

牛顿建立微分积分学的历史

关 肇 直

(中国科学院数学研究所)

这里简要地分析一下牛顿建立微分积分学的时代背景,说明当时社会生产实践的需要和自然科学知识积累的条件,以便通过三百年前* 科学史上这一重大事件反映出自然科学发展的规律性来。

一 欧洲 17 世纪社会生产的情况

欧洲自 15 世纪后半叶以来,封建社会逐渐解体,资本主义社会开始形成。由于生产力的发展,商业资本逐渐发展起来,从而打破了封建割据的局面。由于贸易的需要,交通事业发展起来。随着航海的发展,需要决定船只在大海中的位置,这就提出了精确地测定经纬度的要求。船只加大了,进而要求更好地了解流体中浮体的规律。改进船的性能促进了物体在流体中运动的研究。船只的稳定性引起质点力学的研究。定纬度就要观测天体,这要求对天体运行规律有更确切的了解;定纬度需要量测月球到恒星的距离。在给定地点定潮汐的时间与月球位置的关系引起了关于引力的研究。修造运河和闸都要掌握水静力学的规律。

在工业方面,采矿工业于 14、15 两世纪在欧洲已发展成为大工业。在 16、17 世纪,冶金工业也发展起来。采矿就需要更好

地了解简单机械的力学。通风设备、排水机、抽水机等的需求和设置推动了空气静力学和流体静力学的研究。鼓风炉生产使用了水轮、风箱等,这些也引起了流体静、动力学和空气的运动与压缩等问题的研究。传送机构的研究也是力学上的问题。

为了要改进炮弹的准确性促进了弹道学的研究。武器的原理使人们了解了作用和反作用的关系。

总之,当时的生产实践和军事发展的需要,主要集中在力学的各个分支上:简单机械、质点力学、天体力学、流体和空气静动力学、引力理论,等等。对这些学科的要求,已不只是定性的描述,而要求有更精确的定量关系的了解。因此,力学的发展也促进了新数学工具的创造,以便使数学的描述和分析的方法成为精密的自然科学的有效工具。

二 17 世纪以前物理科学研究的基本情况

把牛顿以前一个时期乃至他的同时代人的科学研究工作和上述的实际需要加以比

* 数学史的研究,认为牛顿创立微分积分学是在 1665—1666 年,到今年恰好是三百年了,见斯特洛伊克“数学简史”,89 页,科学出版社,1956 年出版。

较，可以更清楚地看到其间的关系。

在简单机械方面，研究斜面和静力学一般问题的有达芬奇（工作时间 15 世纪末）、乌巴尔第（1577）、伽利略（工作时期 1589—1609）、加尔达诺（16 世纪中叶）、西蒙·斯提汶（1587）。

研究自由落体和抛射体轨道的，有塔塔利亚（16 世纪三十年代）、贝内德提（1587）、皮科洛米尼（1598）、伽里略（1589—1609）、黎却利（1652）。

关于流体和空气静力学、大气压力方面，斯提汶（在 16 世纪末，17 世纪初）、伽利略、托里切利（17 世纪初）、巴斯噶（1647—1653）、艾利格（Herique 1650—1663）、波以尔（17 世纪七十年代）等人研究了抽水机、物体在有阻力的介质中的运动。

凯卜勒（1609）、伽利略（1609—1616）、伽桑第（1642）、哈雷（17 世纪七十年代）、胡克等人研究了天体运行的规律。

以上这些反映了物理科学在那个时期的全部主要课题。由此可以明显地看出当时交通事业、工业、军事等方面的需要如何地决定了自然科学的发展！这正如恩格斯所说：“如果说，象您所断言的，技术在很大程度上依赖于科学状况，那末科学状况却在更大的程度上依赖于技术的**状况和需要**。社会一旦有技术上的需要，则这种需要就会比十所大学更能把科学推向前进。整个流体静力学（如托里切利等）是由于十六和十七世纪调节意大利山洪的需要而产生的。关于电，只是从电在技术上可用的性能被发现时起，我们才知道一些合理的东西。在德国，可惜人们写科学史时已惯于把科学看做是从天上掉下来的。”（见马克思恩格斯书信选集，人民出版社，1962 年第一版，第 516—517 页；

恩格斯致海·施塔尔根堡）。

三 16—17 世纪天文学和物理学研究的进展

由于航海事业的发展，要求制定更精确的天文表——早期主要为适应制历的需要而制出的表已不能满足当时这种更精密的要求了。

决定船只在大海中的位置的问题，其最困难的焦点乃是决定经度。这是当时天文学家和航海实际工作者所共同感兴趣的、迫切需要解决的研究课题，巴黎天文台成立于 1672 年，格林威治天文台成立于 1675 年；它们建立的一个主要目的就是解决这个定经度的问题。这要求对月球运动中的近地点距离要有精确的了解。

从理论上说，在哥白尼划时代的成就之后，一个重要问题乃是对哥白尼系统加以物理学的说明。

因此，天体运行规律的精密研究被提到日程上来了。

物理学在这时候也有了根本性的变化。过去，物理学只是定性的描述。到了达芬奇，虽然也曾企图定量地表达物理学规律，但并没有成功。当时代数学还停留在“修辞”代数的阶段，并没有用字母表达不定量而从事演算的现代形式的代数学。在欧洲，这种现代形式的代数学是由维叶特在 16 世纪末才引入的。伽利略（1564—1642）才成功地完成了物体运动的数学描述。他把精密的物理实验和数学分析结合起来，解决了自由落体这一问题。他明确了物体经常改变速度并且在每一确定时刻具有确定的速度——瞬时速度这一事实，为后来微商概念打下了基础。物理学从此以后才能用数学公式定量地陈述它的规律。物理学的这一进展也为行星运行问

题的更精确的解决准备了条件。

在哥白尼系统被承认以后，人们在探索为什么行星能绕太阳按一定轨道运行的时候，有人想到一定有一种引力作用于太阳与行星之间。这种远距离的引力的想法也不是偶然的。当时已有吉尔伯特关于磁学的研究（1600年），这指出了有远距离的引力存在的可能。波列利（Borelli）（1666）想到应有一种力和行星绕行时的离心力相平衡。也有人想到，既然轨道是椭圆的（凯卜勒），当行星接近太阳时，运动加快，引力增大。1673年惠根斯研究钟摆的运动时发现离心力与圆形轨道的半径成正比例，与速度平方成反比例。既然凯卜勒第三定律说明行星运行的周期平方与椭圆半长轴立方成正比例，即速度平方与半长轴立方成反比例，如果粗略地把半长轴等同于（圆的）半径，就可得出离心力与半径平方成比例了。胡克、哈雷等人就是在这种想法之下获得引力与距离平方成反比例的结论。这样的推理本身还不够严格，而且轨道为什么是椭圆形的问题也还未得到解释。

四 微分积分学的建立

椭圆轨道和圆形轨道不同，行星到太阳的距离不是固定的（象圆的半径那样），而是变化的。行星绕太阳的运动和手拿着一端系着石头的绳子抡着使石头作圆周运动的情形不同，因为石头的运动可以看作是匀速的，行星运动速度是不断变化的。只有有了真正表达运动和变化过程的数学，亦即变量的数学，才能真正解决天体运动的问题。

变量的数学在17世纪在力学发展的推动下也开始形成了。如果卡瓦列利关于用积分法计算体积的工作可以看作是积分学的先驱，但却还不带有变量数学的色彩，那末

笛卡尔的解析几何学，以及费尔玛关于求极大极小值的方法却是标志了变量数学的诞生。近代微分积分学作为一门数学的独立分支正式建立起来，却是由于看出了微分和积分的关系——二者互为逆运算*。这是由牛顿和莱卜尼兹通过不同途径发现的，从而，求积分才不再当作求和的极限这种复杂过程的演算，只须看作是求微分的逆运算。但初等函数的微商是有一定法则去求的，因此只要作好一个函数和它的微商的对照表，由这个表反查，就可求出一已知函数的原函数（即它的不定积分）。

五 牛顿的贡献

牛顿在力学的研究基础上建立了微分积分学，并把数学分析的方法用来解决当时物理科学中最重要的问题。

首先，他把伽利略开始的，用数学公式记述物理学的基本规律的情况又推进了一大步。他用数学方法，不只是记述物理学的规律，而是可以把物理学的基本规律结合具体问题的条件转化成可以定量地测量的结果，从而可以用观测和实验来定量地验证这些规律。例如从牛顿的运动第二定律——物体在运动中动量的变化率与它所受的力，方向一致，大小成正比例——出发，结合天体运动的具体条件，假定太阳与行星间作用的力是引力，与距离平方成反比例，那末利用微分积分学可以推算出轨道为椭圆形，周期平方和椭圆半长轴立方成正比例等等——这和凯卜勒由观测概括出来的规律相符合，证实了万有引力的反平方律的正确性。反过来，他也用数学分析的方法，从观测结果出发，

* 和减法与加法，除法与乘法，开方与乘方，指数与对数等等相类似。

推导出来这些观测到的现象所反映出来的基本规律。例如牛顿从凯卜勒由观测所概括出来的定律出发，用数学方法推证出太阳和行星间作用的力只能是引力，并且大小和距离平方成反比例。这样，数学才成为物理学、力学等自然科学所经常使用的有力工具。

牛顿的发现为后世把数学描述分析的方法当作认识自然的一种工具的这种作法树立了榜样。

六 莱卜尼慈的贡献

莱卜尼慈则是通过几何的研究建立微分积分学的。伽利略曾由于造桥拱的工作需要(1559)研究了摆线和它所包容的面积的问题。笛卡尔和费尔玛创立了解析几何学，为曲线的研究提供了解析——代数的工具。16—17世纪许多数学家研究了种种曲线的弧长、面积、几何图形的重心等等。笛卡尔结合光折射法则的发现得出了双极座标下卵形线的方程。笛卡尔也考虑了求曲线的切线和法线的问题。费尔玛发现了利用微分学决定函数极值的方法。在这一时期的几何性质的研究基础上，莱卜尼慈发现了求切线法是求积法的逆问题，于是与牛顿互相独立地发现了微分学和积分学的关系，正式建立了微分积分学。

莱卜尼慈把微商看作差商的极限。他的符号也比牛顿的更好地反映出微商的本性来。因此，从数学本身看来，对后世微分积分学、数学分析有更大影响的，乃是莱卜尼慈而不是牛顿。

七 数学史上关于微分积分学发明 优先权的争论及其后果

牛顿和莱卜尼慈互相独立地、在差不多

同时建立了微分积分学，完成了近代数学史上这一重大转折。这说明当时生产实践和科学技术发展的条件已经成熟，微分积分学的诞生在17世纪的欧洲已成为历史发展的必然结果。尽管我国古代或古希腊都曾有了极限概念和利用极限求曲线所围面积的方法，但当时的社会生产情况还没有诞生变量数学的条件。只有在生产实践的需要已经迫切了，科学技术整个的发展已经使条件成熟了，数学史上这个重大的转折点才有出现的可能。

数学史上也发生过一段争论微分积分学发明优先权的不愉快的插曲。这种争论不仅在今天看来是愚蠢的，表现了对科学发展规律缺乏认识，而且在当时也招致了学术发展上的损失。

在欧洲大陆，到了18世纪，当时一些先进的思想家——如服尔德等，致力于把牛顿的著作介绍到大陆诸国来；但在英国，人们却坚决不肯吸收莱卜尼慈学派的长处。对待学术上不同派别、不同风格的两种截然不同的态度造成在一定历史时期欧洲大陆和英国学术发展上截然不同的后果。在欧洲大陆，吸收、继承并发扬了牛顿和莱卜尼慈两家之长，在18世纪，数学和数学物理、力学等方面（特别是天体力学、解析力学，流体力学等）都得到了蓬勃的发展；而英国在18世纪数学的发展却大大落后于欧洲大陆。18世纪，在英国就找不到一位能和欧洲大陆上当时的数学家，象欧拉、拉卜拉斯、拉格朗日、达朗贝尔、贝尔努意等相比拟的人物来。等到英国的学者们认识到固步自封的害处，并急起直追时，则已是十九世纪的事情了。