非定常扩散方程基于调和平均点插值的有限体积格式

张海成¹, 单丽^{2*}

1. 辽宁工程技术大学理学院, 阜新 123000;

2. 汕头大学理学院数学系, 汕头 515063

E-mail: zhanghaicheng96@gmail.com, lishan@stu.edu.cn

收稿日期: 2020-08-18; 接受日期: 2021-05-06; 网络出版日期: 2021-11-09; * 通信作者

辽宁省教育厅科学研究基金 (批准号: LJ2020JCL009) 和汕头大学科研启动基金 (批准号: NTF21006) 资助项目

摘要 本文研究非定常扩散方程适用于扭曲和非结构网格的单元中心型的有限体积格式. 在网格边上离散法向流时, 选取当前网格边及与其相邻网格边上的调和平均点作为辅助插值点, 通过它们与单元中心点不同的组合形式给出 4 类法向流的离散近似, 最后通过调和平均点的两点插值算法, 将其替换成相邻单元的中心未知量, 进而建立 4 种单元中心型有限体积格式. 时间导数项采用向后 Euler 格式进行离散. 该格式具有模板小、易实现的优点, 满足局部守恒和二阶收敛的特性. 在一定网格假设前提下, 理论上证明了算法的稳定性和收敛性. 数值上考虑扩散系数是连续的、间断的、各向异性的甚至依赖于未知量是非线性的等情形, 分别在非结构三角形、四边形和多边形网格上进行求解. 结果表明, 前两种算法对不同网格不同类型扩散系数问题上的鲁棒性更好, L^2 误差均可达到二阶收敛, H^1 误差接近一阶甚至高于一阶收敛; 后两种算法对网格的依赖性更强.

关键词 有限体积法 非定常扩散方程 非结构网格 线性精确 调和平均点

MSC (2020) 主题分类 65N08, 65M06

1 引言

考虑如下非定常扩散方程:

$$u_t - \nabla \cdot (\Lambda \nabla u) = f(\mathbf{x}, t), \quad \text{在 } \Omega \times (0, T] \text{ 内}, \quad (1.1)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \quad \text{在 } \partial\Omega \times (0, T] \text{ 内}, \quad (1.2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (1.3)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为平面上有界单连通多边形区域, $\Lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 是任意的对称正定扩散张量, $f \in L^2(\Omega)$ 为源项, g 是在 $\partial\Omega$ 上给定的适定光滑的函数. 扩散问题在受控约束核聚变、晶体热性质和油藏模拟

英文引用格式: Zhang H C, Shan L. Finite volume schemes of evolutionary diffusion equations based on harmonic averaging interpolation (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 969–988, doi: 10.1360/SSM-2020-0262

等领域有着广泛的应用. 为了增强其数值方法对网格的适应性, 减少网格重分的次数, 降低数值耗散, 直接在非结构的或者扭曲的网格上构造扩散问题的较高精度的稳健离散格式是具有重要意义的研究课题.

有限体积法适用于结构和非结构网格, 因其具有保持数值通量的局部守恒性、计算量足够小、易于编程等优点, 被广泛应用于许多实际问题的数值模拟. 近年来, 科研工作者针对扩散方程提出了多种适用于扭曲网格或者非结构网格的离散格式, 如单调格式 (或称保正格式) [1-7]. 单调性是保证扩散方程离散格式稳健性的重要性质之一. 线性精确作为一种在扭曲网格上构造扩散方程高精度有限体积格式的启示性新途径, 它要求当扩散方程的解析解是关于其自变量的线性函数并且扩散系数是常值时, 格式中所有的离散步骤都是精确成立的 [8-11]. 这些格式大致分为单元中心型格式、网格节点型格式和杂交格式, 其中单元中心型格式是指在每个单元上只有单元中心未知量, 具有计算量小、易实现等优点. 一个好的单元中心型格式应当具有紧凑的计算模板、满足局部守恒条件、保证二阶收敛精度、适用于任意多边形网格等特性. Wu 等 [8] 在线性精确意义下, 通过网格节点信息离散网格边上的法向流, 再将节点信息用其周围单元中心点信息进行相应的加权代换, 最终构造出 3 种不同的单元中心型有限体积格式, 其中采用双线性插值加权方式的数值格式是线性精确的, 但其计算网格局限于四边形. 调和平均点是构造网格边上法向流近似的另一个重要途径, 该概念最早是由法国学者 Agelas 等 [12] 提出的. 调和平均点的引入不但简化了辅助未知量用单元中心未知量加权代换的过程, 而且保证了法向流采用小模板离散的优点. Wu 等 [10] 及 Gao 和 Wu [13] 将调和平均点作为网格边上的辅助插值点, 构造任意多边形网格上扩散问题的单元中心型有限体积算法. 2015 年, Luo 等 [14] 针对定常的扩散问题, 利用网格边上定义的调和平均点, 在线性精确的意义下, 构造了 3 种单元中心型有限体积格式, 该格式在扭曲的多边形网格上均具有二阶精度, 同时适用于任意多边形网格.

本文考虑非定常扩散方程的有限体积格式. 在网格边上离散法向流时, 选择其所在网格单元上的 3 个调和平均点作为辅助插值点. 利用这些辅助插值点和单元中心点构造法向流的逼近格式, 将它们分为 4 类进行讨论, 每一类逼近格式都是类似甚至等价的. 文献 [14] 针对定常扩散问题构造的离散方法属于其中的特殊情形. 最后利用调和平均点的两点插值算法, 将辅助插值点未知量替换成单元中心未知量, 最终构建出 4 种只含单元中心未知量的有限体积格式. 我们在 2 种扭曲四边形网格、3 种非结构三角形网格和 2 种多边形网格上, 通过数值实验, 验证构造的 4 种算法的精度, 并进行比较. 本文第 2 节具体介绍新有限体积格式的构造过程; 第 3 和 4 节分别给出算法的稳定性分析和误差估计; 第 5 节通过 4 个数值算例来验证格式的收敛性和鲁棒性; 最后在第 6 节给出结论.

2 多边形网格上的有限体积格式

首先将区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 剖分为有限个互不重叠的凸多边形网格单元, 记为 $\mathcal{D} = \{\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mathcal{O}, \mathcal{P}\}$, 其中

- $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, \dots\}$ 是由所有网格单元组成的集合. ∂A 表示单元 A 的边界. S_A 表示单元 A 的面积. h_A 表示单元 A 的直径, 即凸多边形单元 A 上相距最远的两点之间的距离. 将 $h = \max_{A \in \mathcal{M}} \{h_A\}$ 定义为网格尺寸.

- $\mathcal{B} = \{\sigma, \sigma', \dots\}$ 是由所有网格边组成的集合. $|\sigma|$ 表示网格边 σ 的长度. $\mathcal{B}^{\text{int}} = \mathcal{B} \cap \Omega$ 表示内部网格边的集合, $\mathcal{B}^{\text{ext}} = \mathcal{B} \cap \partial\Omega$ 表示边界网格边的集合. $\mathbf{n}_{A,\sigma}$ 和 $\mathbf{t}_{A,\sigma}$ 分别表示单元 A 中第 σ 条边的单位外法向量和切向量, 方向规定为单元边界 ∂A 的逆时针方向.

- $\mathcal{O} = \{\mathbf{O}_A, A \in \mathcal{M}\}$ 是由网格单元的中心点构成的集合. $d_{A,\sigma}$ 表示网格单元 A 的中心距网格边

σ 的垂直距离.

• $\mathcal{P} = \bigcup_{A \in \mathcal{M}} \mathcal{P}_A$, 其中 $\mathcal{P}_A = \{\mathcal{P}_1^A, \mathcal{P}_2^A, \dots, \mathcal{P}_{n_A}^A\}$ 表示单元 A 上的插值点, n_A 表示单元 A 上插值点个数, 本文规定插值点按照逆时针进行排序.

其次, 将时间区间 $(0, T]$ 等分成 N 份, 每个时间节点记为 $t^0, t^1, \dots, t^N$, 时间步长为 Δt . 记 $\mathbf{F} = -\Lambda(\mathbf{x}, t) \nabla u$ 表示热流, 则非定常扩散方程 (1.1) 等价于

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = f(\mathbf{x}, t), \quad \text{在 } \Omega \times (0, T] \text{ 内.} \quad (2.1)$$

在 $t = t^{n+1}$ 时刻, 将非定常扩散方程 (1.1) 在网格单元 A 上进行积分, 由 Gauss 散度定理得

$$\int_A u_t(\mathbf{x}, t^{n+1}) d\mathbf{x} + \sum_{\sigma \in \partial A} \mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1} = \int_A f(\mathbf{x}, t^{n+1}) d\mathbf{x}, \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad (2.2)$$

其中网格边 σ 上的法向流通量 $\mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1}$ 定义如下:

$$\mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1} \triangleq \int_{\sigma} \mathbf{F}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{A,\sigma} ds = - \int_{\sigma} \nabla u \cdot \Lambda_A^T \mathbf{n}_{A,\sigma} ds. \quad (2.3)$$

值得注意的是, 如果边 σ 是两个网格单元 A 和 B 的公共边, 则有如下局部守恒方程:

$$\mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1} + \mathcal{F}_{B,\sigma}^{n+1} = 0. \quad (2.4)$$

利用该网格中心值离散 (2.2) 中的右端源项, 左端的时间导数项在 (t^n, t^{n+1}) 上采用向后 Euler 格式进行离散, 得到如下非定常扩散方程的有限体积格式:

$$\frac{U_A^{n+1} - U_A^n}{\Delta t} \mathcal{S}_A + \sum_{\sigma \in \partial A} \tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1} = f_A^{n+1} \mathcal{S}_A, \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad (2.5)$$

$$U_P^{n+1} = g_P^{n+1}, \quad \forall P \in \partial\Omega, \quad (2.6)$$

$$U_A^0 = \varphi_A, \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad (2.7)$$

其中 $U_A^{n+1} = U(\mathbf{O}_A, t^{n+1})$ 表示未知量 u 在单元 A 的中心 $\mathbf{O}_A$ 处、 t^{n+1} 时刻的数值解, $\tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1}$ 表示网格边上法向流 $\mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1}$ 的近似. 下面详细推导 $\tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1}$ 的表达式, 这是有限体积格式构造的核心.

首先, 确定网格单元 A 的中心和网格单元边上的辅助插值点. 网格单元中心 $\mathbf{O}_A$ 选为多边形单元 A 的重心, 单元边上的辅助插值点选择当前网格边 σ 和与之相邻的两个网格边上的调和平均点, 记为 $\mathcal{P}_{\sigma}^A$ 、 $\mathcal{P}_{\sigma-1}^A$ 和 $\mathcal{P}_{\sigma+1}^A$. 具体定义如下: 若 $\sigma \in \mathcal{B}^{\text{ext}}$, 则调和平均点 $\mathcal{P}_{\sigma}^A$ 选为边 σ 的中点; 若 $\sigma \in \mathcal{B}^{\text{int}}$, 则

$$\mathcal{P}_{\sigma}^A = \frac{a_{A,\sigma} \mathbf{O}_A + a_{B,\sigma} \mathbf{O}_B + (\Lambda_A^T - \Lambda_B^T) \mathbf{n}_{A,\sigma}}{a_{A,\sigma} + a_{B,\sigma}}, \quad (2.8)$$

其中

$$a_{A,\sigma} = \frac{\lambda_A}{d_{A,\sigma}}, \quad a_{B,\sigma} = \frac{\lambda_B}{d_{B,\sigma}}, \quad \lambda_A = \mathbf{n}_{A,\sigma}^T \Lambda_A \mathbf{n}_{A,\sigma}, \quad \lambda_B = \mathbf{n}_{B,\sigma}^T \Lambda_B \mathbf{n}_{B,\sigma}. \quad (2.9)$$

假定如下条件成立:

(A_σ) 对于任意 $\sigma \in \mathcal{B}^{\text{int}}$, 其两侧单元 A 和 B 分别是关于 $\mathbf{O}_A$ 和 $\mathbf{O}_B$ 的星形区域, 且 $\mathcal{P}_{\sigma}^A \in \bar{\sigma}$, 则 (2.8) 定义的 $\mathcal{P}_{\sigma}^A$ 与文献 [12] 提出的调和平均点是重合的, 且在线性精确意义下满足如下性质 (参见文献 [10, 13, 14]):

$$u(\mathcal{P}_{\sigma}^A) \simeq \frac{a_{A,\sigma} u(\mathbf{O}_A) + a_{B,\sigma} u(\mathbf{O}_B)}{a_{A,\sigma} + a_{B,\sigma}}. \quad (2.10)$$

由 (A_σ) 知, 对于 $\sigma \in \mathcal{B}^{\text{int}}$, 有

$$(\mathcal{P}_\sigma^A - O_A) \cdot \mathbf{n}_{A,\sigma} = d_{A,\sigma}. \quad (2.11)$$

由 (2.9) 和 (2.11) 知,

$$a_{A,\sigma}(\mathcal{P}_\sigma^A - O_A) \cdot \mathbf{n}_{A,\sigma} = a_{A,\sigma}d_{A,\sigma} = \lambda_A = \mathbf{n}_{A,\sigma}^T \Lambda_A \mathbf{n}_{A,\sigma} = \Lambda_A^T \mathbf{n}_{A,\sigma} \cdot \mathbf{n}_{A,\sigma}.$$

因此, 向量 $\Lambda_A^T \mathbf{n}_{A,\sigma}$ 可以进行如下分解:

$$\Lambda_A^T \mathbf{n}_{A,\sigma} = a_{A,\sigma}(\mathcal{P}_\sigma^A - O_A) + b_{A,\sigma} \mathbf{t}_{A,\sigma}, \quad (2.12)$$

其中

$$b_{A,\sigma} = \mathbf{t}_{A,\sigma}^T (\Lambda_A^T \mathbf{n}_{A,\sigma} - a_{A,\sigma}(\mathcal{P}_\sigma^A - O_A)).$$

利用 3 个插值点 $\mathcal{P}_{\sigma-1}^A$ 、 $\mathcal{P}_\sigma^A$ 和 $\mathcal{P}_{\sigma+1}^A$ 以及单元中心点 O_A 对切向量 $\mathbf{t}_{A,\sigma}$ 进行分解, 本文给出如下 4 类分解方式:

第一类分解方式, 将切向量用三角形 $\triangle \mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_\sigma^A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A$ 中任意两个向量表示, 如图 1 所示.

对应图 1 中分解方式一^[14], 切向量可表示如下:

$$\mathbf{t}_{A,\sigma} = \alpha_{A,\sigma}^{(1)}(\mathcal{P}_{\sigma-1}^A - \mathcal{P}_\sigma^A) + \beta_{A,\sigma}^{(1)}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_\sigma^A), \quad (2.13)$$

其中

$$\alpha_{A,\sigma}^{(1)} = -\frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_\sigma^A)}{2S_{\Delta \mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_\sigma^A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A}}, \quad \beta_{A,\sigma}^{(1)} = \frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma-1}^A - \mathcal{P}_\sigma^A)}{2S_{\Delta \mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_\sigma^A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A}}, \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对应图 1 中分解方式二, 切向量可表示如下:

$$\mathbf{t}_{A,\sigma} = \alpha_{A,\sigma}^{(2)}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A) + \beta_{A,\sigma}^{(2)}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_\sigma^A), \quad (2.14)$$

其中

$$\alpha_{A,\sigma}^{(2)} = \frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_\sigma^A)}{2S_{\Delta \mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_\sigma^A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A}}, \quad \beta_{A,\sigma}^{(2)} = -\frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A)}{2S_{\Delta \mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_\sigma^A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A}}.$$

图 1 切向量的第一类分解方式

对应图 1 中分解方式三, 切向量可表示为

$$\mathbf{t}_{A,\sigma} = \alpha_{A,\sigma}^{(3)}(\mathcal{P}_{\sigma}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A) + \beta_{A,\sigma}^{(3)}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A), \quad (2.15)$$

其中

$$\alpha_{A,\sigma}^{(3)} = \frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A)}{2S_{\Delta \mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_{\sigma}^A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A}}, \quad \beta_{A,\sigma}^{(3)} = -\frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A)}{2S_{\Delta \mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_{\sigma}^A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A}}.$$

不难验证, 这 3 种方式是可以相互转换的.

第二类分解方式, 将切向量用 $\overrightarrow{O_A \mathcal{P}_{\sigma}^A}$ 和 $\overrightarrow{\mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A}$ 两个向量表示, 如图 2 所示. 对应的切向量表达式为 (参见文献 [14])

$$\mathbf{t}_{A,\sigma} = \alpha_{A,\sigma}^{(4)}(\mathcal{P}_{\sigma}^A - O_A) + \beta_{A,\sigma}^{(4)}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A), \quad (2.16)$$

其中

$$\alpha_{A,\sigma}^{(4)} = \frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A)}{(\mathcal{P}_{\sigma}^A - O_A)^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A)}, \quad \beta_{A,\sigma}^{(4)} = -\frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma}^A - O_A)}{(\mathcal{P}_{\sigma}^A - O_A)^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A)}.$$

第三类分解方式, 将切向量用三角形 $\Delta \mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A O_A$ 中任意两个向量表示, 如图 3 所示. 与第一类分解方式相同, 图 3 中的 3 种分解方式是等价的. 以图 3 中方式二为例, 切向量可表示为

$$\mathbf{t}_{A,\sigma} = \alpha_{A,\sigma}^{(5)}(\mathcal{P}_{\sigma-1}^A - O_A) + \beta_{A,\sigma}^{(5)}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - O_A), \quad (2.17)$$

其中

$$\alpha_{A,\sigma}^{(5)} = -\frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - O_A)}{2S_{\Delta \mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A O_A}}, \quad \beta_{A,\sigma}^{(5)} = \frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma-1}^A - O_A)}{2S_{\Delta \mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A O_A}}.$$

图 2 切向量的第二类分解方式

图 3 切向量的第三类分解方式

上式中给出的系数定义结合图 3 中所示的情形, 不难发现, 当点 $\mathcal{P}_{\sigma-1}^A$ 、点 $\mathcal{P}_{\sigma+1}^A$ 和点 O_A 位于同一直线上时 (如结构四边形网格), 其三者构成的三角形面积 (即系数的分母) 为 0, 则 (2.17) 给出的分解方式无意义, 因此第三类分解方式依赖于网格的情形.

第四类分解方式, 将切向量用向量 $\overrightarrow{O_A \mathcal{P}_{\sigma+1}^A}$ 和 $\overrightarrow{\mathcal{P}_{\sigma-1}^A \mathcal{P}_{\sigma}^A}$ 或者用 $\overrightarrow{O_A \mathcal{P}_{\sigma-1}^A}$ 和 $\overrightarrow{\mathcal{P}_{\sigma+1}^A \mathcal{P}_{\sigma}^A}$ 表示, 如图 4 所示. 以方式一为例, 切向量可分解为

$$\mathbf{t}_{A,\sigma} = \alpha_{A,\sigma}^{(6)} (\mathcal{P}_{\sigma}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A) + \beta_{A,\sigma}^{(6)} (\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - O_A), \quad (2.18)$$

其中

$$\alpha_{A,\sigma}^{(6)} = \frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - O_A)}{(\mathcal{P}_{\sigma}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A)^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - O_A)}, \quad \beta_{A,\sigma}^{(6)} = -\frac{\mathbf{t}_{A,\sigma}^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A)}{(\mathcal{P}_{\sigma}^A - \mathcal{P}_{\sigma-1}^A)^T \mathcal{R}(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - O_A)}.$$

从图 4 中不难发现, 两种方式中的两个向量一旦平行或者接近平行时 (如四边形网格), 上式给出的系数的分母就是 0 或者非常接近 0, 这时对应的分解方式会失效, 因此此类分解方式受网格的影响较大. 图 4 中的分解方式二也有类似的结论.

注 2.1 本文列出了 4 类不同的切向量分解方式, 前两类分解方式对于任意多边形网格都是适用的; 后两类分解方式对于三角形网格是适用的; 对于其他网格, 则因网格形状而异.

为了构建向量 $|\sigma| \Lambda_A^T \mathbf{n}_{A,\sigma}$ 的统一分解模板, 在每一类切向量分解方式中选择一种, 代入到 (2.12) 中, 均可得到如下形式的分解模板:

$$|\sigma| \Lambda_A^T \mathbf{n}_{A,\sigma} = a_{\sigma,\sigma-1}^A (\mathcal{P}_{\sigma-1}^A - O_A) + a_{\sigma,\sigma}^A (\mathcal{P}_{\sigma}^A - O_A) + a_{\sigma,\sigma+1}^A (\mathcal{P}_{\sigma+1}^A - O_A). \quad (2.19)$$

不同的分解方式, 只是右端项系数不同而已, 如图 5 所示. 若采用第一类分解方式 (2.13), 则

图 4 切向量的第四类分解方式

图 5 法向流的单侧逼近

$$\begin{aligned}
a_{\sigma,\sigma-1}^A &= |\sigma| b_{A,\sigma} \alpha_{A,\sigma}^{(1)}, \\
a_{\sigma,\sigma}^A &= |\sigma| (a_{A,\sigma} - b_{A,\sigma} (\alpha_{A,\sigma}^{(1)} + \beta_{A,\sigma}^{(1)})), \\
a_{\sigma,\sigma+1}^A &= |\sigma| b_{A,\sigma} \beta_{A,\sigma}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

若采用第二类分解方式 (2.16), 则

$$\begin{aligned}
a_{\sigma,\sigma-1}^A &= -|\sigma| b_{A,\sigma} \beta_{A,\sigma}^{(4)}, \\
a_{\sigma,\sigma}^A &= |\sigma| (a_{A,\sigma} + b_{A,\sigma} \alpha_{A,\sigma}^{(4)}), \\
a_{\sigma,\sigma+1}^A &= |\sigma| b_{A,\sigma} \beta_{A,\sigma}^{(4)}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

若采用第三类分解方式 (2.17), 则

$$\begin{aligned}
a_{\sigma,\sigma-1}^A &= |\sigma| b_{A,\sigma} \beta_{A,\sigma}^{(5)}, \\
a_{\sigma,\sigma}^A &= |\sigma| a_{A,\sigma}, \\
a_{\sigma,\sigma+1}^A &= |\sigma| b_{A,\sigma} \alpha_{A,\sigma}^{(5)}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

若采用第四类分解方式 (2.18), 则

$$\begin{aligned}
a_{\sigma,\sigma-1}^A &= -|\sigma| b_{A,\sigma} \alpha_{A,\sigma}^{(6)}, \\
a_{\sigma,\sigma}^A &= |\sigma| (a_{A,\sigma} + b_{A,\sigma} \alpha_{A,\sigma}^{(6)}), \\
a_{\sigma,\sigma+1}^A &= |\sigma| b_{A,\sigma} \beta_{A,\sigma}^{(6)}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

进一步在 (2.19) 两端同乘以 $-\nabla u$, 结合 $\nabla u \cdot (\Lambda_A^T \mathbf{n}_{A,\sigma}) = \Lambda_A \nabla u \cdot \mathbf{n}_{A,\sigma}$, 得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1} &\simeq a_{\sigma,\sigma-1}^A (u(\mathbf{O}_A) - u(\mathcal{P}_{\sigma-1}^A)) + a_{\sigma,\sigma}^A (u(\mathbf{O}_A) - u(\mathcal{P}_\sigma^A)) \\
&\quad + a_{\sigma,\sigma+1}^A (u(\mathbf{O}_A) - u(\mathcal{P}_{\sigma+1}^A)).
\end{aligned}$$

由此得到法向流的单侧逼近

$$F_{A,\sigma}^{n+1} = a_{\sigma,\sigma-1}^A (U_A^{n+1} - U_{A,\sigma,\sigma-1}^{n+1}) + a_{\sigma,\sigma}^A (U_A^{n+1} - U_{A,\sigma,\sigma}^{n+1}) + a_{\sigma,\sigma+1}^A (U_A^{n+1} - U_{A,\sigma,\sigma+1}^{n+1}), \tag{2.24}$$

其中 U_A^{n+1} 、 $U_{A,\sigma,\sigma-1}^{n+1}$ 、 $U_{A,\sigma,\sigma}^{n+1}$ 和 $U_{A,\sigma,\sigma+1}^{n+1}$ 分别代表 u 在 t^{n+1} 时刻在点 $\mathbf{O}_A$ 、 $\mathcal{P}_{\sigma-1}^A$ 、 $\mathcal{P}_\sigma^A$ 和 $\mathcal{P}_{\sigma+1}^A$ 处的近似值, 系数可在 (2.20)–(2.23) 中任选其一.

当 $\sigma \in \mathcal{B}^{\text{int}}$ 时, 利用法向流的单侧逼近格式构造过程, 可以得到 $F_{A,\sigma}^{n+1}$ 和 $F_{B,\sigma}^{n+1}$, 选取适当的非负参数 $\mu_{A,\sigma}$ 和 $\mu_{B,\sigma}$, 可以得到如下法向流的双侧逼近公式:

$$\tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1} = \mu_{A,\sigma} F_{A,\sigma}^{n+1} - \mu_{B,\sigma} F_{B,\sigma}^{n+1}, \quad \tilde{F}_{B,\sigma}^{n+1} = \mu_{B,\sigma} F_{B,\sigma}^{n+1} - \mu_{A,\sigma} F_{A,\sigma}^{n+1}, \tag{2.25}$$

其中

$$\mu_{A,\sigma} + \mu_{B,\sigma} = 1.$$

本文采用如下线性组合系数:

$$\mu_{A,\sigma} = \frac{a_{B,\sigma}}{a_{A,\sigma} + a_{B,\sigma}}, \quad \mu_{B,\sigma} = \frac{a_{A,\sigma}}{a_{A,\sigma} + a_{B,\sigma}}. \tag{2.26}$$

容易验证, (2.25) 给出的近似公式满足局部守恒型性质:

$$\tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1} + \tilde{F}_{B,\sigma}^{n+1} = 0. \quad (2.27)$$

当 $\sigma \in \mathcal{B}^{\text{ext}}$ 时,

$$\tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1} = F_{A,\sigma}^{n+1}, \quad \text{即 } \mu_{A,\sigma} = 1. \quad (2.28)$$

最后, 为了构造单元中心型有限体积格式, 需要将所有网格边上的法向流逼近公式中所包含的调和平均点处的未知量用其两侧的单元中心未知量, 通过 (2.10) 来进行替换. 如果调和平均点位于区域边界上, 则直接利用边界条件赋值即可.

3 稳定性分析

3.1 预备知识

首先, 引入如下符号 (参见文献 [10]).

- $X(\mathcal{M})$ 表示在 $\mathcal{M}$ 中每个网格单元上取常数的离散函数空间.
 - $\mathbb{Q}_A$ 表示 $n_A \times n_A$ 的对角阵, 其第 σ 个对角线元素为 $\frac{|\sigma|}{d_\sigma}$, 当 $\sigma \in \partial A \cap \partial B$ 时, $d_\sigma = d_{A,\sigma} + d_{B,\sigma}$; 当 $\sigma \in \partial A \in \mathcal{B}^{\text{ext}}$ 时, $d_\sigma = d_{A,\sigma}$.
 - $\mathbb{M}_A$ 表示 $n_A \times n_A$ 的对角阵, 其第 σ 个对角线元素为 $m_{\sigma\sigma} = \mu_{A,\sigma}$.
 - $\mathbb{D}_A$ 表示 $n_A \times n_A$ 的单元矩阵.
 - $\mathbf{I}_A$ 表示元素均为 1 的 n_A 维列向量.
 - $\mathbf{U}_A^{c,n+1}$ 表示 n_A 维的列向量, 其第 σ 个分量为 U_B^{n+1} , 若 $\sigma = \partial A \cap \partial B$; 若 $\sigma \in \mathcal{B}^{\text{ext}}$, 则取 0.
- 另外, 对于 $U_{\mathcal{M}} = \{U_A, A \in \mathcal{M}\} \in X(\mathcal{M})$, 定义如下两个离散范数:
- 离散的 L^2 范数

$$\|U_{\mathcal{M}}\|_{0,\mathcal{M}} = \left(\sum_{A \in \mathcal{M}} U_A^2 \mathcal{S}_A \right)^{1/2} = \|U_{\mathcal{M}}\|_{0,\Omega}, \quad (3.1)$$

其中 $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ 表示标准的 L^2 范数.

- 离散的 H^1 范数

$$\|U_{\mathcal{M}}\|_{1,\mathcal{M}} = \left(\sum_{A \in \mathcal{M}} \|\mathbb{Q}_A^{1/2}(U_A \mathbf{I}_A - \mathbf{U}_A^c)\|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.2)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclid 向量范数.

为了得到格式的稳定性, 需要引入如下 3 个假设:

(A1) 对于有限体积离散 $\mathcal{D} = \{\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mathcal{O}, \mathcal{P}\}$, 存在常数 α 、 β 和 γ , 满足

$$\mathcal{S}_A \geq \alpha h^2, \quad n_A \leq \gamma, \quad \forall A \in \mathcal{M} \quad \text{且} \quad |\sigma| \geq \beta h, \quad \forall \sigma \in \mathcal{B}.$$

(A2) 存在与单元 A 、边 σ 和 h 无关的两个正常数 $\underline{q}$ 和 $\bar{q}$, 满足

$$\underline{q} \leq \frac{|\sigma|}{d_\sigma} \leq \bar{q}, \quad \forall \sigma \in \partial A, \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

(A3) $\mathbb{D}_A$ 的对称部分 $(\mathbb{D}_A + \mathbb{D}_A^T)/2$ 是正定的, 即存在一个正常数 σ_A , 满足

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^T (\mathbb{D}_A + \mathbb{D}_A^T) \mathbf{v} \geq \sigma_A \|\mathbf{v}\|^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_A}, \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

引理 3.1 (离散的 Gronwall 不等式^[15]) 令 $w^n \geq 0$ 为定义于 $\{t^n \mid n = 0, 1, \dots, N\}$ 上的离散函数, 且满足

$$w^n - w^{n-1} \leq \check{A} w^n \Delta t + \check{B} w^{n-1} \Delta t + \check{C}_n \Delta t, \quad n = 1, \dots, N,$$

其中 $\check{A}$ 、 $\check{B}$ 和 $\check{C}_n$ 为非负常数, $N\Delta t = T$, 则

$$w^n \leq \left(w^0 + \sum_{k=1}^N \check{C}_k \Delta t \right) e^{2(\check{A} + \check{B})T}, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

其中 Δt 使得 $(\check{A} + \check{B})\Delta t \leq \frac{N-1}{2N}$ ($N > 1$).

3.2 稳定性结论

为了叙述简便, 考虑原问题 (2.5)–(2.7) 具有齐次 Dirichlet 边界条件, 对于 $U_{\mathcal{M}}^{n+1} = \{U_A^{n+1}, A \in \mathcal{M}, n = 0, 1, \dots, N-1\} \in X(\mathcal{M})$, (2.24) 可写成如下向量形式:

$$\mathbf{F}_A^{n+1} = \mathbb{D}_A(U_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{U}_{A,i}^{n+1}), \quad (3.3)$$

其中 $\mathbf{F}_A^{n+1} = (F_{A,\sigma}^{n+1}, \sigma \in \partial A)^T$, $\mathbf{U}_{A,i}^{n+1} = (U_{A,1}^{n+1}, U_{A,2}^{n+1}, \dots, U_{A,n_A}^{n+1})^T$. 调和平均点的定义 (2.10) 向量形式为

$$\mathbf{U}_{A,i}^{n+1} = \mathbb{M}_A \mathbf{U}_A^{c,n+1} + U_A^{n+1} (\mathbf{I}_A - \mathbb{M}_A \mathbf{I}_A). \quad (3.4)$$

将 (3.4) 代入 (3.3) 中得到

$$\mathbf{F}_A^{n+1} = \mathbb{D}_A \mathbb{M}_A (U_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{U}_A^{c,n+1}). \quad (3.5)$$

定理 3.1 假设 (A1)、(A2) 和 (A3) 成立, 当 $\Delta t < \frac{1}{2}$ 时, 对于任意 $n = 0, 1, \dots, N-1$, 有

$$\|U_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{2\Delta t}{\bar{q}} \min_{\sigma \in \partial A, A \in \mathcal{M}} \{\sigma_A \mu_{A,\sigma}^2\} \|U_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{1,\mathcal{M}}^2 \leq e^{2T} \left(\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|f_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \|U_{\mathcal{M}}^0\|_{0,\Omega}^2 \right).$$

证明 在 (2.5) 的两侧同时乘以 U_A^{n+1} , 并对所有单元 A 求和, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Hölder 不等式估计右端项得

$$\frac{1}{2\Delta t} (\|U_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 - \|U_{\mathcal{M}}^n\|_{0,\Omega}^2) + \sum_{A \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \partial A} \tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1} U_A^{n+1} \leq \frac{1}{2} \|f_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|U_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2. \quad (3.6)$$

由 (2.25)、(2.28) 和 (3.5), 以及 (A3)、(A2) 和 (3.2) 知, 上式中左端第二项可估计为

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \partial A} \tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1} U_A^{n+1} &= \sum_{A \in \mathcal{M}} \left(\sum_{\sigma \in \partial A \cap \mathcal{B}^{\text{int}}} (U_A^{n+1} - U_B^{n+1}) \mu_{A,\sigma} F_{A,\sigma}^{n+1} + \sum_{\sigma \in \partial A \cap \mathcal{B}^{\text{ext}}} U_A^{n+1} \mu_{A,\sigma} F_{A,\sigma}^{n+1} \right) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{M}} (U_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{U}_A^{c,n+1})^T \mathbb{M}_A \mathbf{F}_A^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{A \in \mathcal{M}} (U_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{U}_A^{c,n+1})^T \mathbb{M}_A \mathbb{D}_A \mathbb{M}_A (U_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{U}_A^{c,n+1}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{A \in \mathcal{M}} (U_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{U}_A^{c,n+1})^T \mathbb{M}_A (\mathbb{D}_A + \mathbb{D}_A^T) \mathbb{M}_A (U_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{U}_A^{c,n+1}) \\
 &\geq \sigma_A \sum_{A \in \mathcal{M}} \|\mathbb{M}_A (U_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{U}_A^{c,n+1})\|^2 \\
 &\geq \frac{1}{\bar{q}} \min_{\sigma \in \partial A, A \in \mathcal{M}} \{\sigma_A \mu_{A,\sigma}^2\} \sum_{A \in \mathcal{M}} \|\mathbb{Q}_A^{1/2} (U_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{U}_A^{c,n+1})\|^2 \\
 &= \frac{1}{\bar{q}} \min_{\sigma \in \partial A, A \in \mathcal{M}} \{\sigma_A \mu_{A,\sigma}^2\} \|U_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{1,\mathcal{M}}^2.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

将 (3.7) 代入 (3.6), 所得不等式两端同时乘以 $2\Delta t$, 由离散的 Gronwall 不等式得, 当 $\Delta t < \frac{1}{2}$ 时, 对于任意 $n = 0, 1, \dots, N-1$, 有

$$\|U_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{2\Delta t}{\bar{q}} \min_{\sigma \in \partial A, A \in \mathcal{M}} \{\sigma_A \mu_{A,\sigma}^2\} \|U_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{1,\mathcal{M}}^2 \leq e^{2T} \left(\Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \|f_{\mathcal{M}}^{k+1}\|_{0,\Omega}^2 + \|U_{\mathcal{M}}^0\|_{0,\Omega}^2 \right). \tag{3.8}$$

证明完毕. $\square$

4 误差估计

假设非定常扩散问题 (1.1)–(1.3) 的解 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ($p > 2$), 定义如下插值算子^[10]:

$$\Pi_{\mathcal{M}} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow X(\mathcal{M}), \quad \Pi_{\mathcal{M}} u(\mathbf{x}, t^{n+1}) = u_A^{n+1}, \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

用 n_A 维向量 $\mathbf{R}_A^{n+1} = (R_{A,\sigma}^{n+1}, \sigma \in \partial A)^T$ 表示在 t^{n+1} 时刻单元 A 上所有边法向流的截断误差, 即

$$\mathbf{R}_A^{n+1} = \mathbb{D}_A \mathbb{M}_A (u_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \tilde{\mathbf{U}}_A^{c,n+1}) - \mathbf{F}_A^{\text{ext},n+1}, \tag{4.1}$$

其中 $\mathbf{F}_A^{\text{ext},n+1} = (\mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1}, \sigma \in \partial A)^T$ 表示在 t^{n+1} 时刻单元 A 上所有边上的法向通量构成的向量, $\tilde{\mathbf{U}}_A^{c,n+1}$ 表示 n_A 维列向量, 其第 σ 个分量为 u_B^{n+1} , 若 $\sigma = \partial A \cap \partial B$; 若 $\sigma \in \mathcal{B}^{\text{ext}}$, 则取 0. 另外引入如下假设条件:

(A4) 存在一个与网格无关的正常数 τ , 满足

$$\|\mathbb{D}_A \mathbf{v}\| \leq \tau \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_A}, \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

由文献 [10, 第 4 节] 的推导可知, 在 (A4) 成立的情形下, 截断误差向量 $\mathbf{R}_A^{n+1}$ 满足

$$\|\mathbf{R}_A^{n+1}\| \leq Ch^2. \tag{4.2}$$

为了估计投影与数值解之间的误差, 定义

$$\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1} = \{\varepsilon_A^{n+1}, A \in \mathcal{M}\} = \Pi_{\mathcal{M}} u(t^{n+1}) - U_{\mathcal{M}}^{n+1} \in X(\mathcal{M})$$

和 $\mathbf{E}_A^{c,n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_A^{c,n+1} - \mathbf{U}_A^{c,n+1}$, 则由 (4.1) 和 (3.5) 知,

$$\mathbb{D}_A \mathbb{M}_A (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1}) = \mathbf{F}_A^{\text{ext},n+1} - \mathbf{F}_A^{n+1} + \mathbf{R}_A^{n+1}. \tag{4.3}$$

定理 4.1 设 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ($p > 2$) 是具有齐次 Dirichlet 边界条件的非定常扩散问题 (1.1)–(1.3) 的解, $U_{\mathcal{M}}^{n+1} = \{U_A^{n+1}, A \in \mathcal{M}, n = 0, 1, \dots, N-1\} \in X(\mathcal{M})$ 是 (2.5)–(2.7) 的解, 设初始时刻的误差满足 $\|\varepsilon_{\mathcal{M}}^0\|_{0,\Omega} \leq ch$, 则在 (A $_{\sigma}$) 和 (A1)–(A4) 成立的条件下, 当 $\Delta t < \frac{1}{2}$ 时, 对于任意 $n = 0, 1, \dots, N-1$, 存在与 Δt 和 h 无关的常数 C , 使得

$$\|\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{\bar{q}} \min_{\sigma \in \partial A, A \in \mathcal{M}} \{\sigma_A \mu_{A,\sigma}^2\} \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{1,\mathcal{M}}^2 \leq C(\Delta t + h)^2. \quad (4.4)$$

证明 在 t^{n+1} 时刻, 将 (1.1) 在单元 A 上积分得

$$\frac{u_A^{n+1} - u_A^n}{\Delta t} \mathcal{S}_A + \sum_{\sigma \in \partial A} \mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1} = f_A^{n+1} \mathcal{S}_A + \int_A s_A^{n+1} d\mathbf{x}, \quad (4.5)$$

其中

$$s_A^{n+1} = (f(\mathbf{x}, t^{n+1}) - f_A^{n+1}) + \left(\frac{u_A^{n+1} - u_A^n}{\Delta t} - u_t(\mathbf{x}, t^{n+1}) \right). \quad (4.6)$$

不难验证

$$|s_A^{n+1}| \leq c(\Delta t + h). \quad (4.7)$$

用 (4.5) 减去 (2.5) 得误差方程

$$\frac{\varepsilon_A^{n+1} - \varepsilon_A^n}{\Delta t} \mathcal{S}_A + \sum_{\sigma \in \partial A} (\mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1} - \tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1}) = \int_A s_A^{n+1} d\mathbf{x}. \quad (4.8)$$

对 (4.8) 左右同乘以 ε_A^{n+1} , 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Hölder 不等式估计右端项, 并对所有单元 $A \in \mathcal{M}$ 进行求和得

$$\frac{1}{2\Delta t} (\|\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 - \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^n\|_{0,\Omega}^2) + \sum_{A \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \partial A} (\mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1} - \tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1}) \varepsilon_A^{n+1} \leq \frac{1}{2} \|s_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2. \quad (4.9)$$

与稳定性分析类似, 由 (2.25)、(2.28) 和 (4.3) 知, 上式中左端第二项等价于

$$\begin{aligned} & \sum_{A \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \partial A} (\mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1} - \tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1}) \varepsilon_A^{n+1} \\ &= \sum_{A \in \mathcal{M}} \left(\sum_{\sigma \in \partial A \cap \mathcal{B}^{\text{int}}} (\varepsilon_A^{n+1} - \varepsilon_B^{n+1}) \mu_{A,\sigma} (\mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1} - F_{A,\sigma}^{n+1}) + \sum_{\sigma \in \partial A \cap \mathcal{B}^{\text{ext}}} \varepsilon_A^{n+1} \mu_{A,\sigma} (\mathcal{F}_{A,\sigma}^{n+1} - \tilde{F}_{A,\sigma}^{n+1}) \right) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{M}} (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})^T \mathbb{M}_A (\mathbf{F}_A^{\text{ext},n+1} - \mathbf{F}_A^{n+1}) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{M}} (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})^T \mathbb{M}_A [\mathbb{D}_A \mathbb{M}_A (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1}) - \mathbf{R}_A^{n+1}] \\ &= \sum_{A \in \mathcal{M}} (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})^T \mathbb{M}_A \mathbb{D}_A \mathbb{M}_A (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1}) \\ &\quad - \sum_{A \in \mathcal{M}} (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})^T \mathbb{M}_A \mathbf{R}_A^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

将 (4.10) 代入到 (4.9) 得

$$\frac{1}{2\Delta t} (\|\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 - \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^n\|_{0,\Omega}^2) + \sum_{A \in \mathcal{M}} (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})^T \mathbb{M}_A \mathbb{D}_A \mathbb{M}_A (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})$$

$$\leq \frac{1}{2} \|s_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{A \in \mathcal{M}} (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})^T \mathbb{M}_A \mathbf{R}_A^{n+1}. \quad (4.11)$$

由假设 (A3) 知, (4.11) 左端第二项得

$$\sum_{A \in \mathcal{M}} (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})^T \mathbb{M}_A \mathbb{D}_A \mathbb{M}_A (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1}) \geq \sigma_A \sum_{A \in \mathcal{M}} \|\mathbb{M}_A (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})\|^2. \quad (4.12)$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Hölder 不等式估计 (4.11) 右端最后一项得

$$\sum_{A \in \mathcal{M}} (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})^T \mathbb{M}_A \mathbf{R}_A^{n+1} \leq \frac{\sigma_A}{2} \sum_{A \in \mathcal{M}} \|\mathbb{M}_A (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})\|^2 + \frac{1}{2\sigma_A} \sum_{A \in \mathcal{M}} \|\mathbf{R}_A^{n+1}\|^2. \quad (4.13)$$

将 (4.12) 和 (4.13) 代入到 (4.11) 得

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 - \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^n\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \sigma_A \sum_{A \in \mathcal{M}} \|\mathbb{M}_A (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})\|^2 \\ & \leq \Delta t \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \|s_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{\sigma_A} \sum_{A \in \mathcal{M}} \|\mathbf{R}_A^{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

由假设 (A2) 知,

$$\sigma_A \sum_{A \in \mathcal{M}} \|\mathbb{M}_A (\varepsilon_A^{n+1} \mathbf{I}_A - \mathbf{E}_A^{c,n+1})\|^2 \geq \frac{1}{\bar{q}} \min_{\sigma \in \partial A, A \in \mathcal{M}} \{\sigma_A \mu_{A,\sigma}^2\} \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{1,\mathcal{M}}^2. \quad (4.15)$$

最后利用离散的 Gronwall 不等式得, 当 $\Delta t < \frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{\bar{q}} \min_{\sigma \in \partial A, A \in \mathcal{M}} \{\sigma_A \mu_{A,\sigma}^2\} \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^{n+1}\|_{1,\mathcal{M}}^2 \\ & \leq e^{2T} \left(\Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \|s_{\mathcal{M}}^{k+1}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{\sigma_A} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{A \in \mathcal{M}} \|\mathbf{R}_A^{k+1}\|^2 + \|\varepsilon_{\mathcal{M}}^0\|_{0,\Omega}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

将 (4.2) 和 (4.7) 的估计代入上式, 即可得到结论. $\square$

5 数值算例

本节通过 4 个算例测试不同算法的精度并相互对比, 为方便起见, 表 1 中列出了本文构造的 4 种算法. 本节主要考察在 $T = 0.1$ 时刻, (3.1) 和 (3.2) 定义的 L^2 误差和 H^1 误差. 对尺寸分别为 h_1 和 h_2 的网格, 收敛阶按照下面公式计算:

$$\text{order} = \frac{\ln[\text{err}(h_2)/\text{err}(h_1)]}{\ln(h_2/h_1)}.$$

时间步长取 $\Delta t = h^2$.

表 1 数值算例中用到的格式

格式代号	算法描述
SSLPS-T1	式 (2.20) 结合式 (2.26)
SSLPS-T2	式 (2.21) 结合式 (2.26)
SSLPS-T3	式 (2.22) 结合式 (2.26)
SSLPS-T4	式 (2.23) 结合式 (2.26)

算例 5.1 在单位正方形区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上, 考虑如下具有连续扩散系数的非定常扩散问题:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= -2\pi^2 e^{-\pi^2 t}, \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(x, y, t) &= e^{-\pi^2 t} [2 + \cos(\pi x) + \sin(\pi y)], \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, y, 0) &= 2 + \cos(\pi x) + \sin(\pi y), \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned}$$

其精确解

$$u(x, y, t) = e^{-\pi^2 t} [2 + \cos(\pi x) + \sin(\pi y)].$$

求解区域的网格剖分主要采用非结构三角形网格 (见图 6)、四边形网格和多边形网格 (见图 7), 其中符号 $p \in [0, 0.5]$ 表示网格的扭曲度, p 值越大, 网格越扭曲.

图 6 算例 5.1 中所用的三角形网格种类. (a) 不规则三角形网格; (b) 锐角三角形网格; (c) 随机三角形网格 ($p = 0.4$)

图 7 算例 5.1 中所用的四边形网格和任意多边形网格种类. (a) 随机四边形网格 ($p = 0.4$); (b) Shestakov 网格 ($p = 0.1$); (c) 多边形网格; (d) 不规则多边形网格

表 2-4 分别列出 4 种算法在不规则三角形网格、锐角三角形网格和随机三角形网格上的 L^2 和 H^1 误差及相应的收敛阶. 不难发现 4 种算法在这 3 种三角形网格上的 L^2 误差都是二阶收敛的, 对应的 H^1 误差的收敛阶均高于一阶.

表 5-8 分别列出 4 种算法在随机四边形网格、Shestakov 网格^[16]、多边形网格和不规则多边形网格上的 L^2 和 H^1 误差及相应的收敛阶. 通过 4 个表中的数值结果不难发现, SSLPS-T1 算法和 SSLPS-T2 算法在这 4 种网格上的 L^2 误差都是二阶收敛的, H^1 误差接近一阶甚至高于一阶. 然而 SSLPS-T3 算法在随机四边形网格、Shestakov 网格和不规则多边形网格上均表现不佳, 但对于多边形网格, 算法依然适用 (见表 7). 这也进一步证实了我们在推导过程中的猜测, 对于这 3 种网格, 单元

表 2 算例 5.1 在不规则三角形网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶

	h	SSLPS-T1	收敛阶	SSLPS-T2	收敛阶	SSLPS-T3	收敛阶	SSLPS-T4	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	5.00E-01	1.4394E-01	—	1.4394E-01	—	7.6788E-01	—	1.4394E-01	—
	2.50E-01	2.6497E-02	2.4416	2.6164E-02	2.4599	2.4672E-01	1.6380	2.5939E-02	2.4723
	1.25E-01	6.5341E-03	2.0198	6.5513E-03	1.9977	6.4439E-02	1.9368	6.5143E-03	1.9934
	6.55E-02	1.6264E-03	2.0063	1.6237E-03	2.0124	1.7447E-02	1.8850	1.6485E-03	1.9824
H^1 误差及收敛阶	5.00E-01	7.9290E-01	—	7.9290E-01	—	7.9290E-01	—	7.9290E-01	—
	2.50E-01	1.6721E-01	2.2454	1.6548E-01	2.2605	1.9657E-01	2.0121	1.6704E-01	2.2470
	1.25E-01	4.7436E-02	1.8176	4.7885E-02	1.7890	4.6826E-02	2.0697	4.7896E-02	1.8022
	6.55E-02	1.4959E-02	1.6649	1.5057E-02	1.6692	1.5199E-02	1.6233	1.5120E-02	1.6635

表 3 算例 5.1 在锐角三角形网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶

	h	SSLPS-T1	收敛阶	SSLPS-T2	收敛阶	SSLPS-T3	收敛阶	SSLPS-T4	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	2.50E-01	1.3242E-01	—	1.3254E-01	—	1.3228E-01	—	1.3236E-01	—
	1.25E-01	3.9997E-02	1.7272	4.0018E-02	1.7277	3.9971E-02	1.7266	3.9975E-02	1.7273
	6.25E-02	1.0068E-02	1.9901	1.0072E-02	1.9903	1.0063E-02	1.9899	1.0063E-02	1.9901
	3.13E-02	2.5566E-03	1.9775	2.5575E-03	1.9776	2.5553E-03	1.9775	2.5551E-03	1.9775
H^1 误差及收敛阶	2.50E-01	7.6846E-01	—	7.6906E-01	—	7.6788E-01	—	7.6805E-01	—
	1.25E-01	2.4690E-01	1.6380	2.4704E-01	1.6383	2.4672E-01	1.6380	2.4676E-01	1.6381
	6.25E-02	6.4513E-02	1.9363	6.4557E-02	1.9361	6.4439E-02	1.9368	6.4478E-02	1.9363
	3.13E-02	1.7496E-02	1.8826	1.7520E-02	1.8816	1.7447E-02	1.8850	1.7487E-02	1.8826

表 4 算例 5.1 在随机三角形网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶

	h	SSLPS-T1	收敛阶	SSLPS-T2	收敛阶	SSLPS-T3	收敛阶	SSLPS-T4	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	7.45E-01	2.5931E-01	—	2.5639E-01	—	2.6554E-01	—	2.5838E-01	—
	4.49E-01	7.4575E-02	1.7979	8.0392E-02	1.6732	7.7946E-02	1.7684	7.9504E-02	1.7037
	2.72E-01	1.9759E-02	1.9162	1.9715E-02	2.0277	1.9078E-02	2.0306	1.9073E-02	2.0595
	1.37E-01	5.0287E-03	1.9742	4.9138E-03	2.0044	5.1571E-03	1.8873	4.8618E-03	1.9719
H^1 误差及收敛阶	7.45E-01	1.3050E+00	—	1.2511E+00	—	1.3306E+00	—	1.3064E+00	—
	4.49E-01	4.6680E-01	1.4832	4.9909E-01	1.3259	4.6918E-01	1.5039	5.2485E-01	1.3156
	2.72E-01	1.5017E-01	1.6362	1.7941E-01	1.4761	1.3803E-01	1.7652	1.5021E-01	1.8050
	1.37E-01	5.6078E-02	1.4211	4.8494E-02	1.8874	6.1663E-02	1.1625	5.1974E-02	1.5311

中心和两个调和平均点构成的三角形面积有可能趋近于 0 (见图 3), 此时对应的格式中的系数无意义. 表 5 和 6 的结果表明 SSLPS-T4 算法在随机四边形网格和 Shestakov 网格上, L^2 误差可以达到二阶收敛, H^1 误差高于一阶, 且数值实验证实对于随机四边形网格, 其收敛性不依赖于网格扭曲度; 但对于 Shestakov 网格, 扭曲度越大, 其收敛性越差. 表 7 和 8 表明, 在多边形网格和不规则多边形网格上, SSLPS-T4 算法失效. 失效原因在于切向量分解中的两个向量可能平行 (见图 4), 此时对应的格式中的系数无意义. 所以, 前两种算法对网格依赖性较小, 而后两种算法要求网格满足一定条件才适用.

表 5 算例 5.1 在随机四边形网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶

	h	SSLPS-T1	收敛阶	SSLPS-T2	收敛阶	SSLPS-T3	收敛阶	SSLPS-T4	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	3.25E-01	1.4672E-01	—	1.4650E-01	—	7.4986E-01	—	1.4954E-01	—
	1.80E-01	4.4013E-02	1.7371	4.3667E-02	1.7463	2.1448E-01	—	4.3686E-02	1.7107
	8.42E-02	1.0940E-02	2.0083	1.0855E-02	2.0082	2.5955E+02	—	1.0767E-02	2.0852
	6.58E-02	2.7151E-03	2.0106	2.7483E-03	1.9817	3.3133E+114	—	2.7489E-03	1.9697
H^1 误差及收敛阶	3.25E-01	7.8598E-01	—	7.4268E-01	—	1.0070E+01	—	7.6412E-01	—
	1.80E-01	2.6619E-01	1.5621	2.6925E-01	1.4638	3.6900E+00	—	2.7507E-01	1.4740
	8.42E-02	7.5250E-02	1.8227	7.6090E-02	1.8232	8.0644E+03	—	7.4834E-02	1.8780
	6.58E-02	2.3549E-02	1.6760	2.3913E-02	1.6699	3.1849E+116	—	2.3453E-02	1.6739

表 6 算例 5.1 在 Shestakov 网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶

	h	SSLPS-T1	收敛阶	SSLPS-T2	收敛阶	SSLPS-T3	收敛阶	SSLPS-T4	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	3.12E-01	1.4493E-01	—	1.4996E-01	—	1.5399E-01	—	1.4096E-01	—
	1.45E-01	4.4003E-02	1.7197	4.2969E-02	1.8032	7.9881E-01	—	4.3423E-02	1.6987
	8.42E-02	1.0851E-02	2.0197	1.0758E-02	1.9979	1.6934E+18	—	1.0476E-02	2.0514
	5.78E-02	2.7701E-03	1.9699	2.7331E-03	1.9768	Inf	—	2.7292E-03	1.9405
H^1 误差及收敛阶	3.12E-01	7.5965E-01	—	7.5321E-01	—	8.0288E-01	—	7.4618E-01	—
	1.45E-01	2.5687E-01	1.5643	2.5523E-01	1.5612	1.7311E+01	—	2.5510E-01	1.5484
	8.42E-02	7.0060E-02	1.8744	6.9528E-02	1.8761	7.9359E+19	—	7.0651E-02	1.8523
	5.78E-02	1.9808E-02	1.8225	1.9857E-02	1.8079	Inf	—	2.0580E-02	1.7795

表 7 算例 5.1 在多边形网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶

	h	SSLPS-T1	收敛阶	SSLPS-T2	收敛阶	SSLPS-T3	收敛阶	SSLPS-T4	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	3.73E-01	2.7384E-01	—	2.8661E-01	—	3.0678E-01	—	2.5371E-01	—
	1.86E-01	1.0200E-01	1.4248	1.0603E-01	1.4346	1.1128E-01	1.4631	8.4649E-01	—
	9.32E-02	3.4181E-02	1.5773	3.5351E-02	1.5846	3.6688E-02	1.6008	1.0286E+00	—
	4.66E-02	9.5742E-03	1.8360	9.8718E-03	1.8404	1.0201E-02	1.8467	3.6976E+02	—
H^1 误差及收敛阶	3.73E-01	1.3900E+00	—	1.4587E+00	0.0000	1.5625E+00	—	1.7801E+00	—
	1.86E-01	8.2878E-01	0.7461	8.5586E-01	0.7692	8.9566E-01	0.8028	6.8433E+00	—
	9.32E-02	4.4722E-01	0.8900	4.5768E-01	0.9030	4.7141E-01	0.9260	1.1614E+01	—
	4.66E-02	2.1899E-01	1.0301	2.2303E-01	1.0371	2.2794E-01	1.0483	1.3860E+04	—

表 8 算例 5.1 在不规则多边形网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶

	h	SSLPS-T1	收敛阶	SSLPS-T2	收敛阶	SSLPS-T3	收敛阶	SSLPS-T4	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	2.50E-01	1.8664E-01	—	2.0279E-01	—	—	—	1.4588E-01	—
	1.25E-01	4.1360E-02	2.1739	4.5759E-02	2.1479	5.6593E-02	—	1.8073E-02	—
	6.86E-02	1.1658E-02	1.8269	1.2815E-02	1.8363	1.4408E-02	—	4.2461E+11	—
	3.54E-02	2.9425E-03	1.9862	3.3522E-03	1.9346	2.1912E+02	—	1.8453E+38	—
H^1 误差及收敛阶	2.50E-01	1.0234E+00	—	1.1146E+00	—	8.0288E-01	—	9.7113E-01	—
	1.25E-01	5.9361E-01	0.7858	6.4159E-01	0.7968	7.9729E-01	—	2.8439E+00	—
	6.86E-02	2.4750E-01	1.2621	2.6175E-01	1.2935	2.8534E-01	—	1.4956E+13	—
	3.54E-02	1.1119E-01	1.1544	1.1771E-01	1.1530	1.6648E+04	—	1.1913E+40	—

算例 5.2 在单位正方形区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 上, 考虑具有间断扩散系数的非定常扩散方程 (1.1)–(1.3), 扩散系数为

$$\Lambda = \begin{cases} 0.4, & (x, y, t) \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \times [0, 1] \times (0, T], \\ 0.1, & (x, y, t) \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \times [0, 1] \times (0, T], \end{cases}$$

精确解为

$$u(x, y, t) = \begin{cases} e^{-2\pi^2 t}(2 + \sin(\pi x) \sin(2\pi y)), & (x, y, t) \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \times [0, 1] \times (0, T], \\ e^{-2\pi^2 t}(2 + \sin(4\pi x) \sin(2\pi y)), & (x, y, t) \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \times [0, 1] \times (0, T]. \end{cases}$$

源项 f 、边界值 g 和初始条件 φ 可以由精确解代入方程来确定. 求解区域的网格剖分主要采用随机三角形网格和随机四边形网格 (见图 8). 表 9 和 10 分别给出 4 种算法在这两种网格上的 L^2 和 H^1 误差及相应的收敛阶. 结果表明, 在随机三角形网格上, 4 种算法的 L^2 误差均二阶收敛, H^1 误差的收敛阶高于一阶; 在随机四边形网格上, 除了 SSLPS-T3, 其他 3 种算法均可得到相同的收敛性. SSLPS-T3 不适用于随机四边形网格的原因与算例 5.1 中的描述相同.

为了进一步验证 SSLPS-T1 算法和 SSLPS-T2 算法的鲁棒性, 我们分别考虑具有各向异性扩散系数的情形和非线性扩散方程的情形, 在不规则三角形网格、随机四边形网格和不规则多边形网格上进行如下两个数值实验 (见图 9).

图 8 (网络版彩图) 算例 5.2 中所用的网格种类. (a) 随机三角形网格 ($p = 0.4$); (b) 随机四边形网格 ($p = 0.4$)

表 9 算例 5.2 在随机三角形网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶

	h	SSLPS-T1	收敛阶	SSLPS-T2	收敛阶	SSLPS-T3	收敛阶	SSLPS-T4	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	8.58E-01	8.9810E-01	—	8.1653E-01	—	8.8603E-01	—	8.0292E-01	—
	5.02E-01	3.0863E-01	1.5410	3.0002E-01	1.4445	2.9133E-01	1.6047	3.0760E-01	1.3842
	2.99E-01	7.8128E-02	1.9820	7.5441E-02	1.9916	7.5437E-02	1.9493	8.0863E-02	1.9275
	1.41E-01	2.0075E-02	1.9605	2.0032E-02	1.9131	1.9759E-02	1.9327	2.0046E-02	2.0122
H^1 误差及收敛阶	8.58E-01	4.6961E+00	—	4.3935E+00	—	4.5466E+00	—	4.3099E+00	—
	5.02E-01	2.1425E+00	1.1322	1.9764E+00	1.1525	2.0106E+00	1.1771	2.0152E+00	1.0967
	2.99E-01	6.3875E-01	1.7460	6.2496E-01	1.6610	6.0366E-01	1.7358	6.3982E-01	1.6552
	1.41E-01	1.9707E-01	1.6965	2.1298E-01	1.5530	2.0355E-01	1.5683	1.9721E-01	1.6979

表 10 算例 5.2 在随机四边形网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶

	h	SSLPS-T1	收敛阶	SSLPS-T2	收敛阶	SSLPS-T3	收敛阶	SSLPS-T4	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	3.25E-01	5.4719E-01	—	5.6120E-01	—	5.4351E-01	—	5.3641E-01	—
	1.80E-01	1.5312E-01	1.8374	1.5781E-01	1.8303	6.5754E+00	—	1.5271E-01	1.8126
	8.42E-02	4.0823E-02	1.9072	3.9290E-02	2.0060	2.6167E+10	—	3.9330E-02	1.9571
	6.58E-02	1.0071E-02	2.0192	1.0191E-02	1.9468	6.0095E+97	—	1.0079E-02	1.9643
H^1 误差及收敛阶	3.25E-01	3.1016E+00	—	3.1028E+00	—	3.1391E+00	—	3.1623E+00	—
	1.80E-01	1.0510E+00	1.5612	1.0999E+00	1.4962	1.4086E+02	—	1.0193E+00	1.6334
	8.42E-02	3.2761E-01	1.6817	3.1590E-01	1.7999	1.2169E+12	—	3.1844E-01	1.6784
	6.58E-02	8.6806E-02	1.9161	8.8473E-02	1.8362	6.1487E+99	—	8.7355E-02	1.8661

算例 5.3 在单位正方形区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上, 考虑如下非定常扩散问题:

$$\begin{aligned}
 u_t - \nabla \cdot (\Lambda \nabla u) &= f, \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, T], \\
 u(x, y, t) &= e^{-0.1t} \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\
 u(x, y, 0) &= 4x + 2y, \quad (x, y) \in \Omega,
 \end{aligned}$$

其中 Λ 是一个对称正定矩阵, 满足 $\Lambda = RDR^T$, 而 $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$, 这里取 $\theta = \frac{5\pi}{12}$, $k_1 = 1 + 2x^2 + y^2$, $k_2 = 1 + x^2 + 2y^2$, 其精确解为 $u(x, y, t) = e^{-0.1t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. 表 11 和 12 分别给出 SSLPS-T1 算法和 SSLPS-T2 算法在 3 类网格上的 L^2 和 H^1 误差及相应的收敛阶. 数值结果表明, 两种算法在 3 类网格上都能保证 L^2 二阶收敛以及 H^1 一阶收敛.

图 9 算例 5.3 和 5.4 中所用的网格种类. (a) 不规则三角形网格; (b) 随机四边形网格 ($p = 0.2$); (c) 不规则多边形网格

表 11 算例 5.3 采用 SSLPS-T1 算法在 3 类网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶									
	h	不规则三角形	收敛阶	h	随机四边形	收敛阶	h	不规则多边形	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	1.00E+00	6.6475E-02	—	2.95E-01	3.6962E-02	—	5.00E-01	2.5368E-01	—
	5.00E-01	4.0616E-02	0.7108	1.54E-01	9.1398E-03	2.0158	2.50E-01	1.1998E-01	1.0802
	2.50E-01	7.1805E-03	2.4999	7.91E-02	1.8036E-03	2.3413	1.25E-02	2.0797E-02	2.5284
	1.25E-01	1.7679E-03	2.0220	4.12E-02	4.8410E-04	1.8975	6.86E-02	3.3499E-03	2.6341
H^1 误差及收敛阶	1.00E+00	4.0548E-01	—	2.95E-01	2.1750E-01	—	5.00E-01	1.2051E+00	—
	5.00E-01	2.9294E-01	0.4690	1.54E-01	9.4090E-02	1.2089	2.50E-01	7.2717E-01	0.7288
	2.50E-01	1.8730E-01	0.6453	7.91E-02	4.4134E-02	1.0922	1.25E-01	3.1752E-01	1.1955
	1.26E-01	6.6498E-02	1.4940	4.12E-02	2.2646E-02	0.9626	6.86E-02	9.5951E-02	1.7265

表 12 算例 5.3 采用 SSLPS-T2 算法在 3 类网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶									
	h	不规则三角形	收敛阶	h	随机四边形	收敛阶	h	不规则多边形	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	1.00E+00	6.6304E-02	—	2.84E-01	3.9607E-02	—	3.73E-01	5.00E-01	—
	5.00E-01	4.0825E-02	0.6998	1.58E-01	9.6284E-03	2.0404	1.86E-01	2.50E-01	1.1664
	2.50E-01	7.3227E-03	2.4790	8.43E-02	2.5147E-03	1.9369	9.32E-02	1.25E-02	2.4432
	1.25E-01	1.9206E-03	1.9308	4.28E-02	6.2302E-04	2.0130	4.66E-02	6.86E-02	2.4491
H^1 误差及收敛阶	1.00E+00	4.1193E-01	—	2.95E-01	2.4333E-01	—	5.00E-01	1.1497E+00	—
	5.00E-01	2.9617E-01	0.4759	1.54E-01	9.3891E-02	1.3738	2.50E-01	6.4780E-01	0.8277
	2.50E-01	1.8536E-01	0.6761	7.91E-02	4.6008E-02	1.0291	1.25E-01	2.8822E-01	1.1684
	1.26E-01	6.5061E-02	1.5105	4.12E-02	2.1956E-02	1.0673	6.86E-02	8.1694E-02	1.8189

算例 5.4 在单位正方形区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 上, 考虑非线性扩散方程

$$u_t(x, y, t) - \nabla \cdot (\Lambda(u) \nabla u) = f(x, y, t, u), \quad \text{在 } \Omega \times (0, T] \text{ 内,}$$

其中 $\Lambda(u) = u^{7/5} + 1$, 精确解为 $u(x, y, t) = e^t(2x^3 - 3x^2 + 2)(2y^3 - 3y^2 + 3)$, 初边界条件及源项由精确解的表达式确定. 实际计算时, 非线性方程组的系数矩阵采用上一个时间步的数值解进行线性化处理. 表 13 和 14 分别给出 SSLPS-T1 算法和 SSLPS-T2 算法在 3 类网格上的 L^2 和 H^1 误差及最优收敛阶, 验证了这两种算法在非线性问题中依然适用.

表 13 算例 5.4 采用 SSLPS-T1 算法在 3 类网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶									
	h	随机三角形	收敛阶	h	随机四边形	收敛阶	h	不规则多边形	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	8.73E-01	9.6297E-02	—	4.23E-01	6.8557E-02	—	5.00E-01	2.1800E-01	—
	4.48E-01	4.2869E-02	1.1675	1.97E-01	2.0669E-02	1.7298	2.50E-01	8.8819E-02	1.2954
	2.74E-01	1.1576E-02	1.8888	1.07E-01	5.2360E-03	1.9810	1.25E-01	1.4367E-02	2.6281
	1.40E-01	3.0868E-03	1.9070	5.37E-02	1.3913E-03	1.9120	6.86E-02	3.6932E-03	1.9599
H^1 误差及收敛阶	8.73E-01	6.2574E-01	—	4.23E-01	5.9206E-01	—	5.00E-01	1.0730E+00	—
	4.48E-01	4.7486E-01	0.3981	1.97E-01	2.4378E-01	1.2801	2.50E-01	5.9007E-01	0.8627
	2.74E-01	3.0772E-01	0.6259	1.07E-01	1.1896E-01	1.0351	1.25E-01	2.8587E-01	1.0456
	1.40E-01	1.3089E-01	1.2332	5.37E-02	6.1546E-02	0.9507	6.86E-02	1.1936E-01	1.2600

表 14 算例 5.4 采用 SSLPS-T2 算法在 3 类网格上的 L^2 误差和 H^1 误差及其收敛阶

	h	随机三角形	收敛阶	h	随机四边形	收敛阶	h	不规则多边形	收敛阶
L^2 误差及收敛阶	8.73E-01	9.2175E-02	—	3.32E-01	9.5611E-02	—	5.00E-01	2.1747E-01	—
	4.61E-01	4.9797E-02	0.8883	1.77E-01	2.3695E-02	2.0126	2.50E-01	1.0040E-01	1.1150
	2.90E-01	1.2189E-02	2.0305	9.65E-02	5.7682E-03	2.0384	1.25E-01	1.9354E-02	2.3752
	1.38E-01	3.2491E-03	1.9074	5.12E-02	1.4316E-03	2.0105	6.86E-02	4.7650E-03	2.0221
H^1 误差及收敛阶	8.73E-01	8.7832E-01	—	3.32E-01	6.7453E-01	—	5.00E-01	1.0707E+00	—
	4.61E-01	5.6221E-01	0.6436	1.77E-01	3.1704E-01	1.0892	2.50E-01	6.6136E-01	0.6950
	2.90E-01	3.0008E-01	0.9057	9.65E-02	1.3294E-01	1.2539	1.25E-01	3.3683E-01	0.9734
	1.38E-01	2.1547E-01	0.4778	5.12E-02	6.3966E-02	1.0554	6.86E-02	1.3540E-01	1.3148

6 结论

本文利用调和平均点作为辅助插值点离散网格边上的法向流, 提出了非定常扩散方程的 4 种单元中心型有限体积格式. 它们不但满足局部守恒性质, 而且可以在任意多边形网格上实现, 具有模板小、易实现等优点. 在一定的网格假设前提下, 本文给出了算法的稳定性和误差估计. 数值结果表明, SSLPS-T1 算法和 SSLPS-T2 算法的鲁棒性更好, L^2 误差在任意非结构多边形网格上均可以达到二阶收敛; SSLPS-T3 算法和 SSLPS-T4 算法则需要网格满足一定的条件才适用. 后续的工作中, 我们将继续研究对流扩散方程中的单元中心型有限体积格式的构造.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参考文献

- 1 Lipnikov K, Shashkov M, Svyatskiy D, et al. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes. *J Comput Phys*, 2007, 227: 492–512
- 2 Yuan G W, Sheng Z Q. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes. *J Comput Phys*, 2008, 227: 6288–6312
- 3 Sheng Z Q, Yuan G W. An improved monotone finite volume scheme for diffusion equation on polygonal meshes. *J Comput Phys*, 2012, 231: 3739–3754
- 4 Wu J M, Gao Z M. Interpolation-based second-order monotone finite volume schemes for anisotropic diffusion equations on general grids. *J Comput Phys*, 2014, 275: 569–588
- 5 Yue J Y, Yuan G W, Sheng Z Q. New monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes (in Chinese). *Math Num Sin*, 2015, 37: 316–336 [岳晶岩, 袁光伟, 盛志强. 多边形网格上扩散方程新的单调格式. *计算数学*, 2015, 37: 316–336]
- 6 Sheng Z Q, Yuan G W. A cell-centered nonlinear finite volume scheme preserving fully positivity for diffusion equation. *J Sci Comput*, 2016, 68: 521–545
- 7 Sheng Z Q, Yue J Y, Yuan G W. A parallel finite volume scheme preserving positivity for diffusion equation on distorted meshes. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2017, 33: 2159–2178
- 8 Wu J M, Dai Z H, Gao Z M, et al. Linearity preserving nine-point schemes for diffusion equation on distorted quadrilateral meshes. *J Comput Phys*, 2010, 229: 3382–3401
- 9 Gao Z M, Wu J M. A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes. *Internat J Numer Methods Fluids*, 2011, 67: 2157–2183
- 10 Wu J M, Gao Z M, Dai Z H. A stabilized linearity-preserving scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion problems on polygonal meshes. *J Comput Phys*, 2012, 231: 7152–7169
- 11 Wu J M, Gao Z M, Dai Z H. A vertex-centered linearity-preserving discretization of diffusion problems on polygonal meshes. *Internat J Numer Methods Fluids*, 2016, 81: 131–150
- 12 Agelas L, Eymard R, Herbin R. A nine-point finite volume scheme for the simulation of diffusion in heterogeneous

- media. C R Math Acad Sci Paris, 2009, 347: 673–676
- 13 Gao Z M, Wu J M. A small stencil and extremum-preserving scheme for anisotropic diffusion problems on arbitrary 2D and 3D meshes. J Comput Phys, 2013, 250: 308–331
- 14 Luo L S, Gao Z M, Wu J M. A cell-centered finite volume scheme for anisotropic diffusion problems (in Chinese). Chin J Eng Math, 2015, 32: 359–368 [骆龙山, 高志明, 邬吉明. 各向异性扩散问题的一个单元中心型有限体积格式. 工程数学学报, 2015, 32: 359–368]
- 15 Zhou Y L. Discrete Functional Analysis and Its Application to Finite Difference Method. Beijing: International Academic Publishers, 1990
- 16 Shestakov A I, Harte J A, Kershaw D S. Solution of the diffusion equation by finite elements in Lagrangian hydrodynamic codes. J Comput Phys, 1988, 76: 385–413

Finite volume schemes of evolutionary diffusion equations based on harmonic averaging interpolation

Haicheng Zhang & Li Shan

Abstract This paper focuses on developing cell-centered finite volume schemes on arbitrary distorted and unstructured meshes for evolutionary diffusion equations. On each mesh cell, by using the cell center and three harmonic averaging points on cell boundaries as the interpolation points, we approximate the normal flux in four different ways. To make these finite volume schemes cell-centered, we eliminate the intermediate variables in the flux expression by the harmonic averaging interpolation procedure. We discretize the time derivative term by the backward Euler scheme. Under some proper assumptions on meshes, we prove the stability and error estimate of the scheme theoretically. Considering the continuous, discontinuous, and heterogeneous diffusion tensors, even for the nonlinear diffusion equations, we construct four numerical experiments to investigate the convergence and robustness. Several different unstructured triangular, quadrilateral, and polygonal meshes are adopted. The numerical results imply that the former two schemes are robust for any kind of mesh and any kind of diffusion tensor, and they can obtain second-order convergence in L^2 norm and first-order convergence in H^1 norm; but the latter two schemes are more dependent on meshes.

Keywords finite volume method, evolutionary diffusion equation, unstructured mesh, linearity preserving criterion, harmonic averaging point

MSC(2020) 65N08, 65M06

doi: 10.1360/SSM-2020-0262