中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 9 期: 1201 ~ 1218
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

图的支撑树伸展与层叠最优化

献给越民义教授 100 华诞

林诒勋

郑州大学数学与统计学院, 郑州 450001
E-mail: linyixun@zzu.edu.cn

收稿日期: 2019-10-29; 接受日期: 2020-02-23; 网络出版日期: 2020-09-10

摘要 在图的支撑树最优化中, 有两个重要的优化指标: 伸展度和层叠度. 由此提出两个组合最优化问题: 最小伸展支撑树问题, 求一个图的支撑树, 使得当所有边嵌入到此支撑树时, 这些边的最大伸展距离为最小; 最小层叠支撑树问题, 求一个图的支撑树, 使得当所有边嵌入到此支撑树时, 每条树边上的最大重叠边数为最小. 这两个问题确定出两个图论参数: 树展和树层. 本文主要论述树展和树层的基本结构性质, 包括圈与余圈的对偶性、极值性、上下界、最优性刻画和最优值计算等.

关键词 支撑树最优化 伸展度 层叠度 基本圈 基本余圈

MSC (2010) 主题分类 90C27, 05C35, 05C05

1 引言

在稀疏矩阵计算、VLSI (very large scale integration) 电路布线、互连网设计和网络通信中提出一系列图的标号和嵌入问题 (参见文献 [1,2]). 以电路布线为例, 一个嵌入方式的质量优劣有两个衡量指标: (1) 伸展度 (dilation 或 stretch), 如元件之间的导线长度; (2) 层叠度 (congestion), 如导线之间的重叠程度. 导线太长会导致信号衰减; 重叠线太多会产生信号干扰. 于是在系统设计中要求这两个指标尽可能小. 这一纵一横的两个指标成为众多网络嵌入问题的优化度量. 如下的两个一般理论框架概括了广阔的研究领域.

设 G 是一个简单图, 其顶点集为 $V(G)$, 边集为 $E(G)$, 且 $|V(G)| = n$. 由伸展度引出如下广义带宽问题. 图 G 称为客图. 给定另一个主图 H. 客图 G 在主图 H 上的嵌入是指单射 $f : V(G) \to V(H)$. 这可解释为电路 G 在底板 H 上的安装. 从 G 到 H 的嵌入 f 的广义带宽定义为

$$B_H(G, f) := \max_{uv \in E(G)} d_H(f(u), f(v)), \tag{1.1}$$

英文引用格式: Lin Y X. Optimization of spanning tree stretch and congestion for graphs (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1201–1218, doi: 10.1360/SSM-2019-0266

© 2020《中国科学》杂志社

其中 $d_H(x,y)$ 表示在图 H 中 x 与 y 之间的距离. 进而, 图 G 相对于 H 的广义带宽是

$$B_H(G) := \min\{B_H(G,f) : f \text{ 是一个嵌入}\}. \tag{1.2}$$

确定图的广义带宽就是求这样的嵌入, 使得图 G 嵌入 H 时, 所有边两端的最大距离 (伸展度) 为最小. 当主图 H 是 n 顶点路 P_n 时, 这个 $B_H(G)$ 就是通常意义的带宽 $B(G)$ (参见文献 [1–4]). 当 H 是圈 C_n 时, $B_H(G)$ 称为循环带宽 $B_c(G)$ (参见文献 [5–7]). 当 H 是二维格子图 $P_n \times P_n$ 时, $B_H(G)$ 称为二维带宽 $B_2(G)$ (参见文献 [8,9]).

由层叠度引出如下的广义割宽问题. 设 $P(H)$ 为图 H 中所有路的集. 客图 G 在主图 H 上的嵌入是指一对单射 (f,φ), 其中 $f : V(G) \to V(H)$, $\varphi : E(G) \to P(H)$ 使得边 $uv \in E(G)$ 对应于 $\varphi(uv) \in P(H)$ 是连接 $f(u)$ 与 $f(v)$ 的路. 从 G 到 H 的嵌入 (f,φ) 的广义割宽定义为

$$c_H(G,f,\varphi) := \max_{e\in E(H)} |\{uv \in E(G) : e \in \varphi(uv)\}|, \tag{1.3}$$

其中 $|\{uv \in E(G) : e \in \varphi(uv)\}|$ 称为边 $e \in E(H)$ 的层叠度 (即当 G 的边嵌入 H 时, 在 e 处的重叠边数). 进而, 图 G 相对于 H 的广义割宽是

$$c_H(G) := \min\{c_H(G,f,\varphi) : (f,\varphi) \text{ 是一个嵌入}\}. \tag{1.4}$$

当主图 H 是路 P_n 时, 这个 $c_H(G)$ 就是通常意义的割宽 $c(G)$ (参见文献 [1,2,10,11]). 当 H 是圈 C_n 时, $c_H(G)$ 称为循环割宽 $ccw(G)$ (参见文献 [12,13]). 当主图是二分树时, 参见文献 [14].

上述带宽 (伸展) 和割宽 (层叠) 有多种表现形式, 演变出不同的网络优化问题. 例如, Peleg 和 Ullman [15] 从分布系统和通信网络中提出最小伸展支撑树问题 (minimum stretch spanning tree problem) 如下. 设 G 是简单连通图, T 是 G 的一个支撑树. 对边 $uv \in E(G)$, 令 $d_T(u,v)$ 表示树 T 中 u 与 v 之间的距离, 即 T 中唯一 u-v- 路的长度. 支撑树 T 的最大伸展定义为

$$\sigma_T(G,T) := \max_{uv\in E(G)} d_T(u,v). \tag{1.5}$$

问题是求支撑树 T, 使得 $\sigma_T(G,T)$ 为最小. 设 $\mathscr{T}$ 为图 G 的支撑树的集, 则最小值

$$\sigma_T(G) := \min\{\sigma_T(G,T) : T \in \mathscr{T}\} \tag{1.6}$$

称为图 G 的树展 (tree stretch). 达到此最小值的支撑树称为最优树. 应用背景可以这样通俗地解释: 在一场大雪之后, 城市街道图 G 中只能把雪清扫出一个极小的连通子图—支撑树 T, 原来每条边的交通流只能在 T 中绕行. 问应该选择怎样的支撑树 T, 才使绕行的最大距离为最小? 与 (1.1) 定义的广义带宽相比较, 这里的主图 H 变成支撑树 T, 嵌入 f 是从 $V(G)$ 到 $V(T)$ 的恒等映射, 边 $uv \in E(G)$ 嵌入到 T 中的 u-v- 路. (1.5) 的伸展度 $d_T(u,v)$ 与 (1.1) 的伸展度 $d_H(f(u),f(v))$ 是一致的. 所不同的是, 前者的主图 H 给定, 而嵌入方式 f 变化; 后者的支撑树 T 变化, 嵌入方式随之变化 (其他变形参见文献 [16]).

相对于层叠度, Ostrovskii [17] 提出了最小层叠支撑树问题 (minimum congestion spanning tree problem) 如下. 对一条树边 $e \in T$, $T - e$ 有两个分支, 设其顶点集分别为 X_e 和 Y_e. 令 $\partial(X_e) := \{uv \in E(G) : u \in X_e, v \in Y_e\}$ 表示树边 e 确定的基本边割, 那么 $|\partial(X_e)|$ 称为 e 的层叠度, 即当图 G 嵌入树 T 时, 在 e 处的重叠边数. 支撑树 T 的最大层叠定义为

$$\mathrm{stc}(G,T) := \max_{e\in T} |\partial(X_e)|. \tag{1.7}$$

问题是求支撑树 T, 使得 $\mathrm{stc}(G,T)$ 为最小. 其最小值

$$\mathrm{stc}(G) := \min\{\mathrm{stc}(G,T) : T \in \mathscr{T}\} \tag{1.8}$$

称为图 G 的树层 (tree congestion). 仍以城市扫雪的例子来说, 问应该选择怎样的支撑树 T, 才使通过每条树边的最大车流数为最小? 与 (1.3) 定义的广义割宽相比较, 这里的主图 H 是支撑树 T, 当边 $uv \in E(G)$ 嵌入到 T 中的 u-v- 路时, 优化指标是在 e 处的重叠边数.

对最小伸展支撑树问题和最小层叠支撑树问题, 这里提出两个新的图论参数: 树展与树层. 优化问题的目标是求支撑树 T, 使对应的图论参数为最小. 一旦支撑树求出, 其边嵌入也一并确定, 所以, 嵌入方式是自然确定的.

目前, 对最小伸展支撑树问题和最小层叠支撑树问题的研究, 使得图的最优嵌入领域再度活跃起来. 其主要成果集中于如下几个方面:

(1) NP- 困难性. 最小伸展支撑树问题, 即使对二部弦图或平面图, 也是 NP- 困难的 (参见文献 [18–21]). 最小层叠支撑树问题, 即使对分裂图或链图, 也是 NP- 困难的 (参见文献 [22]).

(2) 固定参数可解性. 对度有界的图或面度有界的平面图, 并对固定参数 k, 存在多项式时间算法判定 $\sigma_T(G) \leqslant k$ [21, 23]. 对平面图或度有界或树宽有界的图, 并对固定参数 k, 存在多项式时间算法判定 $\mathrm{stc}(G) \leqslant k$ [24].

(3) 特殊图类的参数计算. 例如, 已证明了对区间图、分裂图、置换图和凸二部图等具有 $\sigma_T(G) \leqslant 3$ (参见文献 [19, 20, 25, 26]). 对特殊图的树层 $\mathrm{stc}(G)$ 有公式表示, 如完全二部图 $K_{m,n}$ 及平面格子图 $P_m \times P_n$ [27, 28]、完全 k- 部图 $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ 及环面格子图 $C_m \times C_n$ [28, 29]、柱面格子图 $C_m \times C_n$ [30]、三角网格图 T_n [31]、象棋车图 $K_m \times K_n$ [32]、外平面图 [33] 等.

关于图类刻画问题, 已知判定 $\sigma_T(G) \leqslant 2$ 是多项式时间可解的, 而判定 $\sigma_T(G) \leqslant k$ $(k \geqslant 4)$ 是 NP-完全的 (参见文献 [18, 34]). 刻画 $\sigma_T(G) = 3$ 的图是一个长时间的征解问题 (文献 [18, 21] 等猜测它是 NP- 完全的). 本文给出一个充分必要条件的刻画.

在此基础上, 本文旨在研究两个图论参数树展 $\sigma_T(G)$ 和树层 $\mathrm{stc}(G)$ 的结构性质, 如对偶性、最优性刻画、极值性质、上下界和最优值计算等. 特别地有如下主要结果:

- $\sigma_T(G) \leqslant 3$ 的图类刻画, 并由此引出一个性质优良的图类—星分离图;
- $\mathrm{stc}(G) \leqslant 3$ 的图类刻画, 并由此通向树层与树宽的关系;
- 对树展 $\sigma_T(G)$ 最优值计算的对径边方法;
- 对树层 $\mathrm{stc}(G)$ 最优值计算的离散等周方法.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节给出两个图论参数的定义及基本性质, 包括一些简单的上下界. 第 3 节讨论 $\sigma_T(G) \leqslant 3$ 和 $\mathrm{stc}(G) \leqslant 3$ 的图类刻画, 将区间图、分裂图、置换图和凸二部图等概括为星分离图, 并讨论树宽与树层的关系. 第 4 节论述计算树展 $\sigma_T(G)$ 的对径边方法. 第 5 节论述计算树层 $\mathrm{stc}(G)$ 的离散等周方法.

2 定义与基本性质

图论术语和记号参见文献 [35]. 设 G 是 n 个顶点的简单连通图, 其顶点集为 $V(G)$ 及边集为 $E(G)$. 对子集 $S \subseteq V(G)$, S 的邻集定义为 $N_G(S) := \{v \in V(G) \setminus S : \exists u \in S, uv \in E(G)\}$. 对顶点 $v \in V(G)$, $N_G(\{v\})$ 简记为 $N_G(v)$. 对 $S \subseteq V(G)$, $G[S]$ 表示 S 的导出子图 $(S, E(S))$, 其中

$E(S) := \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$. 对边 $e \in E(G)$, $G - e$ 表示从 G 删去边 e 得到的图. 对不属于 $E(G)$ 的边 e, $G + e$ 表示对 G 添加边 e 得到的图.

设 T 是 G 的一个支撑树. 按照文献 [35] 的习惯, 通常 T 也看作边的集合. T 的余树 $\overline{T}$ 定义为 T 在 $E(G)$ 中的补集, 即 $\overline{T} = E(G) \setminus T$. 对 $e \in \overline{T}$, $T + e$ 中的唯一圈称为由余树边 e 确定的基本圈. 最小伸展支撑树问题等价于: 寻求支撑树 T, 使得它的最大基本圈长度为最小, 其中 $\sigma_T(G)$ 等于这个基本圈长度减 1. 由于支撑树 T 的所有基本圈构成 G 的圈空间的基, 因此, 最小伸展支撑树问题实质上是圈空间的一个最优基问题.

从对偶的角度看, 对树边 $e \in T$, 设 $T - e$ 的两个分支的顶点集为 X_e 和 Y_e, 则它们之间的边割 $\partial(X_e) := \{uv \in E(G) : u \in X_e, v \in Y_e\}$ 称为关于树边 e 的基本边割 (基本余圈). 由于支撑树 T 的所有基本边割构成 G 的余圈 (键) 空间的基, 因此, 最小层叠支撑树问题实质上是余圈空间的一个最优基问题. 从这个意义上说, 上述两个问题是对偶问题. 一个熟知的对偶性质是, 对 $e' \in \overline{T}$, $e \in T$ 含于 e' 确定的基本圈当且仅当 e' 含于 e 确定的基本余圈 $\partial(X_e)$.

设 P_n、C_n 和 K_n 表示 n 个顶点的路、圈和完全图. 两个图 G 及 H 的 Cartesian 乘积 $G \times H$ 是这样的图, 其顶点集为 $V(G) \times V(H)$, 而两顶点 (u, v) 和 (u', v') 相邻当且仅当 $[u = u'$ 且 $vv' \in E(H)]$ 或 $[v = v'$ 且 $uu' \in E(G)]$. 两个图 G 和 H 的强乘积 $G \otimes H$ 是指其顶点集为 $V(G) \times V(H)$, 而两顶点 (u, v) 和 (u', v') 相邻当且仅当 $[u = u'$ 且 $vv' \in E(H)]$ 或 $[v = v'$ 且 $uu' \in E(G)]$ 或 $[uu' \in E(G)$ 且 $vv' \in E(H)]$. 例如, $P_m \times P_n$ 是平面格子图 (见图 1(a)), $P_m \otimes P_n$ 称为扩展格子图 (见图 1(b)).

图 G 的块是指不含割点的极大子图. 两个块至多相交于一个顶点 (割点). 由于每一个基本圈含于一个块中, 因此有如下命题成立.

命题 2.1 若图 G 由块 $G_1, G_2, \ldots, G_k$ 组成, 则

$$\sigma_T(G) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \sigma_T(G_i), \quad \mathrm{stc}(G) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathrm{stc}(G_i).$$

因此今后假定 G 本身是一个块且 $n \geqslant 3$, 即 G 是 2- 连通的. 显然, $\sigma_T(G) = \mathrm{stc}(G) = 1$ 当且仅当 G 是树, 这一平凡情形以后不再详述.

最小伸展支撑树问题与最小直径支撑树问题有密切关系. 后者是求一支撑树 T, 使其直径 (两顶点间的最大距离) 为最小. 最小值定义为最小支撑树直径

$$D_T(G) := \min \Big\{ \max_{u,v \in V(G)} d_T(u, v) : T \in \mathscr{T} \Big\}. \tag{2.1}$$

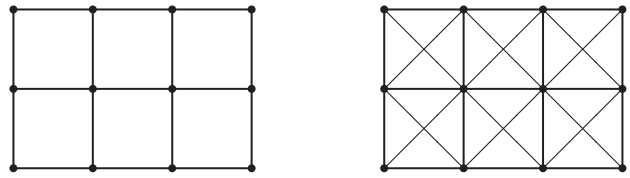
已知 Hassin 和 Tamir [36] 对此问题得到十分有效的算法. 首先求出图 G 的 1- 绝对中心 x^0, 即 G 中这样的点 (包括边中连续变化的点), 它到其他顶点的最大距离为最小. 然后求从 x^0 到 $V(G)$ 所有顶点的最短路树, 即为最小直径支撑树 T^0. 这里求 1- 绝对中心及求最短路树都是基本的图论算法, 总的运行时间是 $O(n^3)$.

另一方面, 图 G 的围长是指其最短圈的长度, 记为 $g(G)$. 由于基本圈的长度至少等于围长, 并将定义 (1.5) 及 (1.6) 与 (2.1) 相比较, 便得到树展的上下界如下.

命题 2.2 设 $g(G)$ 是图 G 的围长, $D_T(G)$ 是最小支撑树直径, T^0 是最小直径支撑树, 则

$$g(G) - 1 \leqslant \sigma_T(G) \leqslant \sigma_T(G, T^0) \leqslant D_T(G).$$

在此命题中, 当上下界相等时便确定出树展的精确值. 例如, 对完全图 K_n $(n \geqslant 3)$, 围长 $g(K_n) = 3$, $D_T(K_n) = 2$ (星是最小直径支撑树), 故 $\sigma_T(K_n) = 2$. 同理, 对轮图 W_n, 有 $\sigma_T(W_n) = 2$. 对完全二部



(a) (b)

图 1 平面格子图及扩展格子图. (a) $P_3 \times P_4$; (b) $P_3 \otimes P_4$

图 $K_{m,n}$ $(m,n \geqslant 2)$, 围长为 4, 最小支撑树直径为 3, 故 $\sigma_T(K_{m,n}) = 3$. 对圈 C_n $(n \geqslant 3)$, 围长为 n, $D_T(C_n) = n-1$, 故有 $\sigma_T(C_n) = n-1$. 对 Petersen 图 G, 有 $g(G) = 5$. 而对图 2(a) 中的最小直径支撑树 T^0 (如实线所示), 每一余树边 (如虚线所示) 的基本圈长度为 5, 故 $\sigma_T(G, T^0) = 4$. 从而达到下界 $\sigma_T(G) = g(G) - 1 = 4$.

关于树层, 也可以得到如下的上下界:

命题 2.3 设 $\delta(G)$ 是图 G 的最小度, $\mathrm{stc}^0(G) = \mathrm{stc}(G, T^0)$ 为相对于最小直径支撑树的层叠度, 则

$$\delta(G) \leqslant \mathrm{stc}(G) \leqslant \mathrm{stc}^0(G).$$

证明 对最优树 T, 设 x 是 T 的悬挂点 (1 度顶点) 且 $e = xy$ 是 x 关联的树边, 则 $X_e = \{x\}$ 是 $T - e$ 的一个分支, 且 $|\partial(X_e)| = d_G(x) \geqslant \delta(G)$. 故有 $\mathrm{stc}(G) \geqslant |\partial(X_e)| \geqslant \delta(G)$. 另一方面, 由于 T^0 是特殊的支撑树, 所以, $\mathrm{stc}(G) \leqslant \mathrm{stc}(G, T^0)$. □

在此命题中, 当上下界相等时便确定出树层的精确值. 如对完全图 K_n $(n \geqslant 3)$, 最小度 $\delta(K_n) = n-1$, 星是最小直径支撑树 T^0, $\mathrm{stc}^0(K_n) = n-1$, 故 $\mathrm{stc}(K_n) = n-1$. 对轮图 W_n, $\delta(W_n) = 3$, 而其中的星是最小直径支撑树 T^0 (如图 2(b) 所示), $\mathrm{stc}^0(W_n) = 3$, 故 $\mathrm{stc}(W_n) = 3$. 对圈 C_n $(n \geqslant 3)$, $\delta(C_n) = 2$, 只有 P_{n-1} 是支撑树 T^0, $\mathrm{stc}^0(C_n) = 2$, 故 $\mathrm{stc}(C_n) = 2$. 一般情形的上下界不一定相等, 如 Petersen 图, $\delta(G) = 3$, 而对图 2(a) 中的最小直径支撑树 T^0, $\mathrm{stc}(G, T^0) = 5$.

进而可将上述两个命题的思想结合起来, 得到改进的下界:

命题 2.4 设图 G 的顶点数和边数分别为 n 和 m, 围长为 $g(G)$, 则

$$\mathrm{stc}(G) \geqslant \left\lceil \frac{(m-n+1)(g(G)-1)}{n-1} + 1 \right\rceil \geqslant \left\lceil \frac{2m-n+1}{n-1} \right\rceil.$$

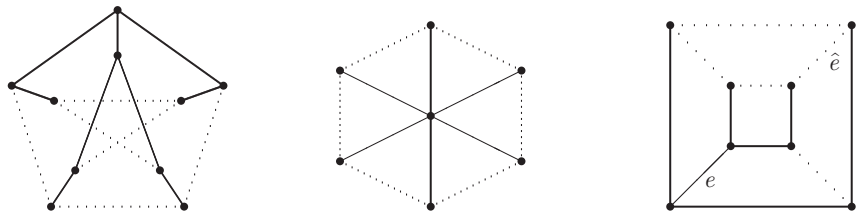
特别对二部图 G $(g(G) \geqslant 4)$, 有

$$\mathrm{stc}(G) \geqslant \left\lceil \frac{3m-2n+2}{n-1} \right\rceil.$$

证明 对任意支撑树 T, 余树边的数目为 $m-n+1$, 而每一余树边的嵌入长度至少为 $g(G)-1$. 所以, 全部余树边产生的总层叠度至少为 $(m-n+1)(g(G)-1)$, 将其分配到 $n-1$ 条树边的平均层叠度至少是 $(m-n+1)(g(G)-1)/(n-1)$. 再加上层叠度按 1 计算的树边, 便得到上述最大层叠度的下界. □

这个下界对完全图 K_n、圈 C_n 和轮图 W_n 等都是紧的. 对立方体 Q_3 (见图 2(c)), 它是一个二部图, 后一下界是紧的, 因为 $\lceil (36-16+2)/7 \rceil = 4$, 而对图 2(c) 中的支撑树 T, 有 $\mathrm{stc}(Q_3, T) = 4$. 对 Petersen 图, 下界改进为 $\lceil (6 \times 4)/9 + 1 \rceil = 4$, 但仍然不是紧的.

对称地, 对树展有如下的下界:



(a) (b) (c)

图 2 具有紧界的图例. (a) Petersen 图; (b) 轮图; (c) 立方体

命题 2.5 设图 G 的顶点数和边数分别为 n 和 m, 最小度为 $\delta(G)$, 则

$$\sigma_T(G) \geqslant \left\lceil \frac{(n-1)(\delta(G)-1)}{m-n+1} \right\rceil.$$

证明 对任意支撑树 T, 树边的数目为 $n-1$. 对每一树边 e, 设 $|X_e| = k$, 则其层叠度 $|\partial(X_e)| \geqslant k\delta(G) - 2(k-1) \geqslant \delta(G)$ (因为对 2- 连通图有 $\delta(G) \geqslant 2$), 即所有余树边在 e 上造成的层叠度至少是 $\delta(G)-1$. 所以, 全部余树边产生的总长度至少为 $(n-1)(\delta(G)-1)$. 将其分配到 $m-n+1$ 条余树边的平均长度至少是 $(n-1)(\delta(G)-1)/(m-n+1)$. 这样便得到最大伸展度的下界. □

这个下界对完全图 K_n、圈 C_n 和轮图 W_n 等都是紧的.

命题 2.6 树层 $\mathrm{stc}(G)$ 是拓扑不变量, 即它在同胚变换 (对边作剖分运算) 下保持不变.

证明 对图 G 的边 uv 作剖分, 插入剖分点 x, 从而边 uv 变为路 uxv, 这样得到图 G'. 设 T 是 G 的支撑树, 其中 $uv \in T$. 令 T 中的边 uv 换成路 uxv, 这样得到的 T' 是 G' 的支撑树. 图 G 相对于树边 uv 的余圈与图 G' 相对于树边 ux 的余圈, 除 uv 与 ux 不同之外, 所有余树边是完全相同的. 因此, 在图 G 中 uv 的层叠度与在图 G' 中 ux 的层叠度相等. 而在 G' 中 ux 的层叠度与 xv 的层叠度相等. 所以 $\mathrm{stc}(G) = \mathrm{stc}(G')$. □

3 固定参数图类刻画

3.1 具有 3- 树展的图类刻画

命题 2.2 给出下界 $\sigma_T(G) \geqslant g(G)-1$. 刻画达到此下界的极图是一个很有意义的课题. 当 $g(G)=3$ 时, 即希望刻画这样的图 G, 它存在一个支撑树 T, 使得所有基本圈都是三角形. Bondy [34] 及 Cai 和 Corneil [18] 给出的下述定理回答了此问题. 在此, 图 G 的一个顶点称为控制顶点, 是指它与其他所有顶点相邻. 对 2- 连通图 G 而言, 它的 3- 连通分支是指不含 2- 顶点割的极大子图. 这里有一个平凡情形, 就是 K_3, 它不含 2- 顶点割, 故可称为 3- 连通分支, 但它本身不是 3- 连通的. 按定义, 至少 4 个顶点的图才可能是 3- 连通的. 所以, 这里至少 4 个顶点的 3- 连通分支才是 3- 连通的.

定理 3.1 [18,34] 设 G 是 2- 连通图, 则 G 具有 $\sigma_T(G)=2$ 且 T 是最优支撑树当且仅当

(1) 若 G 不含 2- 顶点割, 则 G 包含一个控制顶点, 且 T 是 G 的支撑星;

(2) 若 G 包含 2- 顶点割 $\{u,v\}$, 则 $uv \in T$ 且对 G 中包含 $\{u,v\}$ 的每一个 3- 连通分支 H, 子树 $T \cap H$ 是 H 的支撑星, 且以 u 或 v 为中心.

在一支撑树 T 中, 树边 $uv \in T$ 称为外边是指 u 或 v 是悬挂点; 否则称为 T 的内边. 下述刻画等价于定理 3.1.

定理 3.2 设 G 是 2- 连通图, 则 G 具有 $\sigma_T(G)=2$ 且 T 是最优支撑树当且仅当下列之一成立:

(1) T 的直径为 2 (T 的所有边都是外边);

(2) 对 T 的每一条内边 uv, $\{u,v\}$ 都是 G 的 2- 顶点割, 且 $N_T(u)\setminus\{v\}$ 和 $N_T(v)\setminus\{u\}$ 分别含于 $G-\{u,v\}$ 的不同分支之中.

下面结果是定理 3.2 的推广. 直径为 3 的树称为双星, 即由两个星重合一条边所得到的树. 对支撑树 T 及其中一个顶点 $v\in V(T)$, 子集 $S=\{v\}\cup N_T(v)$ 称为以 v 为中心的星集. 在此星集中, 顶点 $u\in S\setminus\{v\}$ 如果不是 T 的悬挂点, 则称之为 S 的接触点. 一个星集 S 称为外星集, 是指它至多有一个接触点; 否则称为内星集. 就是说, 内星集至少有两个接触点与 S 之外的顶点相邻.

定理 3.3 设 G 是 2- 连通图, 则 G 具有 $\sigma_T(G)\leqslant 3$ 且 T 是最优支撑树当且仅当下列之一成立:

(I) T 的直径至多为 3 (T 是星或双星, 其中没有内星集);

(II) T 的每一个内星集 S 都是 G 的顶点割, 且对 S 的任意两个接触点 u 和 w, $N_T(u)\setminus S$ 和 $N_T(w)\setminus S$ 分别含于 $G-S$ 的不同分支之中.

证明 先证充分性. 设存在支撑树 T 满足条件 (I) 或 (II). 若 (I) 成立且 T 是支撑星, 则如定理 3.1 有 $\sigma_T(G)=2$. 若 T 是一双星, 则对每一余树边 $e\in\overline{T}$, 关于 e 的基本圈都是三角形或四边形, 从而 $\sigma_T(G)\leqslant 3$. 否则 T 的直径大于 3, 因而存在内星集. 进而证明: 若条件 (II) 成立, 则对任意余树边 $xy\in\overline{T}$, 有 $d_T(x,y)\leqslant 3$. 若不然, 假设对某个 $xy\in\overline{T}$ 有 $d_T(x,y)\geqslant 4$. 不失一般性, 设 $d_T(x,y)=4$. 那么在 T 中连接 x 与 y 的路形如 $xuvwy$, 其中 $x\in N_T(u)$ 且 $y\in N_T(w)$. 取内星集 $S=\{v\}\cup N_T(v)$. 由于 $u,w\in S$ 不是 T 的悬挂点, 所以, 它们是 S 的接触点. 由条件 (II), $G-S$ 是不连通的, 且 $N_T(u)\setminus S$ 和 $N_T(w)\setminus S$ 分属于 $G-S$ 的不同分支. 既然 $x\in N_T(u)\setminus S$ 且 $y\in N_T(w)\setminus S$, 可知 x 与 y 处于 $G-S$ 的不同分支. 然而 $xy\in\overline{T}$ 被包含于 $E(G-S)$, 这便与 S 是 G 的顶点割矛盾. 因此, 我们证明了对任意 $xy\in\overline{T}$, 有 $d_T(x,y)\leqslant 3$ 成立, 故 $\sigma_T(G)\leqslant 3$.

其次证明必要性. 设 $\sigma_T(G)\leqslant 3$ 且 T 是一最优支撑树. 若 T 的直径不超过 3, 则 (I) 成立, 否则 T 的直径至少为 4. 那么 T 包含内星集. 现设 S 是以 v 为中心的内星集, 且包含接触点 u 和 w. 往证论断 (II). 倘若 S 不是 G 中分离 $N_T(u)\setminus S$ 和 $N_T(w)\setminus S$ 的顶点割, 则可取 $x\in N_T(u)\setminus S$ 和 $y\in N_T(w)\setminus S$, 使得 x 和 y 含于 $G-S$ 同一分支的一条路 P 中. 自然 P 不能含于 T 中 (否则 P 和 $xuvwy$ 形成 T 的一个圈). 分如下两种情形讨论.

• 路 P 仅包含 $\overline{T}$ 的一条边. 设 $P=x\cdots x'y'\cdots y$, 其中 $x'y'\in\overline{T}$ 且 P 的其他边均含 T, 那么 T 中连接 x' 和 y' 的路就是 $x'\cdots xuvwy\cdots y'$, 因而 $d_T(x',y')\geqslant 4$, 与 $\sigma_T(G)\leqslant 3$ 矛盾.

• 路 P 包含 $\overline{T}$ 多于一条边. 自然 S 是 T 的顶点割, 使得 $N_T(u)\setminus S$ 和 $N_T(w)\setminus S$ 分属于 $T-S$ 的不同分支. 设 T_x 和 T_y 为 $T-S$ 中分别包含 x 和 y 的分支. 已知路 P 至少包含 $\overline{T}$ 的两条边. 设 $x'z'$ 是 P 中第一条余树边, 其中 x' 属于 $T-S$ 的分支 T_x, 而 z' 属于 $T-S$ 的另一分支 T_z. 设 z 是 T_z 中这样的顶点, 它与某个接触点 $t\in N_T(v)$ 相邻. 此时, 我们在内星集 S 中用三元组 $\{u,v,t\}$ 代替 $\{u,v,w\}$, 则连接 $x\in N_T(u)\setminus S$ 和 $z\in N_T(t)\setminus S$ 的路 P' 仅含 $\overline{T}$ 的一条边. 按照前一情形的证明, 可得 $d_T(x',z')\geqslant 4$, 同样导致矛盾. 于是论断 (II) 得证. □

这里条件 (II) 包括定理 3.2(2) 作为退化情形. 根据此定理的充分必要条件, 为判定 $\sigma_T(G)\leqslant 3$, 只要寻找满足条件 (I) 或 (II) 的支撑树 T. 为满足条件 (I), 只要运用前述的最小直径支撑树算法, 确定出是否 $D_T(G)\leqslant 3$ (参见 (2.1)). 否则寻找满足条件 (II) 的支撑树. 对此, 是否存在多项式时间算法, 尚待进一步讨论.

本文的进一步任务是在定理 3.3 基础上, 讨论一个新图类的结构. 对此, 称具有 $\sigma_T(G)\leqslant 3$ 的图

为星分离图 (star-separating graph). 事实上, $\sigma_T(G)=1$ 的图 (树) 被一个顶点 (割点) 所分离, 故可称为点分离图; $\sigma_T(G)=2$ 的图被一条内边的 2- 顶点割所分离, 故可称为边分离图; 现在 $\sigma_T(G)\leqslant 3$ 的图可被一个顶点邻域的内星集所分离, 故称之为星分离图. 由此连贯起来看, 星分离图依然保留着某种 "树状" 的可分解结构, 以每个内星集的狭窄处为结合部.

为认识这个图类的结构与范围, 下面列出一些典型的子类.

设 $\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$ 是 $V(G)$ 的划分, 其中 $k\geqslant 2$, $n_i=|V_i|$ $(1\leqslant i\leqslant k)$. 完全 k- 部图 $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ 定义为 $uv\in E(G)$ 当且仅当 $u\in V_i$, $v\in V_j$, $i\neq j$.

推论 3.1 完全 k- 部图是星分离图.

证明 取 $x\in V_1$ 和 $y\in V_2$, 并以 x 和 y 为中心的双星作为支撑树 T, 则定理 3.3(I) 成立. □

推论 3.2 任意二部图的补图是星分离图.

证明 以这样的双星作为支撑树: 对其两个团 X 和 Y 取两个星, 其中心之间加连一边, 则定理 3.3(I) 成立. □

一个树 T 称为毛虫树是指当删去其所有悬挂点后, 变为一条路 (脊线). 毛虫树的星集具有 "路状" 结构. 下面说明区间图具有 "路状" 可分解性.

一个图 G 称为区间图是指它的顶点与直线上一组区间一一对应, 使得两顶点相邻当且仅当对应的区间相交. 区间图的一个特征刻画如下 (参见文献 [37]): 图 G 是区间图当且仅当它存在标号 $f:V(G)\to\{1,2,\ldots,n\}$ 使得对任意 $f(x)<f(y)<f(z)$, 若 $xz\in E(G)$, 则 $yz\in E(G)$.

推论 3.3 [20,25,26] 区间图 G 是星分离图.

证明 设 f 为图 G 的上述标号. 取 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 是从 $f^{-1}(1)$ 到 $f^{-1}(n)$ 的最短路, 其中 $f(x_1)=1$, $f(x_k)=n$, 且 $x_ix_{i+1}\in E(G)$ $(1\leqslant i\leqslant k-1)$, 那么对任意 $f(x_i)<f(y)<f(x_{i+1})$, 必有 $yx_{i+1}\in E(G)$. 构造毛虫树 T 如下: 取 $(x_2,x_3,\ldots,x_{k-1})$ 为脊线, 对 $1\leqslant i\leqslant k-1$, 取 $f(x_i)<f(y)<f(x_{i+1})$ 的边 $yx_{i+1}\in E(G)$ 为悬挂边 (关联于悬挂点 y 的边). 对这样得到的支撑树 T, 脊线端点 x_2 和 x_{k-1} 的星集是外星集, 其他 x_i $(2<i<k-1)$ 的星集 $\{x_i\}\cup N_T(x_i)$ 都是内星集, 有两个接触点 x_{i-1} 和 x_{i+1}. 易知它是 G 的顶点割, 因为如有跨越它的边, 则与 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 是最短路矛盾. 故定理 3.3(II) 成立. □

所谓分裂图 G 是指它的顶点集 $V(G)$ 可划分为一个团 X 和一个独立集 Y. 分裂图具有 "星状" 可分解性.

推论 3.4 [19] 分裂图 G 是星分离图.

证明 构造这样的支撑树 T: 任取 $x_0\in X$, 作从 x_0 到 $N_G(x_0)$ 的星, 并将每一个 $y\in Y\setminus N_G(x_0)$ 连接到 X 的一个邻点. 在 T 中, 以 x_0 为中心的星集是唯一可能的内星集. 如果它不是内星集, 则条件 (I) 成立. 否则它是 G 的顶点割, 从而条件 (II) 成立. □

给定 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的一个置换 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$, 置换图 $G[\pi]$ 的顶点集为 $\{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n\}$, 顶点 π_i 与 π_j 相邻当且仅当 $i<j$, $\pi_i>\pi_j$ (即它们之间出现一个逆序). 例如, $\pi=(4,3,6,1,5,2)$, 则 43、41、42、31、32、61、65、62、52 是 $G[\pi]$ 的 9 条边. 由逆序的性质可知置换图的特征刻画 [37]: 图 G 是置换图当且仅当它存在标号 $f:V(G)\to\{1,2,\ldots,n\}$ 使得

(i) 传递性: 对任意 $f(x)<f(y)<f(z)$, 若 $xy\in E(G)$, $yz\in E(G)$, 则 $xz\in E(G)$;

(ii) 可比性: 对任意 $f(x)<f(y)<f(z)$, 若 $xz\in E(G)$, 则 $xy\in E(G)$ 或 $yz\in E(G)$.

事实上, (i) 的意思是, 若 x 与 y 存在逆序, y 与 z 存在逆序, 则 x 与 z 存在逆序. (ii) 的意思是, 若 x 与 z 存在逆序, 则或者 x 与 y 存在逆序, 或者 y 与 z 存在逆序. 这里的标号 f 称为置换标号 (只要把置换 π 中的顶点 π_i 标号为 $f(\pi_i)=i$, $1\leqslant i\leqslant n$). 置换图与区间图有相似的序列相继性.

推论 3.5 [25] 置换图 G 是星分离图.

证明 构造一个毛虫树 T 作为支撑树如下. 首先求出从 $f^{-1}(1)$ 到 $f^{-1}(n)$ 的最短路 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 作为脊线, 其中 $f(x_1) = 1$, $f(x_k) = n$. 由最短路性质, 可假定 x_2 是 x_1 的邻点中标号尽可能大的. 故 $f(x_3) < f(x_2)$ (否则由 $x_2x_3 \in E(G)$ 和性质 (i) 知 $x_1x_3 \in E(G)$, 从而可选 x_3 为 x_2). 那么对任意 $f(x_{2i-1}) < f(y) < f(x_{2i})$ 的顶点 y, 由性质 (ii) 可知 $x_{2i-1}y \in E(G)$ 或 $yx_{2i} \in E(G)$. 若 $x_{2i-1}y \in E(G)$, 则令 $x_{2i-1}y$ 为 T 的悬挂边. 若 $yx_{2i} \in E(G)$, 则令 $yx_{2i} \in E(G)$ 为 T 的悬挂边. 这样得到支撑树 T. 易证其内星集为 G 的顶点割, 故定理 3.3(II) 成立. □

设 G 是以 (X, Y) 为二部划分的二部图. 称 G 为凸二部图是指存在 Y 的顶点排列 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 使得每一个 $x \in X$ 的邻集 $N_G(x)$ 在 Y 中是连续排列的. 不妨设 $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$, 则 $x_i \in X$ 的邻集 $N_G(x_i)$ 是一个连续整数集 $\{a_i, a_i + 1, \ldots, b_i\}$, 可记为区间形式 $[a_i, b_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. 假定 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ 使得 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_m$ 且 $a_i = a_{i+1} \Rightarrow b_i \leqslant b_{i+1}$. 凸二部图是区间图特征在二部图中的表现.

推论 3.6 [20] 凸二部图 G 是星分离图.

证明 取出所有极大的区间 (即不含于任何其他的区间) $[a_{i_1}, b_{i_1}], [a_{i_2}, b_{i_2}], \ldots, [a_{i_k}, b_{i_k}]$, 其中 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, 则 $[a_{i_1}, b_{i_1}] \cup [a_{i_2}, b_{i_2}] \cup \cdots \cup [a_{i_k}, b_{i_k}] = Y$, 并且相继两个区间是相交的 (否则 G 不连通). 构造支撑树 T 如下: 令 x_{i_1} 与 $[a_{i_1}, b_{i_1}]$ 连接成一个星, 令 x_{i_2} 与 $[a_{i_2}, b_{i_2}] \setminus [a_{i_1}, b_{i_1-1}]$ 连接成一个星, 直至 x_{i_k} 与 $[a_{i_k}, b_{i_k}] \setminus [a_{i_{k-1}}, b_{i_{k-1}-1}]$ 连接成一个星; 进而对 $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_k$, 令 x_i 与 a_i 连一条边. 注意这里以 x_{i_1} 为中心的星与以 x_{i_2} 为中心的星有公共的悬挂点 b_{i_1}, 其余类推. 易证每个内星集都是 G 的顶点割, 从而条件 (II) 成立. □

3.2 具有 3- 树层的图类刻画

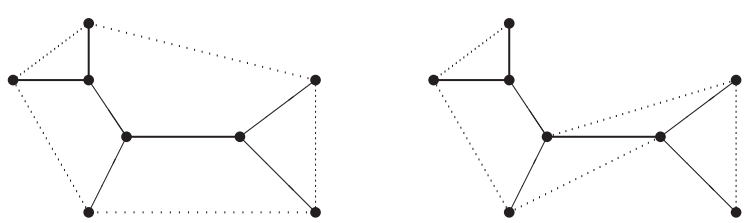
关于最小层叠支撑树问题, 已知判定 $\mathrm{stc}(G) \leqslant 3$ 是多项式时间可解的 [24]. 本小节讨论相应的图类刻画. 根据命题 2.1, 假定 G 是 2- 连通图且 $n \geqslant 3$.

Halin 图是指一个嵌入于平面的树 T, 其中不含 2 度顶点, 加上一个连接所有悬挂点的圈 C, 使之成为 2- 连通的平面图. 对 Halin 图 G 而言, 其中的树 T 是一个支撑树, 圈 C 由所有余树边组成, 且构成这个平面图的外部面边界. 例如, 如图 3(a) 所示, 其中虚线表示余树边. 其次, 广义 Halin 图是指一个嵌入于平面的树 T, 其中不含 2 度顶点, 加上一些悬挂点及其他顶点之间的余树边, 使之成为 2- 连通的平面图, 且所有余树边均含于外部面的边界上, 如图 3(b) 所示.

下面是树层 $\mathrm{stc}(G) \leqslant 3$ 的图的刻画.

定理 3.4 设图 G 是 2- 连通图.

(1) $\mathrm{stc}(G) = 2$ 当且仅当 $G = C_n$;



(a) (b)

图 3 (a) Halin 图; (b) 广义 Halin 图

(2) $\mathrm{stc}(G)=3$ 且每一条树边的层叠度都是 3 当且仅当 G 同胚于 Halin 图.

证明 首先证明 (1). 在命题 2.3 的讨论中, 已知 $\mathrm{stc}(C_n)=2$. 反之, 若 G 不是圈 C_n, 则必存在度至少为 3 的顶点 v. 根据命题 2.6, 如果图 G 存在 2 度顶点, 则可进行同胚变换 (剖分运算的逆变换), 消除这个 2 度顶点, 使得 $\mathrm{stc}(G)$ 保持不变. 这样化归为 $\delta(G)\geqslant 3$ 的情形. 由命题 2.3 得到 $\mathrm{stc}(G)\geqslant\delta(G)\geqslant 3$, 与 $\mathrm{stc}(G)=2$ 矛盾.

其次证明 (2). 若图 G 是 Halin 图 (或其剖分图), 则由 $\delta(G)=3$ 得知 $\mathrm{stc}(G)\geqslant 3$. 设 T 是其中除去外部面边界 C 的树, 则对任意树边 e, $\partial(X_e)$ 包含 C 中两条余树边, 从而 $|\partial(X_e)|=3$. 由此得到 $\mathrm{stc}(G,T)=3$, 且 T 为最优树. 于是有 $\mathrm{stc}(G)=3$ 且每一条树边的层叠度都是 3.

反之, 设 $\mathrm{stc}(G)=3$, 并设 T 是最优支撑树且每一条树边的层叠度都是 3. 将 T 嵌入于平面. 对树 T 的每一个悬挂点 v 及其关联的唯一边 (悬挂边) e, 取 $X_e=\{v\}$. 由假设可知, $\partial(X_e)$ 包含两条余树边. 取 T 的所有余树边的集 C 和所有悬挂点的集 V_0, 这样构成一个子图 H, 则 H 是一个 2- 因子 (其中每一个顶点的度都是 2). 倘若 H 不是连通图, 它的两个连通分支之间只能通过树 T 的路连接, 从而此路中存在割点, 与 G 是 2- 连通图的假设矛盾. 所以 H 是连通图, 因而 C 是一个圈. 既然图 G 是由一个树 T 加上连接悬挂点之间的圈 C 构成, 那么 G 就是 Halin 图或其剖分图. □

推论 3.7 设图 G 是 2- 连通平面图. $\mathrm{stc}(G)=3$ 当且仅当 G 同胚于广义 Halin 图.

证明 设 G 是广义 Halin 图 (或其剖分图), 并设其外部面边界为 C, 则所有余树边均含于 C. 若有树边 $e\in C\cap T$, 则 $\partial(X_e)$ 只包含外部面的另一条余树边, 从而其层叠度 $|\partial(X_e)|=2$. 对树边 $e\in T\setminus C$, $\partial(X_e)$ 包含外部面的两条余树边, 从而其层叠度 $|\partial(X_e)|=3$. 因此, $\mathrm{stc}(G)=3$.

反之, 设 $\mathrm{stc}(G)=3$, 并设 T 是最优支撑树. 将 T 连同所有余树边嵌入于平面, 得到 G 的平面嵌入. 对 $e\in T$, 由于有可能 $|\partial(X_e)|=2$, 从而 $\partial(X_e)$ 只包含一条余树边 e'. 此时 e 和 e' 都处于外部面的边界上. 这包括 e 是 T 的悬挂边, 而 e' 是它相邻的余树边的情形, 其中 e' 是悬挂点与其他顶点 (悬挂或非悬挂顶点) 相连的边. 其次, 对 T 的悬挂边 e, 若 $\partial(X_e)$ 包含两条余树边 e' 和 e'', 则 e' 和 e'' 都处于外部面的边界上. 对 T 的非悬挂边 e, 若 $\partial(X_e)$ 包含两条余树边 e' 和 e'' 且它们处于 e 的两侧, 则 e' 和 e'' 都处于外部面的边界上. 若两条余树边 e' 和 e'' 处于树边 e 的一侧, 则将离 e 较近的余树边, (如 e') 变换为 T 的树边, 而 e 变换为 T 的余树边. 这样就归结为上述情形: 两条余树边处于树边的两侧. 从而, 两条余树边均含于外部面的边界上. 这样一来, 所有余树边均含于外部面的边界树. 故 G 是广义 Halin 图 (或其剖分图). □

对非平面图而言, 若 $\mathrm{stc}(G)=3$, 则在树边 e 的一侧可能有两条交叉的余树边. 在包括非平面图的刻画中要补充这种情形.

图的树宽 $\mathrm{tw}(G)$、路宽 $\mathrm{pw}(G)$ 和割宽 $c(G)$ 是图子式理论中的重要参数. 在此, 简述树宽的一个等价定义. 设 $\omega(G)$ 是图 G 的最大团基数, 则 $\mathrm{tw}(G):=\min\{\omega(H)-1: G\subseteq H, H\text{是弦图}\}$ (参见文献 [38,39]). 关于树宽与树层的关系, 文献 [24,29] 证明了不等式 $\mathrm{tw}(G)\leqslant\max\{\mathrm{stc}(G),\Delta(G)(\mathrm{stc}(G)-1)/2\}$.

对较多的规范图类, 此关系式可以简化改进如下:

推论 3.8 当图 G 满足如下条件之一时, 有 $\mathrm{tw}(G)\leqslant\mathrm{stc}(G)$:

(1) $\mathrm{stc}(G)\leqslant 3$ 或 $\mathrm{tw}(G)\leqslant 3$;

(2) G 是树宽 4- 临界图;

(3) G 是树宽至多为 $k+1$ 的 k- 正则图;

(4) G 是 $K_{m,n}$、$K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ 和 $P_m\times P_n$ 等;

(5) G 是弦图.

证明 (1) $\mathrm{tw}(G)=\mathrm{stc}(G)=1$ 当且仅当 G 是树, 自不待言. 对 2- 连通图, $\mathrm{stc}(G)=2$ 当且仅当 $G=C_n$, 此时亦有 $\mathrm{tw}(G)=2$. 前一推论说, $\mathrm{stc}(G)=3$ 当且仅当图 G 同胚于 Halin 图或广义 Halin 图. 熟知当 G 是 Halin 图时, $\mathrm{tw}(G)=3$ (参见文献 [38,39]). 当图 G 同胚于广义 Halin 图时, 也类似可证 $\mathrm{tw}(G)\leqslant 3$. 故有 $\mathrm{tw}(G)\leqslant \mathrm{stc}(G)$.

另一方面, 当 $\mathrm{tw}(G)=2$ 时, 不管什么图 (序列平行图或外平面图), 对 2- 连通图都有 $\mathrm{stc}(G)\geqslant \delta(G)\geqslant 2$. 当 $\mathrm{tw}(G)=3$ 时, 也不管什么图 (包括 Halin 图及其他), 如果存在 2 度顶点, 则进行同胚变换, 将这个顶点及其关联的两条边变为一条边 (如同将一个剖分点删去), 树宽不变. 于是, $\mathrm{stc}(G)\geqslant \delta(G)\geqslant 3=\mathrm{tw}(G)$.

(2) 设 G 是树宽 4- 临界图, 即 $\mathrm{tw}(G)=4$, 但对任意子图或子式 G' 均有 $\mathrm{tw}(G')<4$. 已证明树宽 4- 临界图 (即树宽为 3 的障碍集) 是 K_5、$K_{2,2,2}$、Möbius 梯子 M_8 和 $C_5\times P_2$ (参见文献 [39]), 如图 4 所示. 对 K_5 和 $K_{2,2,2}$, $\delta(G)=4$, 故由命题 2.3 知 $\mathrm{stc}(G)\geqslant\delta(G)=4$. 对 3- 正则图 M_8 及 $C_5\times P_2$, 任意支撑树 T 不是星. 故存在树边 e 使得 $|X_e|=k\geqslant 2$, 因而, $|\partial(X_e)|=3k-2(k-1)=k+2\geqslant 4$. 所以, $\mathrm{stc}(G)\geqslant 4$.

(3) 设 G 是 k- 正则图且 $\mathrm{tw}(G)\leqslant k+1$ (包括前一情形的 3- 正则图、4- 正则图和 Petersen 图, 以及下一情形的 $K_{k,k}$). 对 $n=k+1$, 显然, $\mathrm{tw}(G)\leqslant n-1=k=\delta(G)\leqslant \mathrm{stc}(G)$. 下设 $n\geqslant k+2$. 对任意支撑树 T, 任意顶点 v 关联的至多 k 条边中, 必有一边 e 使得 $q=|X_e|\geqslant\lceil(n-1)/k\rceil$. 于是, $|\partial(X_e)|=kq-2(q-1)=q(k-2)+2\geqslant\lceil(k+1)/k\rceil(k-2)+2\geqslant 2(k-2)+2\geqslant k+1$. 故 $\mathrm{stc}(G)\geqslant|\partial(X_e)|\geqslant k+1\geqslant \mathrm{tw}(G)$.

(4) 容易计算出 $\mathrm{tw}(K_{m,n})=\min\{m,n\}$, $\mathrm{tw}(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})=n-n_k-1$ $(2\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_k)$, $\mathrm{tw}(P_m\times P_n)=\min\{m,n\}$ (参见文献 [38]). 另一方面, 由第 5 节计算出 $\mathrm{stc}(K_{m,n})=m+n-2$, $\mathrm{stc}(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})=2n-n_k-n_{k-1}-2$, $\mathrm{stc}(P_m\times P_n)=\min\{m,n\}$ 或 $\min\{m,n\}+1$.

(5) 已知当 G 是弦图时有 $\mathrm{tw}(G)=\omega(G)-1$, 其中 $\omega(G)$ 是图 G 的最大团基数 (参见文献 [38,39]). 设 S 是图 G 的最大团, $|S|=\omega$. 设 T^0 是图 G 关于 $\mathrm{stc}(G)$ 的最优支撑树, 则 $\mathrm{stc}(G)=\max_{e\in T^0}|\partial(X_e)|$, 其中 $\partial(X_e)$ 是支撑树 T^0 关于树边 e 的基本边割. 若存在一树边 $e=uv\in T^0\cap E(S)$ (其中 $E(S)$ 是 $G[S]$ 的边集), 则 T^0-e 的两个分支的顶点集 X_e 和 Y_e 构成 $V(G)$ 的一个划分. 设 $|S\cap X_e|=k$ $(1\leqslant k<\omega)$, $|S\cap Y_e|=\omega-k$, 则 $|\partial(X_e)|\geqslant k(\omega-k)\geqslant\omega-1$. 故 $\mathrm{stc}(G)=\max_{e\in T^0}|\partial(X_e)|\geqslant\omega-1=\mathrm{tw}(G)$. 否则 $E(S)$ 中不含 T^0 的边. 故任意 $v\in S$ 都是 T^0 的悬挂点. 现设 $v\in S$ 是 T^0 的悬挂点, $e=uv\in T^0$ 是悬挂边, 则 T^0-e 的一个分支是 $X_e=\{v\}$. 因此, $|\partial(X_e)|\geqslant d_G(v)\geqslant\omega-1=\mathrm{tw}(G)$. □

上述简化关系对弦图的固定参数可解性有特殊意义:

推论 3.9 当图 G 是弦图时, 对给定的 k, 判定 $\mathrm{stc}(G)\leqslant k$ 存在线性算法.

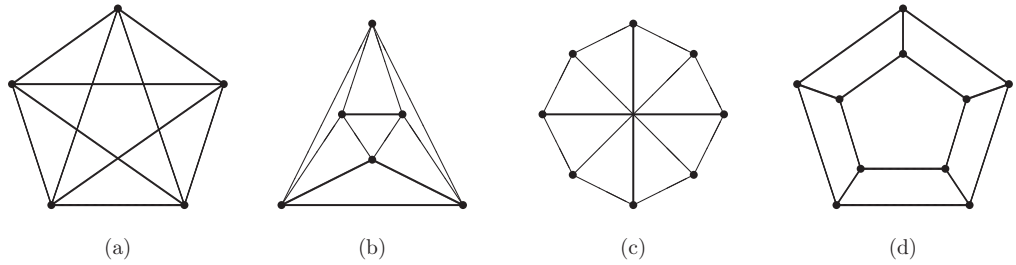


图 4 树宽 4- 临界图. (a) K_5; (b) $K_{2,2,2}$; (c) M_8; (d) $C_5\times P_2$

证明 文献 [24, 引理 3.2] 证明了, 对满足 $c_{\mathcal{G}} \cdot \mathrm{tw}(G) \leqslant \mathrm{stc}(G)$ 的图类 $\mathcal{G}$ (其中 $c_{\mathcal{G}}$ 是只依赖于 $\mathcal{G}$ 的常数), 对固定的 k, 判定 $\mathrm{stc}(G) \leqslant k$ 存在线性算法. 由前一推论已证明对弦图有 $\mathrm{tw}(G) \leqslant \mathrm{stc}(G)$. 推论证毕. □

然而对一般的图而言, $\mathrm{tw}(G) \leqslant \mathrm{stc}(G)$ 是不成立的, 例如, 图 G 是格子图 $P_n \times P_n$ 外加一个控制顶点, $\mathrm{stc}(G) = 5$, 而 $\mathrm{tw}(G) = n$ (反例出自文献 [24]). 完全刻画 $\mathrm{tw}(G) \leqslant \mathrm{stc}(G)$ 的图值得深入讨论.

4 树展问题的最优值计算

对树展 $\sigma_T(G)$ 的最优值计算, 包括如下两个方面:

- 计算 $\sigma_T(G)$ 的上界. 例如, 构造一个具有最小直径 $D_T(G)$ 的支撑树 T, 则

$$\sigma_T(G) \leqslant \sigma_T(G,T) \leqslant D_T(G).$$

- 计算 $\sigma_T(G)$ 的下界.

下面引理给出的确定下界方法称为 “对径边方法”.

引理 4.1 对 G 的任意支撑树 T, 寻找一个基本圈 C 包含一对树边 e 及余树边 $\hat{e}$, 使得 e 与 $\hat{e}$ 的距离尽可能大, 则 $\sigma_T(G,T) \geqslant |C| - 1$.

这里距离最远的 $e \in T$ 和 $\hat{e} \in \overline{T}$ 称为对径边. 如果给出的上下界相等, 则确定出最优值 $\sigma_T(G)$. 以立方体 Q_3 为例 (见图 1(c)), 对其任意支撑树 T, 取处于直径中心位置的树边 e; 在它确定的基本边割 $\partial(X_e)$ 中取与 e 距离最大的余树边 $\hat{e}$. 这样得到对径边 e 和 $\hat{e}$, 包含它们的基本圈长度为 6. 由此得到下界 $\sigma_T(Q_3) \geqslant 5$. 另一方面, 图 1(c) 的支撑树 T 的最大基本圈长度为 6, 达到此下界. 最后作出结论 $\sigma_T(Q_3) = 5$. 这就是计算最优值 $\sigma_T(G)$ 的一般途径.

除了前述的简单情形, 如完全图 K_n、圈 C_n、轮 W_n、完全 k- 部图 $K_{n_1,\ldots,n_k}$ 以及 $\sigma_T(G) \leqslant 3$ 的区间图、分裂图、置换图和凸二部图等之外, 还有一系列典型图类已经推导出最优值 $\sigma_T(G)$ 的计算公式. 例如, 对下面的简单例子只列出结果, 证明从略.

定理 4.1 对如下的图类, 有最优值 $\sigma_T(G)$ 的计算公式:

(1) 平面格子图 $P_m \times P_n$ $(2 \leqslant m \leqslant n)$, $\sigma_T(P_m \times P_n) = 2\lfloor m/2 \rfloor + 1$;

(2) 柱面格子图 $P_m \times C_n$ $(m \geqslant 2, n \geqslant 3)$, $\sigma_T(P_m \times C_n) = 2\lfloor n/2 \rfloor + 1$;

(3) 环面格子图 $C_m \times C_n$ $(3 \leqslant m \leqslant n)$,

$$\sigma_T(C_m \times C_n) = \begin{cases} m+n-1, & \text{若 } m \text{ 和 } n \text{ 为偶数}, \\ m+n-2, & \text{否则}; \end{cases}$$

(4) 三角网格图 T_n, $\sigma_T(T_n) = \lceil 2n/3 \rceil + 1$.

在此仅以路与路的强乘积图 $G = P_m \otimes P_n$ $(2 \leqslant m \leqslant n)$ 为例, 说明最优值的计算方法. 设 $V(G) := \{(i,j) : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$, 顶点 (i,j) 与 (i',j') 相邻当且仅当 $|i-i'| + |j-j'| \leqslant 2$. 按照矩阵下标的次序, 称 $R_i := \{(i,j) : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 为第 i 行 $(1 \leqslant i \leqslant m)$, 称 $Q_j := \{(i,j) : 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 为第 j 列 $(1 \leqslant j \leqslant n)$. 将此扩展格子图画在平面上 (见图 1(b)), 其中 R_1 的边构成上边界, R_m 的边构成下边界, Q_1 的边构成左边界, Q_n 的边构成右边界.

定理 4.2 当 $m=2$ 时, 若 $2\leqslant n\leqslant 3$, 则 $\sigma_T(P_2\otimes P_n)=2$; 若 $n\geqslant 4$, 则 $\sigma_T(P_2\otimes P_n)=3$. 当 $n\geqslant m\geqslant 3$ 时,

$$\sigma_T(P_m\otimes P_n)=\begin{cases} m-1, & \text{若 } m=n \text{ 为奇数},\\ m, & \text{否则}.\end{cases}$$

证明 当 $m=2$ 时, 若 $2\leqslant n\leqslant 3$, 则存在一个控制顶点, 从而由定理 3.1 知 $\sigma_T(P_2\otimes P_n)=2$. 若 $n\geqslant 4$, 则由 G 是区间图知 $\sigma_T(P_2\otimes P_n)=3$. 以下讨论 $m\geqslant 3$. 首先证明下界. 设格子图的左上角、右上角、左下角和右下角分别为 $u=(1,1)$、$v=(1,n)$、$x=(m,1)$ 和 $y=(m,n)$. 对 G 的任意支撑树 T, 设 $P_T(v_1,v_2)$ 为 T 中连接顶点 v_1 和 v_2 的唯一路. 分三种情形讨论.

(i) m 为奇数且 $m=n$. 考虑 4 条路 $P_T(u,v)$、$P_T(x,y)$、$P_T(u,x)$ 和 $P_T(v,y)$. 可以断言: $P_T(u,v)\cap P_T(x,y)\neq\emptyset$ 或 $P_T(u,x)\cap P_T(v,y)\neq\emptyset$. 若不然, 则这 4 条路构成 T 的一个圈, 导致矛盾. 基于对称性, 现考虑前一情形, 即 $P_T(u,v)\cap P_T(x,y)\neq\emptyset$, 则相交部分 $P_T(u,v)\cap P_T(x,y)$ 是一条路 (也可能退化为一个点). 设 $v_0=(i,j)$ 是这条路的第一个点 (j 尽可能小), 则 $i\geqslant\lceil m/2\rceil$ 或 $i\leqslant\lfloor m/2\rfloor$. 若 $i\geqslant\lceil m/2\rceil$, 则 R_1 不可能含于 T (否则 R_1 与 $P_T(u,v)$ 构成 T 的圈). 若 $i\leqslant\lfloor m/2\rfloor$, 则 R_m 不可能含于 T (否则 R_m 与 $P_T(x,y)$ 构成 T 的圈). 现考虑前一情形, 即 $R_1\not\subseteq T$ (若 $R_m\not\subseteq T$, 则对称地讨论). 于是, R_1 中含有余树边. 取 $e=v_0v_1$ 为路 $P_T(u,v)$ 中关联于 v_0 的边. 那么 u 和 v 分属于 $T-e$ 的两个不同分支, 设其顶点集分别为 X_e 和 Y_e (其中 $u\in X_e,v\in Y_e$). 在 R_1 中取属于 $\partial(X_e)$ 余树边 $\hat{e}$. 设 C 是包含 e 和 $\hat{e}$ 的基本圈. 在圈 C 中, 从 v_0 到 $\hat{e}$ 的距离至少为 $\lfloor m/2\rfloor$, 从 v_1 到 $\hat{e}$ 的距离至少为 $\lfloor m/2\rfloor-1$, 故它的长度是 $|C|\geqslant\lfloor m/2\rfloor+\lfloor m/2\rfloor+1$. 由此得到 $\sigma_T(G,T)\geqslant|C|-1\geqslant 2\lfloor m/2\rfloor=m-1$.

(ii) m 为奇数且 $m<n$. 按照前一情形的证明, 若有 $P_T(u,x)\cap P_T(v,y)\neq\emptyset$, 则可得到 $\sigma_T(G,T)\geqslant 2\lfloor n/2\rfloor\geqslant m$. 故现设 $P_T(u,x)\cap P_T(v,y)=\emptyset$, $P_T(u,v)\cap P_T(x,y)\neq\emptyset$. 仍旧取 $e=v_0v_1$ 为路 $P_T(u,v)$ 中关联于 v_0 的边, 其中 $v_1=(i',j+1)$, $|i-i'|\leqslant 1$. 若 $i>\lceil m/2\rceil$ 或 $i=\lceil m/2\rceil$ 而 $i'\geqslant i$, 则仍然取余树边 $\hat{e}$ 属于 R_1. 由此可知基本圈的长度为 $|C|\geqslant\lfloor m/2\rfloor+\lfloor m/2\rfloor+2$ (包括树边 e 和余树边 $\hat{e}$ 的长度). 于是, $\sigma_T(G,T)\geqslant|C|-1\geqslant 2\lfloor m/2\rfloor+1=m$. 若 $i=\lceil m/2\rceil$ 而 $i'<i$, 则 $R_m\not\subseteq T$, 可取余树边 $\hat{e}$ 属于 R_m. 同样得到 $\sigma_T(G,T)\geqslant|C|-1\geqslant 2\lfloor m/2\rfloor+1=m$.

(iii) m 为偶数. 仿照前面的证明, 仍然考虑 $P_T(u,v)\cap P_T(x,y)\neq\emptyset$, 并取 $e=v_0v_1$ 为路 $P_T(u,v)$ 中关联于 v_0 的边, 其中 $v_1=(i',j+1)$, $|i-i'|\leqslant 1$. 若 $i\geqslant m/2+1$ ($i'\geqslant m/2$), 则取余树边 $\hat{e}$ 属于 R_1. 由此可知基本圈的长度为 $|C|\geqslant m/2+m/2+1$. 于是 $\sigma_T(G,T)\geqslant|C|-1=m$. 若 $i<m/2+1$ ($i'<m/2$), 则 $R_m\not\subseteq T$, 可取余树边 $\hat{e}$ 属于 R_m. 同样得到 $\sigma_T(G,T)\geqslant|C|-1\geqslant m/2+m/2=m$.

总结上述情形得到下界

$$\sigma_T(P_m\otimes P_n)\geqslant\begin{cases} m-1, & \text{若 } m=n \text{ 为奇数},\\ m, & \text{否则}.\end{cases}$$

其次, 为证明上界, 我们构造树展达到上述下界的支撑树 T. 同样分 3 种情形讨论.

(i) m 为奇数且 $m=n$. 设 $m=n=2k+1$, $k\geqslant 1$. 取 $v_0=(k+1,k+1)$ 为中心. 首先对所有顶点分层. 设 v_0 为第 0 层, 即定义 $L_0:=\{v_0\}$. 第 i 层定义为 $L_i:=N_G(L_0\cup\cdots\cup L_{i-1})$ $(1\leqslant i\leqslant k)$. 然后构造以 v_0 为根的支撑树 T 如下: 对每一个顶点 $v\in L_i$, 取 $u\in L_{i-1}$ 使得 $uv\in E(G)$, 于是令 uv 加入 T. 这样得到以 v_0 为根, 悬挂点处于第 k 层 L_k 的支撑树 T (如图 5(a) 所示). 对处于边界 R_1、R_m、Q_1 和 Q_m 上的余树边 $\hat{e}\in\overline{T}$, 其基本圈长度为 $k+k+1=m$. 由此得知上界 $\sigma_T(G)\leqslant m-1$.

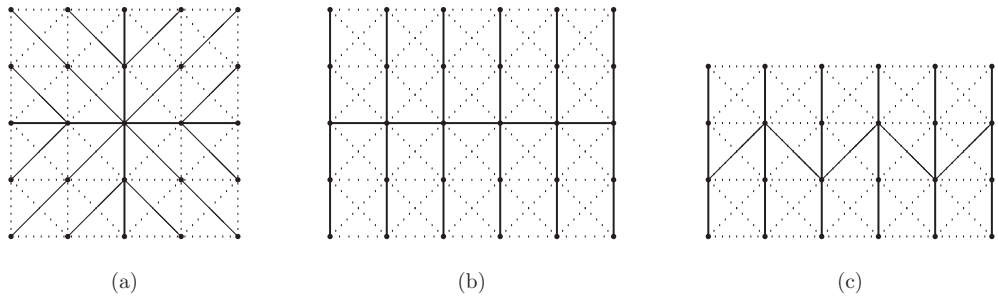


图 5　扩展格子图达到下界的支撑树. (a) $P_5 \otimes P_5$; (b) $P_5 \otimes P_6$; (c) $P_4 \otimes P_6$

(ii) m 为奇数且 $m < n$. 构造支撑树 T 由所有列 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ 和中心行 R_{k+1} 组成 (如图 5(b) 所示). 对处于边界 R_1 和 R_m 上的余树边 $\hat{e} \in \overline{T}$, 其基本圈长度为 $k+k+2=m+1$. 由此得知上界 $\sigma_T(G) \leqslant m$.

(iii) m 为偶数且 $m \leqslant n$. 设 $m=2k$, $k \geqslant 2$. 构造支撑树 T 由所有列 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ 以及介于 R_k 与 R_{k+1} 之间升降交错的路 P_n 组成 (如图 5(c) 所示). 对处于边界 R_1 和 R_m 上的余树边 $\hat{e} \in \overline{T}$, 其基本圈长度为 $k+k+1=m+1$. 由此得知上界 $\sigma_T(G) \leqslant m$.

由上述的上下界相等得证. □

5　树层问题的最优值计算

对树层 $\mathrm{stc}(G)$ 的最优值计算, 同样包括上下界两个方面. 其一是构造特殊的支撑树以导出最优值的上界, 这依赖于对图结构的认识. 其二是分析任意支撑树 T 的 $\mathrm{stc}(G,T)$ 的下界, 则必须借助于某种图论参数. 下面引理提供的一般方法继承了 "离散等周方法" [40].

引理 5.1　给定图 G 和子集 $S \subseteq V(G)$, 若 $G[S]$ 是连通图, 则称 S 为连通子集. 设 $\mathscr{S}_k := \{S \subseteq V(G) : S$ 是连通子集且 $|S|=k\}$. 并设 $\lambda(T) = \{|X_e| : e \in T, X_e$ 是 $T-e$ 中较小分支的顶点集$\}$, 则

$$\mathrm{stc}(G,T) \geqslant \max_{k \in \lambda(T)} \min_{S \in \mathscr{S}_k} |\partial(S)|.$$

证明　根据树层 $\mathrm{stc}(G)$ 的定义 (1.7), 对任意支撑树 T, 有 $\mathrm{stc}(G,T) := \max_{e \in T} |\partial(X_e)|$.

若 $|X_e|=k$, 则 $X_e \in \mathscr{S}_k$, $k \in \lambda(T)$, 从而, $|\partial(X_e)| \geqslant \min_{S \in \mathscr{S}_k} |\partial(S)|$. 因此,

$$\mathrm{stc}(G,T) \geqslant \max_{k \in \lambda(T)} \min_{S \in \mathscr{S}_k} |\partial(S)|.$$

证毕. □

估计 $|\partial(S)|$ 的一般方法是度与边的计数关系 $|\partial(S)| = \sum_{v \in S} d_G(v) - 2|E(S)|$, 其中 $d_G(v)$ 是顶点 v 的度, $E(S)$ 是 $G[S]$ 的边集.

下面举几个例子来说明这种计算方法. 考虑尚未确定出紧界的 Petersen 图 G (见图 2(a)). 对任意支撑树 T, 若它是一条路, 则可取其中心位置的边 e, 使得 $|X_e| = |Y_e| = 5$. 否则存在 $d_T(v)=3$ 的顶点 v. 取 e 为 v 与 $T-v$ 的最大分支的连边. 设 $|X_e| \leqslant |Y_e|$, 则 $3 \leqslant |X_e| \leqslant 5$. 由此得到 $\lambda(T) \cap \{3,4,5\} \neq \emptyset$. 若 $3 \in \lambda(T)$, 则取 $\mathscr{S}_3$ 中的连通子集 S. 由于图 G 是 3- 正则图, $G[S]$ 不含圈, 其中有两条边, 故得 $|\partial(S)| = 3 \times 3 - 2 \times 2 = 5$. 于是得到下界 $\mathrm{stc}(G,T) \geqslant |\partial(S)| = 5$. 若 $4 \in \lambda(T)$, 则取 $\mathscr{S}_4$ 中的连通子集 S. 由于 $G[S]$ 不含圈, 其中有 3 条边, 因此, $|\partial(S)| \geqslant 3 \times 4 - 2 \times 3 = 6$. 由此得到下界 $\mathrm{stc}(G,T) \geqslant |\partial(S)| \geqslant 6$.

若 $5 \in \lambda(T)$, 则取 $\mathscr{S}_5$ 中的连通子集 S. 由于 $G[S]$ 至多有 5 条边, 故 $|\partial(S)| \geqslant 3 \times 5 - 5 \times 2 = 5$, 由此得到下界 $\mathrm{stc}(G,T) \geqslant |\partial(S)| \geqslant 5$. 综上所述得到下界 $\mathrm{stc}(G) \geqslant 5$. 另一方面, 对图 2(a) 中的最小直径支撑树 T^0, $\mathrm{stc}(G,T^0) = 5$. 故得到 $\mathrm{stc}(G) = 5$.

对完全二部图 $G = K_{m,n}$ $(m \leqslant n)$, 设其顶点集为 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ 和 $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. 对 $S \in \mathscr{S}_2$, 设 $S = \{x, y\}$, $xy \in E(G)$, 则 $|\partial(S)| = n - 1 + m - 1 = m + n - 2$. 进而可以断言: 对 $k \geqslant 2$, 有 $\min_{S \in \mathscr{S}_k} |\partial(S)| \geqslant m + n - 2$. 事实上, 对 $S \in \mathscr{S}_k$, 设 $|S \cap X| = p$, $|S \cap Y| = q$, 则 $G[S] = K_{p,q}$, $p + q = k$, 且 $|\partial(S)| = p(n-q) + q(m-p)$. 由于

$$\begin{aligned} p(n-q) + q(m-p) - (m+n-2) &= (p-1)n + (q-1)m + 2(1-pq) \\ &\geqslant (p-1)(q+1) + (q-1)(p+1) + 2(1-pq) \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以, $p(n-q) + q(m-p) \geqslant m + n - 2$, 即断言成立. 由此断言得到统一的下界 $\mathrm{stc}(K_{m,n}) \geqslant m + n - 2$. 另一方面, 构造支撑树 $T = \{x_1y_1, x_1y_2, \ldots, x_1y_n, y_1x_2, y_2x_3, \ldots, y_{m-1}x_m\}$. 对树边 $e = x_1y_i$ $(i < m)$, 有 $X_e = \{y_i, x_{i+1}\}$ 和 $|\partial(X_e)| = m + n - 2$. 对树边 $e = x_1y_i$ $(i \geqslant m)$, 有 $X_e = \{y_i\}$ 和 $|\partial(X_e)| = m$. 对树边 $e = y_ix_{i+1}$ $(i < m)$, 有 $X_e = \{x_{i+1}\}$ 和 $|\partial(X_e)| = n$. 因此得到上界 $\mathrm{stc}(K_{m,n}, T) \leqslant m + n - 2$. 由上下界相等得到 $\mathrm{stc}(K_{m,n}) = m + n - 2$ (对照文献 [27] 的方法).

再看完全 k- 部图 $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ $(2 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_k)$, 其中 $n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} n_i$. 取 $\mathscr{S}_2$ 中的连通子集 $S = \{x, y\}$, 其中 $xy \in E(G)$, 可知 $|\partial(S)| \geqslant (n - n_k - 1) + (n - n_{k-1} - 1) = 2n - n_k - n_{k-1} - 2$. 与前例类似, 可以断言: 对 $k \geqslant 2$, 有 $\min_{S \in \mathscr{S}_k} |\partial(S)| \geqslant 2n - n_k - n_{k-1} - 2$. 由此得到下界 $\mathrm{stc}(K_{n_1,n_2,\cdot,n_k}) \geqslant 2n - n_k - n_{k-1} - 2$. 另一方面, 构造支撑树 T 如下. 设 $X = V_{n_{k-1}}$, $Y = V_{n_1} \cup \cdots \cup V_{n_{k-2}} \cup V_{n_k}$, 其中 $|X| = n_{k-1}$, $|Y| = n - n_{k-1} \geqslant n_k \geqslant n_{k-1}$. 然后仿照前例的规则构造支撑树 T, 即从 $x_1 \in X$ 到 Y 的所有顶点作一个星, 并从其余 $x_j \in X \setminus \{x_1\}$ 到 V_{n_k} 作悬挂边 x_jy_j $(2 \leqslant j \leqslant n_{k-1})$. 对非悬挂边 $e = x_1y_j$, 有 $X_e = \{x_j, y_j\}$ 和 $|\partial(X_e)| = (n - n_k - 1) + (n - n_{k-1} - 1) = 2n - n_k - n_{k-1} - 2$. 对悬挂边 $e = x_jy_j$ $(j \geqslant 2)$, 有 $X_e = \{x_j\}$ 和 $|\partial(X_e)| = n - n_{k-1}$. 对悬挂边 $e = x_1y_l$ $(l > n_{k-1})$, 有 $X_e = \{y_l\}$ 和 $|\partial(X_e)| \leqslant n - n_1$. 因此得到上界 $\mathrm{stc}(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}, T) \leqslant 2n - n_k - n_{k-1} - 2$. 由上下界相等得到 $\mathrm{stc}(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = 2n - n_k - n_{k-1} - 2$ (对照文献 [29] 的方法).

除了前述的简单情形, 如完全图 K_n、圈 C_n、轮 W_n、完全二部图 $K_{m,n}$ 和完全 k- 部图 $K_{n_1,\ldots,n_k}$ 之外, 还有一系列典型图类的最优值 $\mathrm{stc}(G)$ 的计算公式.

定理 5.1 对如下的图类, 有最优值 $\mathrm{stc}(G)$ 的计算公式:

(1) 平面格子图 $P_m \times P_n$ $(2 \leqslant m \leqslant n)$ [27,28],

$$\mathrm{stc}(P_m \times P_n) = \begin{cases} m, & \text{若 } m = n \text{ 或 } m \text{ 为奇数}, \\ m+1, & \text{否则}; \end{cases}$$

(2) 环面格子图 $C_m \times C_n$ $(3 \leqslant m \leqslant n)$, $\mathrm{stc}(C_m \times C_n) = 2m$ [29];

(3) 柱面格子图 $P_m \times C_n$ $(m \geqslant 2, n \geqslant 3)$ [30],

$$\mathrm{stc}(P_m \times C_n) = \begin{cases} \min\{2m, n+1\}, & \text{若 } n \text{ 为奇数}, \\ \min\{2m, n+2\}, & \text{若 } n \text{ 为偶数}; \end{cases}$$

(4) 三角网格图 T_n, $\mathrm{stc}(T_n) = 2\lceil 2n/3 \rceil$ [31];

(5) 象棋车图 $K_m \times K_n$ [32],

$$\mathrm{stc}(K_m \times K_n) = \begin{cases} (m-1)n, & \text{若 } m^2-3m+3<n, \\ (m+n-1-x)x, & \text{否则}, \end{cases}$$

其中 $x = \lceil (mn-1)/(m+n-2) \rceil$.

在此, 我们继续讨论路与路的强乘积图 $G = P_m \otimes P_n$ $(2 \leqslant m \leqslant n)$, 进一步说明最优值 $\mathrm{stc}(G)$ 的计算方法. 此图的记号同前一节.

定理 5.2 $\mathrm{stc}(P_2 \otimes P_2) = 3$, $\mathrm{stc}(P_3 \otimes P_3) = 5$. 除此之外,

$$\mathrm{stc}(P_m \otimes P_n) = \begin{cases} 3m-2, & \text{若 } m \text{ 为奇数}, \\ 3m-1, & \text{若 } m \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

证明 首先, 因为 $P_2 \otimes P_2 = K_4$ 是完全图, 由命题 2.3 得知 $\mathrm{stc}(P_2 \otimes P_2) = 3$. 其次, 对 $P_3 \otimes P_3$, 只有 4 个角的顶点 u、v、x 和 y 的度为 3, 其余顶点的度为 5 或 8. 对任意支撑树 T, 若 T 的直径为 2, 则存在非角点 w 为悬挂点, 故其悬挂边 e 对应的分支 $X_e = \{w\}$, 有 $|\partial(X_e)| = d_G(w) \geqslant 5$. 否则 T 的直径至少为 3. 如果有非角点是悬挂点, 则同上可证 $|\partial(X_e)| \geqslant 5$. 因此可假设 T 的所有悬挂点含于 $\{u,v,x,y\}$. 取与直径端边相邻的边 e, 则 $2 \leqslant |X_e| \leqslant 3$ (因为 e 不可能相邻于 3 条悬挂边). 若 $X_e = \{u,w\}$, 则 $|\partial(X_e)| = d_G(u) + d_G(w) - 2 = 3+5-2 > 5$. 若 $X_e = \{u,v,w\}$, 则 $|\partial(X_e)| = d_G(u) + d_G(v) + d_G(w) - 4 = 3+3+5-4 > 5$. 总之, 可得下界 $\mathrm{stc}(G) \geqslant |\partial(X_e)| \geqslant 5$. 另一方面, $P_3 \otimes P_3$ 的中心是控制顶点, 由此得到直径为 2 的支撑树 T (类似于图 5(a)), 其中非角点 w 为悬挂点, 故有 $\mathrm{stc}(G,T) = 5$. 因此得到 $\mathrm{stc}(G) = 5$.

除上述两个特殊图之外, 为证明下界, 分两种情形讨论.

(i) m 为奇数. 仿照定理 4.2, 对 G 的任意支撑树 T, 有 $P_T(u,v) \cap P_T(x,y) \neq \emptyset$ 或 $P_T(u,x) \cap P_T(v,y) \neq \emptyset$. 考虑前一情形, 即 $P_T(u,v) \cap P_T(x,y) \neq \emptyset$. 取 $v_0 = (i,j)$ 为相交部分 $P_T(u,v) \cap P_T(x,y)$ 的第一个点. 再取 $e = v_0v_1$ 为路 $P_T(u,v)$ 中关联于 v_0 的边. 设 X_e 是 $T-e$ 中包含 $P_T(u,v_0)$ 的分支. 这一分支也包含 $P_T(x,v_0)$. 由此可知 X_e 包含每一行 $R_1, R_2, \ldots, R_m$ 的顶点. 所以 $|X_e| \geqslant m$. 考虑 X_e 第 i 行最右边的顶点 $v_i = (i,j_i)$ (j_i 尽可能大). 从第 1 与 2 行的关系来看, 如果 $(2,j_1+1) \notin X_e$, 则从 v_1 到 $(1,j_1+1)$ 和 $(2,j_1+1)$ 的两条边属于 $|\partial(X_e)|$; 否则 $(2,j_1+1) \in X_e$, 除从 v_1 到 $(1,j_1+1)$ 的一条边属于 $|\partial(X_e)|$ 外, 从 $(2,j_1+1) \in X_e$ 到 $(1,j_1+1) \notin X_e$ 的边也属于 $|\partial(X_e)|$. 这样一来, 我们说第 1 行对应于 $|\partial(X_e)|$ 的两条边. 同理可证, 第 m 行对应于 $|\partial(X_e)|$ 的两条边. 从第 i 行与上下两行的关系来看, 如果 $(i-1,j_i+1) \notin X_e$ 及 $(i+1,j_i+1) \notin X_e$, 则从 v_i 到 (i,j_i+1)、$(i-1,j_i+1)$ 和 $(i+1,j_1+1)$ 的 3 条边属于 $|\partial(X_e)|$; 否则取由 (i,j_i+1) 到 $(i-1,j_i+1)$ 或 $(i+1,j_1+1)$ 的边来代替. 这样得到第 i 行 $(1<i<m)$ 对应于 $|\partial(X_e)|$ 的 3 条边. 于是, $|\partial(X_e)| \geqslant 2+2+3(m-2) = 3m-2$. 故得到下界 $\mathrm{stc}(G) \geqslant 3m-2$.

(ii) m 为偶数. 按照前一情形证明, 得到 $|\partial(X_e)| \geqslant 3m-2$. 若 $|\partial(X_e)| \geqslant 3m-1$, 则已得到欲证的下界. 下设 $|\partial(X_e)| = 3m-2$. 那么, 按照前一情形对 $|\partial(X_e)|$ 进行估计, 第 1 行及第 m 行右边恰对应两条边属于 $|\partial(X_e)|$, 第 i 行 $(1<i<m)$ 右边恰对应于 3 条边属于 $|\partial(X_e)|$, 除此之外, 再无其他边属于 $|\partial(X_e)|$. 如上所述, 已知 $e = v_0v_1$ 是支撑树 T 的边, 使得 X_e 和 Y_e 是 $T-e$ 的两个分支 $(v_0 \in X_e, v_1 \in Y_e)$. 现设 $v_1 = (i,j)$, 则 $i \leqslant m/2$ 或 $i > m/2$. 不妨考虑前一情形 (后一情形可对称地证明). 设 $P_T(v_1,v_2)$ 是在 Y_e 中从 v_1 到 R_m 的路, 其中 $v_2 \in R_m$. 设 $e' = v_1u$ 是 $P_T(v_1,v_2)$ 的第一条边.

并设 $X_{e'}$ 是 $T-e'$ 中包含 $P_T(v_1,v_2)-v_1$ 的分支. 注意 $X_{e'}$ 从 u 到 R_m 至少占据 $k=m/2$ 行. 按照前一情形的计数方法, 从 $X_{e'}$ 每一行最右边顶点引出到 $\partial(X_{e'})$ 的边数至少是 $3k-2$; 从 $X_{e'}$ 每一行最左边顶点引出到 $\partial(X_{e'})$ 的边数至少是 $3k-2$. 再者, 从顶点 u 向上引到 $\partial(X_{e'})$ 的边数 (包括 $e'=v_1u$) 至少为 3. 因此, $|\partial(X_{e'})|\geqslant 2(3k-2)+3=3m-1$. 故得到下界 $\mathrm{stc}(G)\geqslant 3m-1$.

另一方面, 构造支撑树 T 以证明上界. 仍分两种情形讨论.

(i) m 为奇数, 设 $m=2k+1$, $k\geqslant 1$. 构造支撑树 T 由所有列 $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n$ 及中心行 R_{k+1} 组成 (如图 5(b) 所示). 对 R_{k+1} 的每一条边 e, 基本边割 $\partial(X_e)$ 由与垂直于 e 的截线相交的边组成. 由此可知 $|\partial(X_e)|=2+2+3(m-2)=3m-2$. 对列 Q_j 中的每一条边 e', 分支 $X_{e'}$ 是顶点数至多为 k 的路. 其相应的基本边割有 $|\partial(X_{e'})|\leqslant 2(3k-2)+3=3m-4$. 由此得到上界 $\mathrm{stc}(G)\leqslant 3m-2$.

(ii) m 为偶数, 设 $m=2k, k\geqslant 2$. 构造支撑树 T 由所有列 $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n$ 及介于 R_k 与 R_{k+1} 之间升降交错的路 P_n 组成 (如图 5(c) 所示). 对中心路 P_n 的每一条边 e, 基本边割 $\partial(X_e)$ 的边数 $|\partial(X_e)|=2+2+3(m-2)=3m-2$. 对列 Q_j 中介于 R_k 与 R_{k+1} 之间的边 e', 分支 $X_{e'}$ 是顶点数为 k 的路. 其相应的基本边割有 $|\partial(X_{e'})|=2(3k-2)+3=3m-1$. 由此得到上界 $\mathrm{stc}(G)\leqslant 3m-1$.

综上所述, 由上下界相等得证. □

参考文献

1 Chung F R K. Labelings of graphs. In: Beineke L W, Wilson R J, eds. Selected Topics in Graph Theory, vol. 3. London: Academic Press Limited, 1988, 151–168

2 Díaz J, Petit J, Serna M. A survey of graph layout problems. ACM Comput Surv, 2002, 34: 313–356

3 Chinn P Z, Chvátalová J, Dewdney A K, et al. The bandwidth problem for graphs and matrices—A survey. J Graph Theory, 1982, 6: 223–254

4 Lai Y L, Williams K. A survey of solved problems and applications on bandwidth, edgesum, and profile of graphs. J Graph Theory, 1999, 31: 75–94

5 Lin Y. The cyclic bandwidth problem. Systems Sci Math Sci, 1994, 7: 282–288

6 Hromkovic J, Muller V, Sykora O, et al. On embeddings in cycles. Inform and Comput, 1995, 118: 302–305

7 Lin Y. Minimum bandwidth problem for embedding graphs in cycles. Networks, 1997, 29: 135–140

8 Lin Y. Two-dimensional bandwidth problem. In: Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications. Singapore: World Scientific, 1994, 223–232

9 Lin L, Lin Y. Two models of two-dimensional bandwidth problems. Inform Process Lett, 2010, 110: 469–473

10 Bezrukov S L, Chavez J D, Harper L H, et al. The congestion of n-cube layout on a rectangular grid. Discrete Math, 2000, 213: 13–19

11 Lin L, Lin Y, West D B. Cutwidth of triangular grids. Discrete Math, 2014, 331: 89–92

12 Hromkovic J, Müller V, Sykora O, et al. On embedding interconnection networks into rings of processors. In: Lecture Notes in Computer Science, vol. 605. Berlin: Springer, 1992, 53–62

13 Chavez J D, Trapp R. The cyclic cutwidth of trees. Discrete Appl Math, 1998, 87: 25–32

14 Bienstock D. On embedding graphs in trees. J Combin Theory Ser B, 1990, 49: 103–136

15 Peleg D, Ullman J D. An optimal synchronizer for the hypercube. SIAM J Comput, 1989, 18: 740–747

16 Liebchen C, Wünsch G. The zoo of tree spanner problems. Discrete Appl Math, 2008, 156: 569–587

17 Ostrovskii M I. Minimal congestion trees. Discrete Math, 2004, 285: 219–226

18 Cai L, Corneil D G. Tree spanners. SIAM J Discrete Math, 1995, 8: 359–387

19 Brandstädt A, Dragan F F, Le H O, et al. Tree spanners on chordal graphs: Complexity and algorithms. Theory Comput Sci, 2004, 310: 329–354

20 Brandstädt A, Dragan F F, Le H O, et al. Tree spanners for bipartite graphs and probe interval graphs. Algorithmica, 2007, 47: 27–51

21 Fekete S P, Kremer J. Tree spanners in planar graphs. Discrete Appl Math, 2001, 108: 85–103

22 Okamoto Y, Otachi Y, Uehara R, et al. Hardness results and an exact exponential algorithm for the spanning tree congestion problem. J Graph Algorithms Appl, 2011, 15: 727–751

23 Fomin F V, Golovach P A, van Leeuwen E J. Spanners of bounded degree graphs. Inform Process Lett, 2011, 111: 142–144
24 Bodlaender H L, Fomin F V, Golovach P A, et al. Parameterized complexity of the spanning tree congestion problem. Algorithmica, 2012, 64: 85–111
25 Madanlal M S, Venkatesan G, Rangan C P. Tree 3-spanners on interval, permutation and regular bipartite graphs. Inform Process Lett, 1996, 59: 97–102
26 Le H O, Le V B. Optimal tree 3-spanners in directed path graphs. Networks, 1999, 34: 81–87
27 Hruska S W. On tree congestion of graphs. Discrete Math, 2008, 308: 1801–1809
28 Castejón A, Ostrovskii M I. Minimum congestion spanning trees of grids and discrete toruses. Discuss Math Graph Theory, 2009, 29: 511–519
29 Kozawa K, Otachi Y, Yamazaki K. On spanning tree congestion of graphs. Discrete Math, 2009, 309: 4215–4224
30 Hunter R. On spanning tree congestion of product graphs. CiteSeerX, 2007, doi: CiteSeerX.psu:10.1.1.385.3594
31 Ostrovskii M I. Minimum congestion spanning trees in planar graphs. Discrete Math, 2010, 310: 1204–1209
32 Kozawa K, Otachi Y. Spanning tree congestion of rook's graphs. Discuss Math Graph Theory, 2011, 31: 753–761
33 Bodlaender H L, Kozawa K, Matsushima T, et al. Spanning tree congestion of k-outerplanar graphs. Discrete Math, 2011, 311: 1040–1045
34 Bondy J A. Trigraphs. Discrete Math, 1989, 75: 69–79
35 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2008
36 Hassin R, Tamir A. On the minimum diameter spanning tree problem. Inform Process Lett, 1995, 53: 109–111
37 Golumbic M C. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs. New York: Academic Press, 1980
38 Bodlaender H L. A tourist guide through treewidth. Acta Cybernet, 1993, 11: 1–21
39 Bodlaender H L. A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth. Theory Comput Sci, 1998, 209: 1–45
40 Harper L H. Global Methods for Combinatorial Isoperimetric Problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

Optimization of spanning tree stretch and congestion for graphs

Yixun Lin

Abstract In spanning tree optimization of graphs, there are two important criteria, namely, dilation (stretch) and congestion. This gives rise to two combinatorial optimization problems as follows. The minimum stretch spanning tree problem is to find a spanning tree of a graph such that the maximum distance of all embedded edges in the tree is minimized. The minimum congestion spanning tree problem is to find a spanning tree of a graph such that the maximum number of overlapped edges for all embedded edges in the tree is minimized. These problems bring us two graph-theoretic parameters, tree stretch and tree congestion. In this paper we mainly study the structural properties of tree stretch and tree congestion, including the duality of fundamental cycle and fundamental cocycle, extremal property, lower and upper bounds, optimality characterization, and optimal value computation.

Keywords **spanning tree optimization, dilation, congestion, fundamental cycle, fundamental cocycle**

MSC(2010) **90C27, 05C35, 05C05**

doi: 10.1360/SSM-2019-0266