, 并且仅依赖于 x_n.

注 1.3 定理 1.4 与 De Giorgi 猜想 [31] 密切相关, 即若 u 是方程

$$-\Delta u(x)=u(x)-u^3(x),\quad x\in\mathbb{R}^n \tag{1.17}$$

的解, 满足

$$|u(x)|\leqslant 1,\quad \lim_{x_n\to\pm\infty}u(x',x_n)=\pm 1,\quad \forall\, x'\in\mathbb{R}^{n-1},\quad \frac{\partial u}{\partial x_n}>0,$$

则存在向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^{n-1}$ 和函数 $u_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得

$$u(x',x_n)=u_1(\boldsymbol{a}\cdot x'+x_n),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

注意到 $f(u)=u-u^3$ 满足条件 (1.16), 定理 1.4 中需要假设当 $x_n\to\pm\infty$ 时 u 一致收敛, 而 De Giorgi 猜想中的假设仅为逐点收敛.

本文采用新的想法. 传统做法是像文献 [28, 30] 一样沿着一列方程来做估计, 我们的做法是沿着一列趋于极大值的点列利用

$$(-\Delta)^s u(x)-(-\Delta)^s u^\tau(x)$$

所定义的奇异积分来做估计. 这就削弱了条件 (1.13), 因此只需在定理 1.4 中假设 f 是连续函数. 在这一过程中, 下述平均值不等式发挥着至关重要的作用.

引理 1.1 (推广的平均值不等式) 假设 $u\in\mathcal{L}_{2s}\cap C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\bar{x}$ 是 u 在 $\mathbb{R}^n$ 中的极大值点, 则对于任意的 $r>0$, 有

$$\frac{C_0}{C_{n,s}}r^{2s}(-\Delta)^s u(\bar{x})+C_0\int_{B_r^c(\bar{x})}\frac{r^{2s}}{|\bar{x}-y|^{n+2s}}u(y)dy\geqslant u(\bar{x}),$$

其中 C_0 满足

$$C_0\int_{B_r^c(\bar{x})}\frac{r^{2s}}{|\bar{x}-y|^{n+2s}}dy=1.$$

特别地, 当 u 在 $\bar{x}$ 处是 s 下调和函数时, 上述不等式变为

$$u(\bar{x}) \leqslant \int_{B_r^c(\bar{x})} u(y)\, d\mu(y), \tag{1.18}$$

这里 $\int_{B_r^c(\bar{x})} d\mu(y) = 1$. 不等式 (1.18) 右端的积分实际上是 u 在球 $B_r(\bar{x})$ 外的加权平均. 这一不等式为证明无界区域极值原理 (定理 1.3) 提供方便, 相信这一平均值不等式将成为分析分数阶方程的重要工具.

下文内容组织如下: 第 2 节建立狭窄区域原理且应用滑动方法得到解在有界域的单调性, 第 3 节证明无界区域的极大值原理并给出一些应用, 第 4 节在全空间得到解的严格单调性和仅依赖于 x_n 的性质.

2 狭窄区域极值原理和单调性

定理 1.1 的证明 假设 (1.4) 不成立, 则由 w^τ 在 $\bar{D}$ 的下半连续性可知存在一点 x_0 使得

$$w^\tau(x_0) = \min_{\bar{D}} w^\tau(x) < 0. \tag{2.1}$$

由 (1.2) 和 (1.3) 可得

$$\begin{aligned}
&(-\Delta)^s w^\tau(x_0) + c(x_0) w^\tau(x_0) \\
&= C_{n,s} \mathrm{PV} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^\tau(x_0) - w^\tau(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy + c(x_0) w^\tau(x_0) \\
&\leqslant C_{n,s} w^\tau(x_0) \mathrm{PV} \int_{D^c} \frac{1}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy + \inf_D c(x)\, w^\tau(x_0) \\
&\leqslant w^\tau(x_0) \left(\frac{C}{d_n^{2s}(D)} + \inf_D c(x) \right) \\
&< 0,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $d_n(D)$ 表示区域 D 在 x_n 方向的宽度. 上式中倒数第二个不等号成立采用与文献 [19] 相同的技巧.

不等式 (2.2) 与 (1.2) 矛盾, 因此,

$$w^\tau(x) \geqslant 0, \quad x \in D.$$

基于上述结果, 如果在一点 $x \in D$ 处满足 $w^\tau(x) = 0$, 那么 x 为 w^τ 在 D 内的极小点. 如果在 $\mathbb{R}^n$ 内 $w^\tau \not\equiv 0$, 则有

$$(-\Delta)^s w^\tau(x) = C_{n,s} \mathrm{PV} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^\tau(x) - w^\tau(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy < 0.$$

这与

$$(-\Delta)^s w^\tau(x) = (-\Delta)^s w^\tau(x) + c(x) w^\tau(x) \geqslant 0$$

矛盾. 因此,

$$w^\tau(x) > 0, \quad x \in D \quad \text{或} \quad w^\tau(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

这就完成了定理 1.1 的证明. □

为了说明如何应用滑动方法, 我们仅对 D 为椭球或矩形的情形加以证明. 当 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意有界凸区域 (在 x_n 方向凸) 时, 证明是类似的.

定理 1.2 的证明 对 $\tau \geqslant 0$, 记

$$u^\tau(x) = u(x', x_n + \tau).$$

上述函数在 $\Omega^\tau = \Omega - \tau e_n$ 上有定义, 这一区域是通过沿着与 x_n 轴平行的方向将 Ω 向下滑动 τ 个单位得到的, 其中 $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. 记

$$D^\tau := \Omega^\tau \cap \Omega, \quad \tilde{\tau} = \sup\{\tau \mid \tau > 0, D^\tau \neq \emptyset\}$$

和

$$w^\tau(x) = u^\tau(x) - u(x), \quad x \in D^\tau.$$

与 u 在 Ω 内满足方程 (1.10) 一样, u^τ 在 Ω^τ 内也满足同样的方程 (1.10). 因此, w^τ 满足

$$(-\Delta)^s w^\tau(x) = c^\tau(x) w^\tau(x), \quad x \in D^\tau, \tag{2.3}$$

其中

$$c^\tau(x) = \frac{f(u^\tau(x)) - f(u(x))}{u^\tau(x) - u(x)}$$

是 L^∞ 函数, 满足

$$c^\tau(x) \leqslant C, \quad \forall\, x \in D^\tau.$$

本定理旨在证明

$$w^\tau(x) > 0, \quad x \in D^\tau, \quad \text{对任意的 } 0 < \tau < \tilde{\tau}, \tag{2.4}$$

这表明 u 关于 x_n 方向严格单调增.

第 1 步 (见图 4) 由定理 1.1 得

$$w^\tau(x) \geqslant 0, \quad \text{当 } \tau \text{ 充分接近于 } \tilde{\tau} \text{ 和 } D^\tau \text{ 狭窄时}. \tag{2.5}$$

第 2 步 (见图 5) 不等式 (2.5) 为滑动过程提供起点. 减小 τ 直至极限位置并保持 (2.5) 成立. 定义

$$\tau_0 = \inf\{\tau \mid w^\tau(x) \geqslant 0, x \in D^\tau; 0 < \tau < \tilde{\tau}\}.$$

下面证明

$$\tau_0 = 0.$$

如果上式不成立, 则有 $\tau_0 > 0$, 我们将证明 Ω^τ 能够继续向上滑动一点点并且仍然有

$$w^\tau(x) \geqslant 0, \quad x \in D^\tau, \quad \text{对任意的 } \tau_0 - \varepsilon < \tau \leqslant \tau_0 \tag{2.6}$$

成立. 这与 τ_0 的定义矛盾.

因为

$$w^{\tau_0}(x) \geqslant 0, \quad x \in D^{\tau_0},$$

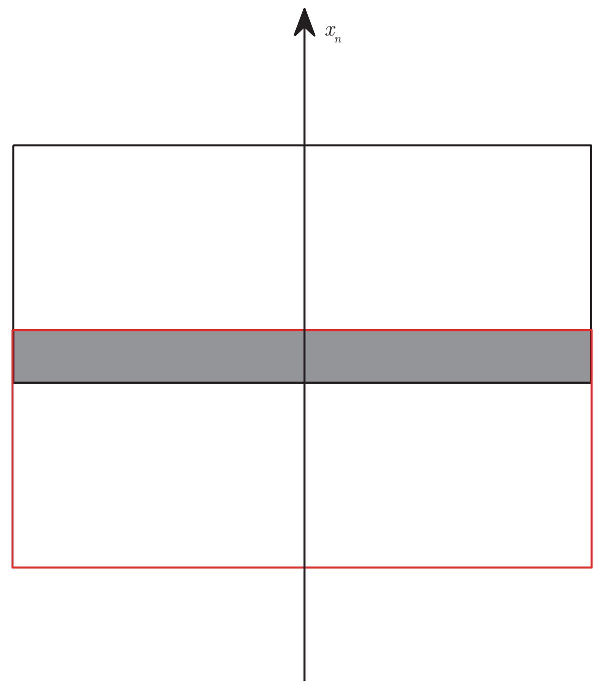

图 4　(网络版彩图) 起始位置. 黑色边框 = $\partial\Omega$, 红色边框 = $\partial\Omega^{\tau}$, 阴影部分 = 狭窄区域部分

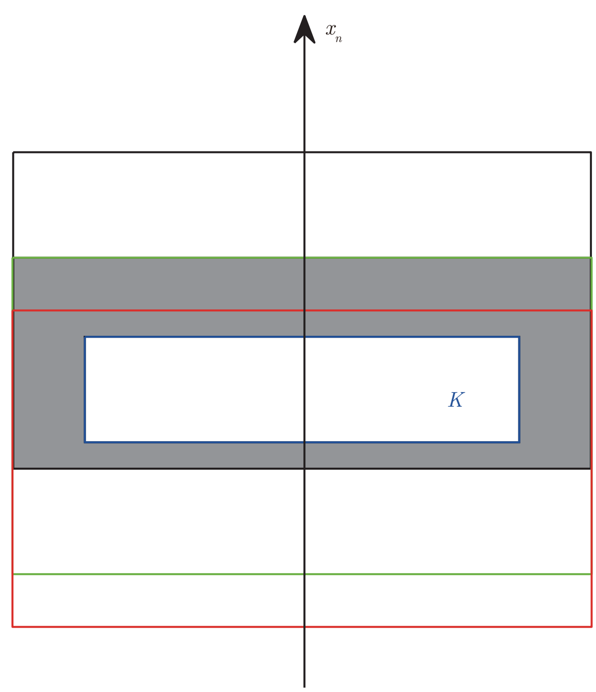

图 5　(网络版彩图) 终止位置. 黑色边框 = $\partial\Omega$, 红色边框 = $\partial\Omega^{\tau}$, 绿色边框 = $\partial\Omega^{\tau-\varepsilon}$, 蓝色边框 = ∂K, 阴影区域 = 狭窄区域

且

$$w^{\tau_0}(x) > 0, \quad x \in \Omega \cap \partial D^{\tau_0},$$

所以,

$$w^{\tau_0}(x) \not\equiv 0, \quad x \in D^{\tau_0}.$$

如果存在一点 x 使得 $w^{\tau_0}(x)=0$, 则 x 是极小值点并且

$$(-\Delta)^s w^{\tau_0}(x) = C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^{\tau_0}(x)-w^{\tau_0}(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy < 0.$$

这与

$$(-\Delta)^s w^{\tau_0}(x) = f(u^{\tau_0}(x)) - f(u(x)) = 0$$

矛盾. 因此,

$$w^{\tau_0}(x) > 0, \quad x \in D^{\tau_0}. \tag{2.7}$$

现在从 D^{τ_0} 中取一个闭集 $K \subset D^{\tau_0}$ 使得 $D^{\tau_0}\backslash K$ 狭窄. 由 (2.7) 可知,

$$w^{\tau_0}(x) \geqslant C_0 > 0, \quad x \in K.$$

由 w^τ 关于 τ 的连续性可得, 存在一个小的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$w^{\tau_0-\varepsilon}(x) \geqslant 0, \quad x \in K.$$

此外, 从条件 (H) 可得

$$w^{\tau_0-\varepsilon}(x) \geqslant 0, \quad x \in (D^{\tau_0-\varepsilon})^c.$$

因为 $(D^{\tau_0-\varepsilon}\backslash K)^c = K \cup (D^{\tau_0-\varepsilon})^c$, 所以,

$$\begin{cases} (-\Delta)^s w^{\tau_0-\varepsilon}(x) - c^{\tau_0-\varepsilon}(x) w^{\tau_0-\varepsilon}(x) = 0, & x \in D^{\tau_0-\varepsilon}\backslash K, \\ w^{\tau_0-\varepsilon}(x) \geqslant 0, & x \in (D^{\tau_0-\varepsilon}\backslash K)^c. \end{cases} \tag{2.8}$$

应用定理 1.1 可得 (2.6) 成立. 因此, 我们得到矛盾并且有

$$w^\tau(x) \geqslant 0, \quad x \in D^\tau, \quad \text{对任意的 } 0 < \tau < \tilde{\tau}. \tag{2.9}$$

因为

$$w^\tau(x) \not\equiv 0, \quad x \in D^\tau, \quad \text{对任意的 } 0 < \tau < \tilde{\tau},$$

所以, 若存在一点 x^o 使得 $w^\tau(x^o)=0$, 那么 x^o 是极小值点并且有

$$(-\Delta)^s w^\tau(x^o) = C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^\tau(x^o)-w^\tau(y)}{|x^o-y|^{n+2s}}dy < 0.$$

这与

$$(-\Delta)^s w^\tau(x^o) = f(u^\tau(x^o)) - f(u(x^o)) = 0$$

矛盾. 因此, (2.4) 成立.

这就完成了定理 1.2 的证明. □

3 无界区域极大值原理及其应用

3.1 定理 1.3 的证明

记

$$u^+ := \max\{u,0\}, \quad u^- := \min\{u,0\}$$

和

$$D^+ := \{x \in D : u(x) > 0\}.$$

下面分 3 步来证明.

第 1 步 这一步证明

$$(-\Delta)^s u^+ \leqslant 0, \quad x \in D^+. \tag{3.1}$$

事实上, 若 $x \in D^+$, 则

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s u^+(x) &= C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^+(x)-u^+(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy \\
&= C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{D^+} \frac{u^+(x)-u^+(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy + C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^n\setminus D^+} \frac{u^+(x)-u^+(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy \\
&= C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{D^+} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy + C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^n\setminus D^+} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy \\
&\quad + C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^n\setminus D^+} \frac{u^-(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy \\
&= (-\Delta)^s u(x) + C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^n\setminus D^+} \frac{u^-(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy \\
&\leqslant (-\Delta)^s u(x).
\end{aligned}$$

从而,

$$(-\Delta)^s u^+ + c(x)u^+ \leqslant (-\Delta)^s u + c(x)u \leqslant 0, \quad x \in D^+.$$

这就证得 (3.1) 成立.

第 2 步 第 1 步证明了 u^+ 是 D^+ 中的下调和函数. 这一步将 u^+ 与 s- 调和函数 $\hat{u}$ 比较. 拟证明

$$u^+(x) \leqslant \hat{u}(x), \quad x \in B_r(0), \qquad \text{对任意的 } r > 0, \tag{3.2}$$

其中

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{|y|>r} P_r(y,x)u^+(y)dy, & |x| < r, \\ u^+(x), & |x| \geqslant r, \end{cases} \tag{3.3}$$

这里 $P_r(y,x)$ 为 Poisson 核, 形为

$$P_r(y,x) = \begin{cases} B(n,s)\left(\dfrac{r^2-|x|^2}{|y|^2-r^2}\right)^s \dfrac{1}{|x-y|^n}, & |y| > r, \\ 0, & |y| < r, \end{cases}$$

其中

$$B(n,s)=\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{\frac{n}{2}+1}}\sin(\pi s).$$

已知 $\hat{u}(x)$ (参见文献 [20]) 满足

$$(-\Delta)^s\hat{u}(x)=0,\quad |x|<r.$$

记 $v(x)=u^+(x)-\hat{u}(x)$, 显然, $v(x)\equiv 0$, $x\in B_r^c(0)$. 若 (3.2) 不成立, 则存在一点 $\bar{x}\in B_r(0)$ 使得

$$v(\bar{x})=\sup_{B_r(0)}v(x)>0.$$

若 $\bar{x}\in(D^+)^c$, 则有

$$v(\bar{x})=u^+(\bar{x})-\hat{u}(\bar{x})=-\hat{u}(\bar{x})\leqslant 0.$$

因此, $\bar{x}\in D^+$.

由 (3.1) 可得

$$(-\Delta)^s v(\bar{x})=(-\Delta)^s u^+(\bar{x})-(-\Delta)^s\hat{u}(\bar{x})\leqslant 0.$$

因为 $\bar{x}$ 是 v 在 $B_r(0)$ 中的极大值点, 直接计算可得

$$(-\Delta)^s v(\bar{x})=C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{v(\bar{x})-v(y)}{|\bar{x}-y|^{n+2s}}dy>0.$$

自然矛盾. 因此, (3.2) 成立.

第 3 步　基于前两步中 u^+ 的性质, 这一步证明

$$u^+(x)\equiv 0,\quad x\in D.$$

如果结论不成立, 由于 u 是上方有界的, 所以,

$$+\infty>A:=\sup_{\mathbb{R}^n}u^+>0, \tag{3.4}$$

那么对于任意的 $0<\gamma<1$, 存在一点 $x_0\in D$ 使得

$$u^+(x_0)\geqslant\gamma A. \tag{3.5}$$

为了方便, 不妨设 $x_0=0$ 且包含在 D 内 (经过平移, 只需用 $x-x_0$ 来代替 x). 我们将通过证明存在一个不依赖于 γ 的正常数 C 使得 $u^+(0)<(1-C)A$ 得到矛盾.

定义

$$\mathcal{E}_{2s}^{(r)}(x)=\begin{cases}0, & |x|<r,\\ B(n,s)\dfrac{r^{2s}}{(|x|^2-r^2)^s|x|^n}, & |x|>r,\end{cases}$$

则有

$$(\mathcal{E}_{2s}^{(r)}*u^+)(x)=B(n,s)\int_{|y-x|>r}\frac{r^{2s}}{(|y-x|^2-r^2)^s|x-y|^n}u^+(y)dy,$$

其中 $*$ 表示卷积. 根据 (3.3) 中 $\hat{u}$ 的定义可知,

$$\hat{u}(x) = B(n,s)\int_{|y|>r} \frac{(r^2-|x|^2)^s}{(|y|^2-r^2)^s|x-y|^n} u^+(y)dy, \quad |x|<r.$$

从而,

$$\hat{u}(0) = (\mathcal{E}_{2s}^{(r)} * u^+)(0).$$

由 (3.2) 可得

$$u^+(0) \leqslant \hat{u}(0).$$

因此,

$$u^+(0) \leqslant (\mathcal{E}_{2s}^{(r)} * u^+)(0). \tag{3.6}$$

直接计算可得

$$\int_{|x|>r} \mathcal{E}_{2s}^{(r)}(x)dx = B(n,s)\int_{|x|>r} \frac{r^{2s}}{(|x|^2-r^2)^s|x|^n}dy = 1. \tag{3.7}$$

因为

$$u^+(y) \leqslant A, \quad x\in D \quad \text{且} \quad u^+(y)=0, \quad x\in D^c,$$

所以, 从 (1.11) 可得存在 $k_0>0$ 使得

$$|D^c \cap (B_{2^{i+1}r}\backslash B_{2^i r})| \geqslant \frac{C_0}{2}|B_{2^{i+1}r}\backslash B_{2^i r}|, \quad \text{对任意的 } i\geqslant k_0. \tag{3.8}$$

结合 (3.6)–(3.8), 得到

$$\begin{aligned}
u^+(0) &\leqslant B(n,s)\int_{|y|>r} \frac{r^{2s}}{(|y|^2-r^2)^s|y|^n}u^+(y)dy \\
&= B(n,s)\int_{D\cap\{|y|>r\}} \frac{r^{2s}}{(|y|^2-r^2)^s|y|^n}u^+(y)dy \\
&\quad + AB(n,s)\int_{D^c\cap\{|y|>r\}} \frac{r^{2s}}{(|y|^2-r^2)^s|y|^n}dy \\
&\quad - AB(n,s)\int_{D^c\cap\{|y|>r\}} \frac{r^{2s}}{(|y|^2-r^2)^s|y|^n}dy \\
&\leqslant AB(n,s)\int_{\{|y|>r\}} \frac{r^{2s}}{(|y|^2-r^2)^s|y|^n}dy \\
&\quad - AB(n,s)\int_{D^c\cap\{|y|>r\}} \frac{r^{2s}}{(|y|^2-r^2)^s|y|^n}dy \\
&= A - AB(n,s)\int_{D^c\cap\{|y|>r\}} \frac{r^{2s}}{(|y|^2-r^2)^s|y|^n}dy \\
&\leqslant A - AB(n,s)\sum_{i=k_0}^{\infty}\int_{D^c\cap(B_{2^{i+1}r}\backslash B_{2^i r})} \frac{r^{2s}}{(|y|^2-r^2)^s|y|^n}dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant A - CA\sum_{i=k_0}^{\infty}\frac{r^{2s}}{(4^{i+1}r^2-r^2)^s2^{n(i+1)}r^n}|D^c\cap(B_{2^{i+1}r}\backslash B_{2^ir})| \\
&\leqslant A - CA\sum_{i=k_0}^{\infty}\frac{1}{(4^{i+1}-1)^s2^{n(i+1)}}2^{in} \\
&= (1-C_1)A,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

这里 C_1 不依赖于 γ 的选取. 在 (3.5) 中选取 γ 使其充分接近于 1 即可得到矛盾. 因此,

$$u^+(x)=0,\quad x\in D,$$

从而,

$$u\leqslant 0,\quad x\in D.$$

这就完成了定理 1.3 的证明.

3.2 极大值原理的应用

众所周知, 极大值原理在偏微分理论分析中发挥着重要的作用. 下面两个引理给出简单的应用.

定义

$$\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\dots,x_n)\mid x_n>0\}.$$

引理 3.1 令 $u\in\mathcal{L}_{2s}\cap C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)\cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ 是方程

$$
\begin{cases}
(-\Delta)^s u = f(u), & x\in\mathbb{R}^n_+,\\
u>0, & x\in\mathbb{R}^n_+,\\
u=0, & x\notin\mathbb{R}^n_+
\end{cases}
$$

的有界非负解. 函数 $f=f(u)$ 是非增的, 则 u 在 x_n 方向严格单调增.

证明 令

$$
\begin{aligned}
&D=\mathbb{R}^n_+,\\
&u^\tau(x)=u(x',x_n+\tau)
\end{aligned}
$$

和

$$U^\tau(x)=u(x)-u^\tau(x).$$

因为 $f(u)$ 是非增的,

$$\text{在 } D \text{ 内 } U^\tau(x)>0 \text{ 的点处 } f(u(x))-f(u^\tau(x))\leqslant 0,$$

所以,

$$\text{在 } D \text{ 内 } U^\tau(x)>0 \text{ 的点处 } (-\Delta)^s U^\tau(x)\leqslant 0.$$

此外,

$$U^\tau(x)\leqslant 0,\quad x\notin\mathbb{R}^n_+.$$

应用定理 1.3 可得

$$U^\tau(x) \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad \text{对任意的 } \tau > 0.$$

下证

$$U^\tau(x) < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad \text{对任意的 } \tau > 0.$$

如果上式不成立, 那么存在一点 $x^0 \in \mathbb{R}^n_+$ 使得

$$U^\tau(x^0) = 0 = \max_{\mathbb{R}^n} U^\tau(x).$$

因为在 $\mathbb{R}^n$ 中 $U^\tau(x) \not\equiv 0$, 所以,

$$(-\Delta)^s U^\tau(x^0) = C_{n,s} \mathrm{PV} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{0 - U^\tau(y)}{|x^0 - y|^{n+2s}} dy < 0,$$

这与

$$(-\Delta)^s U^\tau(x^0) = f(u(x^0)) - f(u^\tau(x^0)) = 0$$

矛盾. 因此, u 沿着 x_n 方向严格单调增.

这就证明了引理 3.1. □

引理 3.2 假设 $u \in \mathcal{L}_{2s} \cap C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 是方程

$$(-\Delta)^s u(x) = f(u(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

的解, 且满足

$$\begin{aligned} &|u(x)| \leqslant 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ &\lim_{x_n \to \pm\infty} u(x', x_n) = \pm 1 \text{ 一致关于 } x' \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ 成立.} \end{aligned} \tag{3.10}$$

设存在 $\delta > 0$ 使得

$$f \text{ 在区间 } [-1, -1+\delta] \text{ 和 } [1-\delta, 1] \text{ 上非增,} \tag{3.11}$$

则对充分大的 τ, $u^\tau(x) \geqslant u(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中成立.

证明 下面应用定理 1.3 (极大值原理) 来证明该引理. 记

$$U^\tau(x) = u(x) - u^\tau(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

我们将对充分大的 τ, 证明

$$U^\tau(x) \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.12}$$

如果上述结论不成立, 则

$$\sup_{\mathbb{R}^n} U^\tau(x) =: A > 0. \tag{3.13}$$

首先, 考虑函数 $U^\tau(x) - \frac{A}{2}$. 由 (3.10) 可知存在一个常数 $a > 0$ 使得

$$u(x', x_n) \geqslant 1 - \delta, \quad x_n \geqslant a$$

和

$$u(x',x_n) \leqslant -1+\delta, \quad x_n \leqslant -a$$

成立, 且存在正常数 $M>a$ 使得

$$U^\tau(x)-\frac{A}{2} \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1} \times [M,+\infty). \tag{3.14}$$

其次, 对任意的 $\tau \geqslant 2a$, 无论 x 在什么位置, x 和 $x+(0',\tau)$ 中总有一个点位于区域 $\{x:|x_n| \geqslant a\}$ 之内. 我们有

$$u^\tau(x',x_n) \geqslant 1-\delta \quad (\text{如果 } x_n \geqslant a), \tag{3.15}$$

或者

$$u(x',x_n) \leqslant -1+\delta \quad (\text{如果 } x_n \leqslant -a) \tag{3.16}$$

成立, 这里 f 是非增的. 因此,

$$f(u(x))-f(u^\tau(x)) \leqslant 0 \text{ 在 } D=\mathbb{R}^{n-1}\times(-\infty,M) \text{ 内满足 } u(x)>u^\tau(x) \text{ 的点处成立.}$$

从而,

$$(-\Delta)^s\left(U^\tau-\frac{A}{2}\right) \leqslant 0 \ \text{ 在 } D \text{ 内满足 } U^\tau(x)-\frac{A}{2}>0 \text{ 的点处成立.}$$

由 (3.14) 和定理 1.3 可得

$$U^\tau(x)-\frac{A}{2} \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

这与 (3.13) 矛盾, 因此证得 (3.12), 完成了引理 3.2 的证明. □

4 $\mathbb{R}^n$ 内的单调性

本节主要证明定理 1.4. 下面给出证明概要. 记 $x=(x',x_n)$. 对任意的 $\tau \in \mathbb{R}$, 定义

$$u^\tau(x)=u(x',x_n+\tau)$$

和

$$U^\tau(x)=u(x)-u^\tau(x).$$

我们的目的是证明对于任意的 $\tau>0$, 都有

$$U^\tau(x)<0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

上式可通过

$$U^\tau(x) \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

和类似于证明强极大值原理的方法得到.

首先对充分大的 τ 证明不等式 (4.1) 成立, 实际上这可从引理 3.2 直接得到. 这为开始滑动区域提供起点.

然后减小 τ 至极限位置并且始终保持不等式 (4.1) 成立. 定义

$$\tau_0 = \inf\{\tau \mid U^\tau(x) \leqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

下证

$$\tau_0 = 0.$$

如果上式不成立, 我们证明 τ_0 可以继续减小一点点并且保持不等式 (4.1) 成立, 这与 τ_0 的定义矛盾. 由 U^τ 关于 τ 的连续性可知, 如果可以证明

$$\sup_{\mathbb{R}^n} U^{\tau_0}(x) < 0 \tag{4.2}$$

成立即可. 但是, 显然这是不可能的, 因为

$$\lim_{x_n \to \pm\infty} U^{\tau_0}(x) = 0,$$

所以可以通过证明

$$\sup_{|x_n| \leqslant a} U^{\tau_0}(x) < 0 \tag{4.3}$$

来达到目的. 因为这里不能使用极大值原理 (定理 1.3), 所以需要引入推广的平均值不等式, 在一列相关函数的极大值点处导出矛盾.

从 (4.3) 立即可得存在小的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$U^\tau(x) \leqslant 0, \quad |x_n| \leqslant a, \quad \tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0].$$

因此, 只需证明

$$U^\tau(x) \leqslant 0, \quad |x_n| > a, \quad \tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0].$$

上式的证明类似引理 3.2.

下面给出定理 1.4 的证明. 将证明分为 3 步.

第 1 步 由引理 3.2 可得

$$U^\tau(x) \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \tau \geqslant 2a. \tag{4.4}$$

第 2 步 不等式 (4.4) 为滑动区域提供起始位置. 从 $\tau = 2a$ 开始减小 τ, 并且证明对任意的 $0 < \tau < 2a$, 有

$$U^\tau(x) \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

定义

$$\tau_0 = \inf\{\tau \mid U^\tau(x) \leqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

下证 $\tau_0 = 0$. 如果不成立, 我们将证明 τ_0 可以继续减小一点点并且保持不等式 (4.5) 成立.

(i) 首先证明

$$\sup_{\mathbb{R}^{n-1} \times [-a,a]} U^{\tau_0}(x) < 0. \tag{4.6}$$

如果上式不成立, 则有

$$\sup_{\mathbb{R}^{n-1}\times[-a,a]} U^{\tau_0}(x)=0,$$

并且存在一列

$$\{x^k\}\subset\mathbb{R}^{n-1}\times[-a,a],\quad k=1,2,\ldots,$$

使得

$$U^{\tau_0}(x^k)\to 0,\quad k\to\infty.$$

令

$$\eta(x)=\begin{cases} a\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}\tag{4.7}$$

取 $a=\mathrm{e}$ 使得

$$\eta(0)=\max_{\mathbb{R}^n}\eta(x)=1.$$

记

$$\psi_k(x)=\eta(x-x^k),$$

则存在一列 $\{\varepsilon_k\}\to 0$ 使得

$$U^{\tau_0}(x^k)+\varepsilon_k\psi_k(x^k)>0.$$

对任意的 $x\in\mathbb{R}^n\backslash B_1(x^k)$, 注意到 $U^{\tau_0}(x)\leqslant 0$ 和 $\psi_k(x)=0$, 有

$$U^{\tau_0}(x^k)+\varepsilon_k\psi_k(x^k)>U^{\tau_0}(x)+\varepsilon_k\psi_k(x),\quad \text{对任意的 } x\in\mathbb{R}^n\backslash B_1(x^k).$$

因此, 存在一点 $\bar{x}^k\in B_1(x^k)$ 使得

$$U^{\tau_0}(\bar{x}^k)+\varepsilon_k\psi_k(\bar{x}^k)=\max_{\mathbb{R}^n}(U^{\tau_0}(x)+\varepsilon_k\psi_k(x))>0.\tag{4.8}$$

此外, 从 $U^{\tau_0}(\bar{x}^k)+\varepsilon_k\psi_k(\bar{x}^k)\geqslant U^{\tau_0}(x^k)+\varepsilon_k\psi_k(x^k)$ 和 $\psi_k(\bar{x}^k)\leqslant\psi_k(x^k)$, 可以看出

$$0\geqslant U^{\tau_0}(\bar{x}^k)\geqslant U^{\tau_0}(x^k).$$

因此,

$$U^{\tau_0}(\bar{x}^k)\to 0,\quad k\to\infty.\tag{4.9}$$

由 f 的连续性可得

$$(-\Delta)^s(U^{\tau_0}+\varepsilon_k\psi_k)(\bar{x}^k)=f(u(\bar{x}^k))-f(u^{\tau_0}(\bar{x}^k))+C\varepsilon_k\to 0,\quad k\to\infty.\tag{4.10}$$

为了使用极大值原理 (定理 1.3) 来推导矛盾, 注意到极大值原理成立需要用到不等式 (3.6), 对应到这里, 需要

$$(-\Delta)^s(U^{\tau_0}+\varepsilon_k\psi_k)^+(x)\leqslant 0,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

这是很难实现的. 因此, 下面引入推广的平均值不等式.

引理 4.1 (推广的平均值不等式) 假设 $u \in \mathcal{L}_{2s} \cap C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\bar{x}$ 为 u 在 $\mathbb{R}^n$ 内的一个极大值点, 则对任意的 $r > 0$, 有

$$\frac{C_0}{C_{n,s}} r^{2s}(-\Delta)^s u(\bar{x}) + C_0 \int_{B_r^c(\bar{x})} \frac{r^{2s}}{|\bar{x}-y|^{n+2s}} u(y)dy \geqslant u(\bar{x}), \tag{4.11}$$

这里 C_0 满足

$$C_0 \int_{B_r^c(\bar{x})} \frac{r^{2s}}{|\bar{x}-y|^{n+2s}} dy = 1.$$

证明 由定义可得

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u(\bar{x}) &= C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\bar{x})-u(y)}{|\bar{x}-y|^{n+2s}} dy \\ &\geqslant C_{n,s}\int_{B_r^c(\bar{x})} \frac{u(\bar{x})-u(y)}{|\bar{x}-y|^{n+2s}} dy \\ &= -C_{n,s}\int_{B_r^c(\bar{x})} \frac{u(y)}{|\bar{x}-y|^{n+2s}} dy + C_{n,s}u(\bar{x})\int_{B_r^c(\bar{x})} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n+2s}} dy \\ &= -C_{n,s}\int_{B_r^c(\bar{x})} \frac{u(y)}{|\bar{x}-y|^{n+2s}} dy + C_{n,s}\int_{B_1^c(0)} \frac{1}{|y|^{n+2s}} dy \frac{u(\bar{x})}{r^{2s}}.\end{aligned}$$

在上式两端同乘以 $\frac{C_0}{C_{n,s}} r^{2s}$ 即可得到 (4.11), 这里

$$C_0 = \frac{1}{\int_{B_1^c(0)} \frac{1}{|y|^{n+2s}} dy}.$$

这就完成了引理 4.1 的证明. □

注 4.1 回顾 (3.6) 中 $\mathcal{E}_{2s}^{(r)} * u^+$ 的定义,

$$(\mathcal{E}_{2s}^{(r)} * u^+)(x) = B(n,s)\int_{B_r(x)} \frac{r^{2s}}{(|y-x|^2 - r^2)^s |x-y|^n} u^+(y)dy,$$

极大值原理 (定理 1.3) 的证明是利用积分平均思想, 其中积分核是 $\frac{r^{2s}}{(|y-x|^2-r^2)^s|x-y|^n}$. 类似地, 这里也采用了积分平均的思想, 这里的积分核是 $\frac{r^{2s}}{|\bar{x}-y|^{n+2s}}$. 当 $|y|$ 充分大时, 它们都等价于 $\frac{r^{2s}}{|y|^{n+2s}}$.

下面继续证明定理 1.4.

对函数 $U^{\tau_0} + \varepsilon_k\psi_k$ 应用引理 4.1 可得

$$C_1(-\Delta)^s(U^{\tau_0} + \varepsilon_k\psi_k)(\bar{x}^k) + C_2\int_{B_2^c(\bar{x}^k)} \frac{(U^{\tau_0} + \varepsilon_k\psi_k)(y)}{|\bar{x}^k - y|^{n+2s}} dy \geqslant (U^{\tau_0} + \varepsilon_k\psi_k)(\bar{x}^k).$$

结合 (4.9) 和 (4.10), 以及 $\varepsilon_k \to 0$, 可得

$$0 \leftarrow \int_{B_2^c(\bar{x}^k)} \frac{U^{\tau_0}(y)}{|\bar{x}^k - y|^{n+2s}} dy = \int_{B_2^c(0)} \frac{U^{\tau_0}(z+\bar{x}^k)}{|z|^{n+2s}} dz, \quad k \to \infty. \tag{4.12}$$

记

$$u_k(x) = u(x+\bar{x}^k), \quad U_k^{\tau_0}(x) = U^{\tau_0}(x+\bar{x}^k).$$

因为 $u(x)$ 是一致连续的, 利用 Arzelà-Ascoli 定理, 可知存在子列

$$u_k(x) \to u_\infty(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 当\ k \to \infty\ 时,$$

又由 (4.12) 可得

$$U_k^{\tau_0}(x) \to 0, \quad x \in B_2^c(0), \quad \text{一致地, 当 } k \to \infty \text{ 时}.$$

因此,

$$u_\infty(x) - u_\infty^{\tau_0}(x) \equiv 0, \quad x \in B_2^c(0).$$

因为 $\{\bar{x}_n^k\}$ 有界, 所以由 (1.15) 可得

$$u_\infty(x', x_n) \underset{x_n \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm 1, \quad \text{一致关于 } x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \text{ 成立}. \tag{4.13}$$

因此,

$$u_\infty(x', x_n) = u_\infty(x', x_n + \tau_0) = u_\infty(x', x_n + 2\tau_0) = \cdots = u_\infty(x', x_n + k\tau_0) \tag{4.14}$$

对任意的 $k \in \mathbb{N}$ 成立.

在 (4.13) 中取 x_n 趋近于负无穷使得 $u_\infty(x', x_n)$ 趋近于 -1, 然后取 k 充分大使得 $u_\infty(x', x_n + k\tau_0)$ 趋近于 1, 显然这是不可能的. 因此, (4.6) 必成立.

(ii) 下证存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$U^\tau(x) \leqslant 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]. \tag{4.15}$$

首先, (4.6) 说明存在小的 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\sup_{\mathbb{R}^{n-1} \times [-a,a]} U^\tau(x) < 0, \quad \forall\, \tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]. \tag{4.16}$$

因此, 只需证明

$$\sup_{\mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^{n-1} \times [-a,a])} U^\tau(x) \leqslant 0, \quad \forall\, \tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]. \tag{4.17}$$

如果上式不成立, 则

$$\sup_{\mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^{n-1} \times [-a,a])} U^\tau(x) =: A > 0, \quad \forall\, \tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]. \tag{4.18}$$

由渐近条件 (1.15), 不妨设存在 $M > a$ 使得

$$U^\tau(x) \leqslant \frac{A}{2}, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^{n-1} \times [-M, M]), \quad \forall\, \tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]. \tag{4.19}$$

记

$$D_1 = (\mathbb{R}^{n-1} \times (a, M)) \cup (\mathbb{R}^{n-1} \times (-M, -a)),$$

则

$$D_1^c = \mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^{n-1} \times [-M, M]) \cup (\mathbb{R}^{n-1} \times [-a, a]).$$

考虑函数 $U^\tau(x) - \frac{A}{2}$. 首先, 由 (4.16) 和 (4.19) 可知,

$$U^\tau(x) - \frac{A}{2} \leqslant 0, \quad x \in D_1^c, \quad \forall\, \tau \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]. \tag{4.20}$$

其次, 对任意的 $\tau \in (\tau_0-\varepsilon, \tau_0]$, 在 D_1^c 内满足 $U^\tau(x)-\frac{A}{2}>0$ 的点处有 $u(x) \geqslant u^\tau(x)$. 如果 $x \in \mathbb{R}^{n-1}\times(a,M)$, 那么 $u(x), u^\tau(x) \geqslant 1-\delta$, 且由 f 的单调性知, $f(u(x)) \leqslant f(u^\tau(x))$. 如果 $x \in \mathbb{R}^{n-1}\times(-M,-a)$, 那么 $-1+\delta \geqslant u(x) \geqslant u^\tau(x)$. 同样由 f 的单调性知, $f(u(x)) \leqslant f(u^\tau(x))$.

因此,

$$(-\Delta)^s\left(U^\tau(x)-\frac{A}{2}\right)=f(u(x))-f(u^\tau(x)) \leqslant 0, \quad x \in \left\{x \in D_1^c \,\middle|\, U^\tau(x)>\frac{A}{2}\right\}. \tag{4.21}$$

结合 (4.20) 和 (4.21), 应用定理 1.3, 得到

$$U^\tau(x)-\frac{A}{2} \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \tau \in (\tau_0-\varepsilon, \tau_0].$$

这与 (4.18) 矛盾. 因此, (4.17) 成立. 这就证得 (4.15), 而这与 τ_0 的定义矛盾. 因此, (4.5) 成立.

第 3 步 这一步证明 u 关于 x_n 严格单调增并且 $u(x)$ 仅依赖于 x_n.

结合前两步, 已有

$$U^\tau(x) \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \tau>0.$$

基于此, 如果存在一点 $x^o \in \mathbb{R}^n$ 使得 $U^\tau(x^o)=0$, 那么 x^o 是 U^τ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个极大值点并且有

$$(-\Delta)^s U^\tau(x^o)=f(u(x^o))-f(u^\tau(x^o))=0.$$

因为在 $\mathbb{R}^n$ 内 $U^\tau(y) \not\equiv 0$, 所以直接计算可得

$$(-\Delta)^s U^\tau(x^o)=C_{n,s}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{-U^\tau(y)}{|x^o-y|^{n+2s}}dy>0.$$

这与 $(-\Delta)^s U^\tau(x^o)=0$ 矛盾. 因此,

$$U^\tau(x)<0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \tau>0.$$

这表明 u 关于 x_n 严格单调增.

下证 $u(x)$ 仅依赖于 x_n. 事实上, 从证明过程可以看出, 如果将 $u^\tau(x)$ 换为 $u(x+\tau\nu)$, 那么结论仍然成立, 这里 $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$, $\nu_n>0$. 类似第 1 和 2 步的证明, 对任意的 ν, 可得

$$u(x+\tau\nu)>u(x), \quad \forall \tau>0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

令 $\nu_n \to 0$, 由 u 的连续性, 对任意的 ν, $\nu_n=0$, 可以得到

$$u(x+\tau\nu) \geqslant u(x).$$

从而对任意的 ν, $\nu_n=0$, 有 $u(x+\tau\nu)=u(x)$, 这表明 u 不依赖于 x', 从而, $u(x)=u(x_n)$.

这就证明了定理 1.4.

参考文献

1 Bouchaud J, Georges A. Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications. Phys Rep, 1990, 195: 127–293

2 Caffarelli L, Vasseur A. Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation. Ann of Math (2), 2010, 171: 1903–1930
3 Constantin P. Euler equations, Navier-Stokes equations and turbulence. In: Mathematical Foundation of Turbulent Viscous Flows. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1871. Berlin: Springer, 2006, 1–43
4 Tarasov V, Zaslavsky G. Fractional dynamics of systems with long-range interaction. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2006, 11: 885–898
5 Applebaum D. Lévy Processes and Stochastic Calculus, 2nd ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 116. Cambridge: Cambridge University Press, 2009
6 Bertoin J. Lévy Processes. Cambridge Tracts in Mathematics, 121. Cambridge: Cambridge University Press, 1996
7 Cabré X, Tan J. Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the Laplacian. Adv Math, 2010, 224: 2052–2093
8 Chang S-Y A, del Mar González M. Fractional Laplacian in conformal geometry. Adv Math, 2011, 226: 1410–1432
9 Caffarelli L, Silvestre L. An extension problem related to the fractional Laplacian. Comm Partial Differential Equations, 2007, 32: 1245–1260
10 Chen W, Li C, Ou B. Classification of solutions for an integral equation. Comm Pure Appl Math, 2006, 59: 330–343
11 Brändle C, Colorado E, de Pablo A, et al. A concave-convex elliptic problem involving the fractional Laplacian. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2013, 143: 39–71
12 Chen W, Fang Y, Yang R. Liouville theorems involving the fractional Laplacian on a half space. Adv Math, 2015, 274: 167–198
13 Chen W, Li C, Ou B. Qualitative properties of solutions for an integral equation. Discrete Contin Dyn Syst, 2005, 12: 347–354
14 Chen W, Zhu J. Indefinite fractional elliptic problem and Liouville theorems. J Differential Equations, 2016, 260: 4758–4785
15 Niu P, Wu L, Ji X. Positive solutions to nonlinear systems involving fully nonlinear fractional operators. Fract Calc Appl Anal, 2018, 21: 552–574
16 Zhuo R, Chen W, Cui X, et al. Symmetry and non-existence of solutions for a nonlinear system involving the fractional Laplacian. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36: 1125–1141
17 Chen W, Qi S. Direct methods on fractional equations. Discrete Contin Dyn Syst, 2019, 39: 1269–1310
18 Wu L, Niu P. Symmetry and nonexistence of positive solutions to fractional p-Laplacian equations. Discrete Contin Dyn Syst, 2019, 39: 1573–1583
19 Chen W, Li C, Li Y. A direct method of moving planes for the fractional Laplacian. Adv Math, 2017, 308: 404–437
20 Chen W, Li Y, Ma P. The Fractional Laplacian. Singapore: World Scientific, 2019
21 Chen W, Li C. Maximum principles for the fractional p-Laplacian and symmetry of solutions. Adv Math, 2018, 335: 735–758
22 Berestycki H, Nirenberg L. Monotonicity, symmetry and antisymmetry of solutions of semilinear elliptic equations. J Geom Phys, 1988, 5: 237–275
23 Berestycki H, Nirenberg L. Some qualitative properties of solutions of semilinear elliptic equations in cylindrical domains. In: Analysis, et Cetera. Boston: Academic Press, 1990, 115–164
24 Berestycki H, Nirenberg L. On the method of moving planes and the sliding method. Bol Soc Bras Mat, 1991, 22: 1–37
25 Berestycki H, Caffarelli L, Nirenberg L. Inequalities for second-order elliptic equations with applications to unbounded domains I. Duke Math J, 1996, 81: 467–494
26 Berestycki H, Caffarelli L, Nirenberg L. Monotonicity for elliptic equations in unbounded Lipschitz domains. Comm Pure Appl Math, 1997, 50: 1089–1111
27 Fall M, Jarohs S. Overdetermined problems with fractional Laplacian. ESAIM Control Optim Calc Var, 2015, 21: 924–938
28 Dipierro S, Soave N, Valdinoci E. On fractional elliptic equations in Lipschitz sets and epigraphs: Regularity, monotonicity and rigidity results. Math Ann, 2017, 369: 1283–1326
29 Silvestre L. Hölder estimates for solutions of integro differential equations like the fractional Laplace. Indiana Univ Math J, 2006, 55: 1155–1174
30 Berestycki H, Hamel F, Monneau R. One-dimensional symmetry of bounded entire solutions of some elliptic equations. Duke Math J, 2000, 103: 375–396

31 De Giorgi E. Convergence problems for functionals and operators. In: Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1978). Bologna: Pitagora, 1979, 131–188

Monotonicity of solutions for fractional equations with De Giorgi type nonlinearities

Leyun Wu & Wenxiong Chen

Abstract In this paper, we develop a sliding method for the fractional Laplacian. We first obtain the key ingredients needed in the sliding method either in a bounded domain or in the whole space, such as narrow region principles and maximum principles in unbounded domains. Then using semi-linear equations involving the fractional Laplacian in both bounded domains and in the whole space, we illustrate how this new sliding method can be employed to obtain monotonicity of solutions. Some new ideas are introduced, among which, one is to use the Poisson integral representation of s-subharmonic functions in deriving the maximum principle, and the other is to estimate the singular integrals defining the fractional Laplacians along a sequence of approximate maximum points by using a generalized average inequality. We believe that this new inequality will become a useful tool in analyzing fractional equations.

Keywords **the fractional Laplacian, maximum principle in unbounded domains, narrow region principle, average inequality, monotonicity, sliding method**

MSC(2020) **35R11, 35B50**

doi: 10.1360/SCM-2019-0668