

共形几何代数中的分阶幂零单项式的几何解释

献给张景中、杨路教授 85 华诞

李洪波^{1,2}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

E-mail: hli@mmrc.iss.ac.cn

收稿日期: 2019-12-30; 接受日期: 2020-03-21; 网络出版日期: 2020-08-10

国家自然科学基金 (批准号: 11671388) 资助项目

摘要 本文进一步发展共形几何代数, 从代数和几何两个角度对共形几何代数中由幂零向量生成的分阶单项式的代数性质和几何解释进行深入探讨, 包括各种维数的球面和平面定向的代数刻画、长括号的三角学、角度和方向的分阶表示、幂零单项式各个分阶的几何意义等. 这些结果有助于理解高层次符号代数运算背后的几何意义, 以及共形几何代数简化符号几何计算的内在机制.

关键词 共形几何代数 符号几何计算 三角学 零括号代数 几何约束的代数表达

MSC (2010) 主题分类 15A66, 51A25, 51B10

1 引言

共形几何代数^[1,2]于1999–2001年被提出. 近20年来, 该代数作为经典几何的表示和计算工具, 在机器证明^[3,4]、计算机图形学^[5]、计算机视觉^[6]、机器人^[7]、物理学^[8,9]和地理信息系统^[10,11]等方面取得了许多应用. 2007–2008年由本文作者提出的零括号代数、零 Grassmann-Cayley 代数和零几何代数^[12–14], 相对于一般的几何代数具有许多独到的代数性质, 使得基于这些高级几何不变量代数的几何定理机器证明的效率有了飞跃式的提高.

在发展高级几何不变量代数的过程中, 作者还开始了对这些代数中的基本代数表达式的几何解释的探讨 (参见文献 [15–18]). 这种探讨不仅有助于理解高层符号代数运算背后的几何意义, 而且有助于发展更高效的符号几何计算方法. 本文的主要内容是汇报共形几何代数表达式的几何意义研究方面的新成果. 这些成果都是十几年前由作者获得的, 是从代数和几何两个角度对共形几何代数进行的深入发展, 但一直没有进行投稿. 张景中和杨路两位符号几何计算与机器证明领域的老前辈, 即将迎来 85 岁华诞; 作者谨借此机会, 奉献这篇新作以表示祝贺.

英文引用格式: Li H B. Geometric interpretations of graded null monomials in conformal geometric algebra (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2021, 51: 179–208, doi: 10.1360/SSM-2019-0329

本文的主要成果包括: 共形几何代数中, 各种维数的球面和平面定向的代数刻画, 幂零向量的基本引理和有理幂零展开; 平面几何的共形几何代数中, 幂零单项式的详细代数性质, 长括号的三角学, 角度和方向的幂零单项式分阶表示, 幂零单项式的各个分阶的几何解释.

本文余下内容安排如下: 第 2 节介绍本文用到的几何代数基本运算和性质; 第 3 节首先介绍共形几何代数在几何体表示方面的内容, 其次介绍新成果—共形几何代数对各种维数的球面和平面的定向的代数表示与计算; 第 4 节对幂零奇单项式, 特别是二维几何情形下的幂零奇单项式, 它们的代数性质和几何解释进行精细探讨; 第 5 节对二维几何情形下的幂零偶单项式的 $(0, 4)$ - 阶分量的代数性质和几何意义进行探讨, 建立它与长度、半径、面积和角度的关系, 揭示出这是另外一种复数表示; 第 6 节探讨二维几何情形下的幂零偶单项式的 2- 阶分量, 给出其代数性质和几何刻画.

2 几何代数预备知识

本节主要内容参见文献 [14, 19]. 若 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 令 e_1, e_2, \dots, e_n 为实内积空间 \mathcal{V}^n 的一组基底. 矩阵 $(e_i \cdot e_j)_{i,j=1,\dots,n}$ 称为该基底的内积矩阵. 根据经典的 Sylvester 定理, 在合同变换下, 内积矩阵可以对角化, 对角元属于 $\{1, -1, 0\}$. 对角元中的 1、-1 和 0 的个数分别记为 (p, q, r) ; 该三元组称为 \mathcal{V}^n 的指标 (signature), 它不依赖于基底的选取. 如果一个基底的内积矩阵具有这种对角形式, 则称该基底为标准正交的.

指标为 (p, q, r) 的实内积空间常标记为 $\mathbb{R}^{p,q,r}$; 当 $r = 0$ 时, 标记为 $\mathbb{R}^{p,q}$; 当 $r = q = 0$ 时, 标记为 \mathbb{R}^p (Euclid 空间). 当 $r \neq 0$ 时, 称该内积空间为退化的. 当 $r = q - 1 = 0$ 时, 称该内积空间为 Minkowski 的. 当 $p = q = 0$ 时, 称该内积空间为幂零 (null) 的. 一个非零向量的指标即它所张成的一维向量空间的指标. 正向量、负向量和幂零向量分别是与自身内积为正、负和零的非零向量.

内积空间 \mathcal{V}^n 上的内积可以理解为两个向量之间的缩并. 张量空间 $\otimes(\mathcal{V}^n)$ 上两个张量的缩并也称为它们的内积, 只是不再具备交换性. 本文只考虑反对称张量空间 $\Lambda(\mathcal{V}^n)$ (即 Grassmann 空间) 上的缩并. Grassmann 空间上的反对称张量积即外积, 用 “ \wedge ” 表示. 内积始终用 “ \cdot ” 表示.

例如, 对任意 $1 \leq r \leq n$, 对向量 $a_i, b_j \in \mathcal{V}^n$, 内积具有如下 Laplace 展开:

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot (b_1 \wedge b_2 \wedge \cdots \wedge b_r) = \det(a_{r+1-i} \cdot b_j)_{i,j=1,\dots,r}. \quad (2.1)$$

在 Grassmann 空间 $\Lambda(\mathcal{V}^n)$ 上, r 个 \mathcal{V}^n 中向量的外积 $A_r = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r$ 称为 r - 片 (blade), r 称为阶数. 所有的 r - 片线性扩张成 $\Lambda(\mathcal{V}^n)$ 的一个子空间 $\Lambda^r(\mathcal{V}^n)$, 其中的元素称为 r - 向量. 任一非零 r - 片 A_r 表示一个 r 维向量空间: 向量 $x \in \mathcal{V}^n$ 在该子空间上当且仅当 $x \wedge A_r = 0$. 一般将该向量空间记为 A_r . 建立在子空间 A_r 上的 Grassmann 空间记为 $\Lambda(A_r)$, 它是 $\Lambda(\mathcal{V}^n)$ 的子代数.

两个片称为完全正交的, 如果一个片中的任一向量与另一片中的任意向量正交. 由缩并定义的两个片之间的内积具有如下交换性: 对任意 r - 片 A_r 和 s - 片 B_s , 其中阶数 $r \leq s$, 有

$$B_s \cdot A_r = (-1)^{r(s-1)} A_r \cdot B_s. \quad (2.2)$$

当 $s = 0$ 时, 定义 $B_0 \cdot A_r = B_0 A_r$. 定义模长

$$|A_r| = \sqrt{|A_r \cdot A_r|}. \quad (2.3)$$

在 $\Lambda(\mathbb{R}^{p,q,r})$ 中, 设 $n = p + q + r$. 任意两个非零 n - 片仅相差一个数量因子. 如果这个因子为正, 则这两个 n - 片被称为定义了 $\mathbb{R}^{p,q,r}$ 中相同的定向. 由此, $\mathbb{R}^{p,q,r}$ 具有两个定向.

设 I_n 是 $\Lambda(\mathbb{R}^{p,q})$ 中的一个非零 n -片. 定义 $\Lambda(\mathbb{R}^{p,q})$ 中关于 I_n 的对偶算子 “ \sim ” 如下:

$$A^\sim := A \cdot \frac{I_n}{I_n \cdot I_n}, \quad \forall A \in \Lambda(\mathcal{V}^n). \quad (2.4)$$

它的逆 “ \sim^{-1} ” 为

$$A^{\sim^{-1}} := A \cdot I_n, \quad \forall A \in \Lambda(\mathcal{V}^n). \quad (2.5)$$

特别地, 对于任意 n -片 A_n , 它的对偶是一个数量, 称为 A_n 的括号,

$$[A_n] := A_n^\sim. \quad (2.6)$$

例如, 设 e_1, \dots, e_n 是 \mathbb{R}^n 的一组单位正交基, $A_r = e_1 \wedge \dots \wedge e_r$, 而 $I_n = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, 则

$$A_r^\sim = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{r(r-1)}{2}} e_{r+1} \wedge \dots \wedge e_n, \quad (2.7)$$

它表示向量空间 A_r 在 \mathbb{R}^n 中的正交补.

设 B_s 是一个 s -片且 $B_s \cdot B_s \neq 0$. 一般记

$$B_s^{-1} = \frac{B_s}{B_s \cdot B_s}. \quad (2.8)$$

对任意 $0 < r \leq s$, 定义 r -向量 A_r 向 s 维向量空间 B_s 的正交投影算子 P_{B_s} 为

$$P_{B_s}(A_r) := (A_r \cdot B_s) \cdot B_s^{-1}. \quad (2.9)$$

定义 A_r 相对于子空间 B_s 的正交排斥算子 $P_{B_s}^\perp$ 为

$$P_{B_s}^\perp(A_r) := A_r - P_{B_s}(A_r). \quad (2.10)$$

特别地, 当 $r = 1$ 时, 容易验证

$$P_{B_s}^\perp(a) = (a \wedge B_s) \cdot B_s^{-1}, \quad \forall a \in \mathcal{V}^n. \quad (2.11)$$

括号与向量之间的内积是正交几何中的基本不变量. 它们之间具有如下代数相关性. 首先根据 Cramer 法则, 对任意 $n+1$ 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathcal{V}^n$, 有 $\sum_{i=1}^{n+1} a_i [a_1 \cdots \check{a}_i \cdots a_{n+1}] = 0$. 等式两边同时与向量 b 做内积, 得到

$$\sum_{i=1}^{n+1} (a_i \cdot b) [a_1 \cdots \check{a}_i \cdots a_{n+1}] = 0. \quad (2.12)$$

这个关系称为内积 Grassmann-Plücker 关系. 其次, 设 I_n 是定义对偶的 n -片, 则有 Laplace 展开

$$\begin{aligned} [a_1 \cdots a_n][b_1 \cdots b_n] &= ((a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_n))(I_n^{-1} \cdot I_n^{-1}) \\ &= (I_n^T \cdot I_n) \det(a_i \cdot b_j)_{i,j=1,\dots,n}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.12) 和 (2.13) 生成作用于各种向量变元的括号和内积之间的所有代数关系.

回顾在平面几何中, 设 e_1 和 e_2 是 \mathbb{R}^2 的一组单位正交基, 则 $I_2 = e_1 \wedge e_2$ 给出平面的一个定向. 对任意向量 $a, b \in \mathbb{R}^2$, 有

$$a \cdot b = |a||b| \cos \angle(a, b), \quad a \wedge b = |a||b| I_2 \sin \angle(a, b), \quad (2.14)$$

其中 $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是沿着定向 \mathbf{I}_2 给出的从 \mathbf{a} 到 \mathbf{b} 的转角, 称为正向旋转角. 如果沿着定向 $-\mathbf{I}_2$ 从 \mathbf{a} 到 \mathbf{b} 旋转, 称为负向旋转, 则转角为 $-\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \bmod 2\pi$.

由于 $\mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{I}_2 = -1$, 由 \mathbf{I}_2 通过内积生成的实代数是复数域 \mathbb{C} . 事实上, 如果定义如下的复括号:

$$\langle \mathbf{a}\mathbf{b} \rangle_{\mathbb{C}} := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i[\mathbf{a}\mathbf{b}], \quad (2.15)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, 则

$$\frac{\langle \mathbf{a}\mathbf{b} \rangle_{\mathbb{C}}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + i \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = e^{i\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \quad (2.16)$$

表示由向量 \mathbf{a} 到 \mathbf{b} 的正向旋转. 设对 $1 \leq j \leq r$, 从向量 \mathbf{a}_j 到 \mathbf{b}_j 的正向旋转为 \mathbf{R}_j , 则这 r 个旋转的复合为

$$\prod_{j=1}^r \frac{\langle \mathbf{a}_j \mathbf{b}_j \rangle_{\mathbb{C}}}{|\mathbf{a}_j||\mathbf{b}_j|} = e^{i \sum_{j=1}^r \angle(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j)}. \quad (2.17)$$

Clifford 代数的基本想法是通过推广 (2.15) 为如下的乘积:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \quad (2.18)$$

把由 (2.17) 表示的二维旋转推广到 n 维. 严格的定义如下: 对于任意域上的内积空间 \mathcal{V}^n , 由关系 $\mathbf{a}\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ (对任意 $\mathbf{a} \in \mathcal{V}^n$) 生成的泛结合代数被称为 Clifford 代数 $CL(\mathcal{V}^n)$, 其中的乘法被称为几何积.

作为向量空间, $CL(\mathcal{V}^n)$ 与 $\Lambda(\mathcal{V}^n)$ 同构. 对于任意 $\mathbf{A} \in CL(\mathcal{V}^n)$, 其 r -向量部分记为 $\langle \mathbf{A} \rangle_r$, 由此定义了从 $CL(\mathcal{V}^n)$ 到 $\Lambda(\mathcal{V}^n)$ 的线性映射 “ $\langle \cdot \rangle_r$ ”, 称为 r -阶投影算子, 其逆称为 r -阶消阶算子 (ungrading). r -阶投影算子作用到 $\mathbf{A} \in CL(\mathcal{V}^n)$ 的像称为 \mathbf{A} 的 r -阶分量. 特别地, 当 $r = 0$ 或 $r = n$ 时, 引入记号

$$\langle \mathbf{A} \rangle := \langle \mathbf{A} \rangle_0, \quad [\mathbf{A}] := [\langle \mathbf{A} \rangle_n], \quad (2.19)$$

分别称之为尖括号和方括号. 称由它们生成的交换环为 Clifford 括号代数.

在 $CL(\mathcal{V}^n)$ 中定义转置算子 \mathbf{T} 如下:

$$(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_r)^{\mathbf{T}} := \mathbf{a}_r \mathbf{a}_{r-1} \cdots \mathbf{a}_1, \quad \forall \mathbf{a}_i \in \mathcal{V}^n. \quad (2.20)$$

该算子线性扩充定义到整个 $CL(\mathcal{V}^n)$ 上. 它与分阶投影算子交换. 作为推论, 有如下交换性: 对任意 r -向量 \mathbf{A}_r 和 s -向量 \mathbf{B}_s , 有

$$\langle \mathbf{A}_r \mathbf{B}_s \rangle_{r+s-2l} = (-1)^{rs-l} \langle \mathbf{B}_s \mathbf{A}_r \rangle_{r+s-2l}. \quad (2.21)$$

对任意 $\mathbf{b}, \mathbf{a}_i \in \mathcal{V}^n$, 有

$$\mathbf{a}\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_r + (-1)^{r-1} \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_r \mathbf{a} = 2 \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \check{\mathbf{b}}_i \cdots \mathbf{b}_r. \quad (2.22)$$

类似地, 可以得到尖括号和方括号的以下内部对称性: 设 $\mathbf{a}_i \in \mathcal{V}^n$, 则

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l} \rangle &= \langle \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l} \mathbf{a}_1 \rangle = \langle \mathbf{a}_{2l} \cdots \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \rangle, \\ [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l}] &= (-1)^{n-1} [\mathbf{a}_{n+2l} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l-1}] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [\mathbf{a}_{n+2l} \mathbf{a}_{n+2l-1} \cdots \mathbf{a}_1]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

分阶投影算子具有如下的 Caianiello 展开形式^[20]: 设 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_k$, 其中 $\mathbf{a}_i \in \mathcal{V}^n$. 对任意 $0 \leq l \leq [k/2]$, 有

$$\langle \mathbf{A} \rangle_{k-2l} = \sum_{(2l, k-2l) \vdash \mathbf{A}} \text{pf}(\mathbf{A}_{(1)}) (\wedge \mathbf{A}_{(2)}), \quad (2.24)$$

这里

(1) $\mathbf{A}_{(1)} = \mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_{2l}}$ 和 $\mathbf{A}_{(2)} = \mathbf{a}_{i_{2l+1}}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ 是分割序列 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ 得到的两个子序列, 其长度分别是 $2l$ 和 $k - 2l$, 分割产生的序列置换符号包含在记号 $\mathbf{A}_{(1)}$ 中;

(2) $\wedge \mathbf{A}_{(2)} = \mathbf{a}_{i_{2l+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{i_k}$;

(3) $\text{pf}(\mathbf{A}_{(1)})$ 是内积矩阵 $(\mathbf{a}_{i_u} \cdot \mathbf{a}_{i_v})_{u,v=1, \dots, 2l}$ 的 Pfaffian.

特别地, 当 $k = 2l$ 时,

$$\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l} \rangle = \text{pf}((\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)_{i,j=1, \dots, 2l}) = \frac{1}{2^l l!} \sum_{\sigma \in S_{2l}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^l (\mathbf{a}_{\sigma(2i-1)} \cdot \mathbf{a}_{\sigma(2i)}); \quad (2.25)$$

当 $k = n + 2l$ 时,

$$[\mathbf{A}] = \sum_{(2l, n) \vdash \mathbf{A}} \langle \mathbf{A}_{(1)} \rangle [\mathbf{A}_{(2)}]. \quad (2.26)$$

在内积括号代数中, 行列式和向量间的内积经 (2.25) 和 (2.26) 分别扩充为方括号和尖括号, 从而内积括号代数被扩充为 Clifford 括号代数.

在 $CL(\mathcal{V}^n)$ 中, 有限个向量变元做几何积的结果被称为 Clifford 单项式, 其中的向量变元计算重数的个数被称为单项式的次数. 一个 Clifford 单项式是奇 (偶) 的, 如果它是奇数个 (偶数个) 向量变元的乘积. 一个幂零单项式是由幂零向量变元经几何积得到的 Clifford 单项式. 由幂零单项式的尖括号和方括号生成的交换环, 被称为零括号代数.

单分阶 Clifford 单项式是 Clifford 单项式的分阶投影像, 如 $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{r+2i} \rangle_r$, 其中 $\mathbf{a}_i \in \mathcal{V}^n$. 一般的分阶 Clifford 单项式是向量变元经几何积、对偶和各种分阶投影算子复合作用的结果. 分阶 Clifford 单项式张成的线性空间仍记为 $CL(\mathcal{V}^n)$, 称为分阶 Clifford 空间. 该空间在几何积、对偶和分阶投影算子下封闭, 称为 \mathcal{V}^n 上的几何代数^[19].

例如, 当 $\mathcal{V}^n = \mathbb{R}^2$ 时, 设 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 是 \mathbb{R}^2 的一组单位正交基, 设 $\mathbf{I}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$. 对任意 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, 有

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|(\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathbf{I}_2 \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|e^{\mathbf{I}_2 \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})}. \quad (2.27)$$

对任意单位向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{2k} \in \mathbb{R}^2$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k} &= e^{\mathbf{I}_2 \sum_{l=1}^k \angle(\mathbf{a}_{2l-1}, \mathbf{a}_{2l})}, \\ \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k} \rangle &= \cos \left(\sum_{l=1}^k \angle(\mathbf{a}_{2l-1}, \mathbf{a}_{2l}) \right), \\ [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k}] &= \sin \left(\sum_{l=1}^k \angle(\mathbf{a}_{2l-1}, \mathbf{a}_{2l}) \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

用 $CL^+(\mathbb{R}^2)$ 表示由 \mathbf{I}_2 经几何积生成的 2 维子代数. 根据 $\mathbf{I}_2^2 = \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{I}_2 = -1$,

$$\mathbf{g}(x_1 + \mathbf{I}_2 x_2) := x_1 + \mathbf{i}x_2, \quad \forall x_i \in \mathbb{R} \quad (2.29)$$

是 $CL^+(\mathbb{R}^2)$ 到复数域 \mathbb{C} 作为实代数的同构. 在这一同构下, 转置算子对应于复共轭

$$\mathbf{g}((x_1 + \mathbf{I}_2 x_2)^T) = \overline{x_1 + ix_2}. \quad (2.30)$$

映射

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) := \mathbf{e}_1 \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.31)$$

映 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ 为 $x_1 + \mathbf{I}_2 x_2$. 复合映射

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \circ \mathbf{g}' : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots &\mapsto \mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

给出 \mathbb{R}^2 的经典复数表示. 对任意 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, 有

$$\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \overline{\mathbf{g}'(\mathbf{a})} \mathbf{g}'(\mathbf{b}) = \mathbf{g}'(\mathbf{a})^T \mathbf{g}'(\mathbf{b}) = \mathbf{g}(\mathbf{a}\mathbf{b}). \quad (2.33)$$

3 Euclid 几何的共形模型与共形几何代数

Euclid 几何的经典模型是 Euclid 向量空间, 其中的向量既表示点又表示方向. n 维空间中过两点 $\mathbf{1}$ 和 $\mathbf{2}$ 的直线由动量 $\mathbf{1} \wedge \mathbf{2}$ 和方向 $\vec{\mathbf{12}} = \mathbf{2} - \mathbf{1}$ 表示^[21]: 任一点 $\mathbf{3}$ 在直线 $\mathbf{12}$ 上当且仅当 $\mathbf{3} \wedge (\mathbf{2} - \mathbf{1}) = \mathbf{1} \wedge \mathbf{2}$. 这种表示看似依赖于直线上的点 $\mathbf{1}$ 和 $\mathbf{2}$ 的选取, 但是容易证明, 直线的这一表示差一非零数量因子唯一: $(\mathbf{1} \wedge \mathbf{2}, \mathbf{2} - \mathbf{1})$ 与 $(\mathbf{1}' \wedge \mathbf{2}', \mathbf{2}' - \mathbf{1}')$ 表示同一直线当且仅当存在 $\lambda \neq 0$ 使得

$$(\mathbf{1}' \wedge \mathbf{2}', \mathbf{2}' - \mathbf{1}') = \lambda(\mathbf{1} \wedge \mathbf{2}, \mathbf{2} - \mathbf{1}) = (\lambda \mathbf{1} \wedge \mathbf{2}, \lambda(\mathbf{2} - \mathbf{1})). \quad (3.1)$$

类似地, 对任意 $1 \leq r \leq n+1$, 由仿射无关的点 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ 张成的 $r-1$ 维仿射子空间具有动量 - 方向表示 $(\mathbf{A}_r, \partial(\mathbf{A}_r))$, 其中 $\mathbf{A}_r = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_r$, 以及

$$\partial(\mathbf{A}_r) = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \wedge (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1) \wedge \dots \wedge (\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_1) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \check{\mathbf{a}}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_r, \quad (3.2)$$

使得任意点 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 在该仿射子空间上当且仅当 $\mathbf{a} \wedge \partial(\mathbf{A}_r) = \mathbf{A}_r$. 特别地, 当 $r=1$ 时, 点 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 具有动量 - 方向表示 $(\mathbf{a}, 1)$, 这就是众所周知的齐次坐标表示: 对任意仿射点 \mathbf{a} , 有 $\partial(\mathbf{a}) = 1$; 而对无穷远点 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, 作为两个仿射点之差, $\partial(\mathbf{b}) = 1$. 以线性方式推广边缘算子“ ∂ ”到 $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ 上, 得到 (3.2) 的一般形式: 对任意表示仿射点或无穷远点的 $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\partial(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_r) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \partial(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \check{\mathbf{a}}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_r. \quad (3.3)$$

\mathbb{R}^n 中的任一仿射子空间可以赋予两个相反的定向. 对于仿射超平面 $(\mathbf{A}_n, \partial(\mathbf{A}_n))$, 其中 $\partial(\mathbf{A}_n) \neq 0$, 它的定向由 $\partial(\mathbf{A}_n)$ 决定. 一个等价的表示是该超平面的 (左手) 法向

$$\mathbf{n} = \frac{(\partial(\mathbf{A}_n))^\sim}{|\partial(\mathbf{A}_n)|}, \quad (3.4)$$

它满足 $[\mathbf{n}\partial(\mathbf{A}_n)] > 0$.

\mathbb{R}^n 中的任一球面也可以赋予两个相反的定向. 设 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ 是 $n+1$ 个仿射无关的点, 即 $\mathbf{J}_n = \partial(\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{n+1}) \neq 0$, 则 \mathbf{J}_n 给出过这 $n+1$ 个仿射点的唯一超球面的一个定向. 若 $[\mathbf{J}_n] > 0$, 则称超球面具有正定向, 否则称超球面具有负定向. 设 \mathbf{x} 是超球面上一点, \mathbf{o} 是球心, 则 $(\mathbf{x} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{J}_n$ 给出超球面在 \mathbf{x} 处的切空间定向, 称为诱导定向. 由 (3.4), 该切空间的法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{J}_n](\mathbf{x} - \mathbf{o})}{|\mathbf{J}_n| |\mathbf{x} - \mathbf{o}|}. \quad (3.5)$$

当 $[\mathbf{J}_n] > 0$ 时, \mathbf{n} 指向球外, 是球面的外法向; 当 $[\mathbf{J}_n] < 0$ 时, \mathbf{n} 指向球心, 是球面的内法向. 因此, 超球面的正定向也称外定向, 负定向也称内定向.

Euclid 几何的共形模型是 19 世纪提出的一种在非 Euclid 几何中实现 Euclid 几何的非线性模型 [22]. 在 $n+2$ 维 Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中, 正交变换群双覆盖 \mathbb{R}^n 上的共形变换群, 覆盖同态的核为 $\pm id$. 由此 \mathbb{R}^n 上的共形变换可以通过 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 上的正交变换表示, 这是共形模型一词的由来. 在 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中取定一个 Minkowski 平面和其上的一组 Witt 基底 \mathbf{e} 和 \mathbf{e}_0 , 满足

$$\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_0^2 = 0, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_0 = -1. \quad (3.6)$$

该 Minkowski 平面的正交补是 n 维 Euclid 空间, 记为 \mathbb{R}^n , 其上的一组单位正交基底记为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. 定义

$$\mathcal{N}_e := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1,1} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0, \mathbf{x} \cdot \mathbf{e} = -1\}. \quad (3.7)$$

\mathcal{N}_e 上两元素 \mathbf{u} 与 \mathbf{v} 之间可以定义距离函数 $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}$.

定义

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{N}_e, \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{e}_0 + \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

则 \mathbf{f} 是从 \mathbb{R}^n 到 \mathcal{N}_e 的满射等距映射, 其逆为从 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 到子空间 \mathbb{R}^n 的正交投影. 特别地, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{f}(0)$ 对应于 \mathbb{R}^n 的原点, 而 \mathbf{e} 是 \mathbb{R}^n 上的向量趋于无穷远时的共同极限, 称为 \mathbb{R}^n 的共形无穷远点. $(\mathcal{N}_e, \mathbf{f})$ 称为 \mathbb{R}^n 的共形模型. 设 $d_{\mathbf{u}\mathbf{v}}$ 是 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{N}_e$ 表示的 \mathbb{R}^n 中两个点之间的距离, 则由

$$d_{\mathbf{u}\mathbf{v}}^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

得到

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\frac{d_{\mathbf{u}\mathbf{v}}^2}{2}. \quad (3.9)$$

例如, 当 $n=2$ 时, 在 $\mathbb{R}^{3,1}$ 中取 $\mathbf{e} = (0, 0, 1, 1)$ 和 $\mathbf{e}_0 = (0, 0, -1, 1)/2$, 则对任意点 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, 有

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{2}, \frac{x_1^2 + x_2^2 + 1}{2} \right). \quad (3.10)$$

如果引入平面上点的复坐标, 设 $\mathbf{a} = x_1 + ix_2$, 则在 $\mathbb{R}^{3,1}$ 的西变换

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & & \\ & 1 & -i & \\ & & 1 & 1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

作用下, $\mathbf{f}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{3,1}$ 变为 \mathbb{C}^4 中的点

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}, \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}, 1). \quad (3.11)$$

可见在复坐标下, 共形模型具有非常简洁的形式.

显然, 共形模型依赖于 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中两个幂零向量 \mathbf{e} 和 \mathbf{e}_0 的选取. 当不改变 \mathbf{e} 的选取时, 如果 \mathbf{e}_0 的选取从 $\mathbf{f}(0)$ 变成 $\mathbf{f}(\mathbf{o})$, 其中 $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n = (\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_0)^\sim$, 则对任一点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 表示 n 维 Euclid 空间 $(\mathbf{e} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{o}))^\sim$ 中的下列点, 它由 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 向 $(\mathbf{e} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{o}))^\sim$ 做正交投影得到:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{o} + (\mathbf{o} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{o}))\mathbf{e}. \quad (3.12)$$

向量 \mathbf{y} 在 $\mathbb{R}^n = (\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_0)^\sim$ 上的投影是 $\mathbf{x} - \mathbf{o}$. 这表明当 \mathbf{e}_0 换成 $\mathbf{f}(\mathbf{o})$ 时, 在 \mathbb{R}^n 上诱导了从新原点 \mathbf{o} 到旧原点的平移 $-\mathbf{o}$.

如果 Minkowski 平面 $\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_0$ 不动, 但是在共形模型中向量 \mathbf{e} 和 \mathbf{e}_0 互换, 则对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\mathbf{e} + \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^2}{2}\mathbf{e}_0 = \frac{\mathbf{x}^2}{2} \left(\mathbf{e}_0 + 2\mathbf{x}^{-1} + \frac{(2\mathbf{x}^{-1})^2}{2}\mathbf{e} \right) = \frac{\mathbf{x}^2}{2}\mathbf{f}(2\mathbf{x}^{-1}), \quad (3.13)$$

即点 \mathbf{x} 被映为 $2\mathbf{x}^{-1}$. 这是 \mathbb{R}^n 上关于球心在原点、半径为 $\sqrt{2}$ 的超球面的反演 (inversion).

如果 \mathbf{e} 和 \mathbf{e}_0 被换成另外一对向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{N}_e$, 满足 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$, 则通过共形模型, 在 $\mathbb{R}^n = (\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_0)^\sim$ 上进行了以下共形变换: 首先是一个平移, 把 \mathbf{e} 和 \mathbf{e}_0 变成 \mathbf{e} 和 \mathbf{a} ; 其次是一个反演, 把 \mathbf{e} 和 \mathbf{a} 变成 \mathbf{a} 和 \mathbf{e} ; 最后是另一个平移, 把 \mathbf{a} 和 \mathbf{e} 变成 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} .

$\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中所有幂零向量在由差非零系数相等而确定的等价关系下, 所构成的等价类集合记为 \mathcal{N} . 它同胚于 n 维球面. n 维 Euclid 几何的泛齐次模型^[1]指 $(\mathcal{N}, \mathbf{e})$. 当 \mathbb{R}^n 中的共形变换表示为 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中的正交变换时, 一个共形变换是 \mathbb{R}^n 中的 Euclid 变换当且仅当表示它的 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中的正交变换 (共有两个, 差一符号相同) 固定集合 $\{\pm\mathbf{e}\}$.

与共形模型相比, 泛齐次模型不再固定 Euclid 空间中的原点. 在这一模型中, $\mathbf{e} \in \mathcal{N}$ 依然表示共形无穷远点, 而幂零向量 $\mathbf{a} \in \mathcal{N}$ 表示 \mathbb{R}^n 中的仿射点当且仅当 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} \neq 0$. 该模型是共形模型的射影化, 其中任何表达式关于它的每个向量变元都是齐次的. 泛齐次模型对符号计算更为有利, 而在进行几何解释时, 共形模型更为适用. 建立在共形模型或泛齐次模型基础上的几何代数都称为共形几何代数^[14].

设 \mathbb{R}^n 上有一个单纯形, 其顶点为 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$, 设 $S_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n+1}}$ 是该单纯形的带符号体积. 设单纯形的外接超球面的球心为 \mathbf{o} 、半径为 ρ . 设 \mathbf{x}_{n+2} 为 \mathbb{R}^n 上任一点, 则

$$\begin{aligned} [e\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \cdots \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1})] &= n! S_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n+1}}, \\ [\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \cdots \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+2})] &= (-1)^n \frac{n!}{2} (\rho^2 - d_{\mathbf{o}\mathbf{x}_{n+2}}^2) S_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n+1}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

特别地, \mathbb{R}^n 上任意 $n+2$ 个点共超平面或超球面当且仅当表示这些点的幂零向量线性相关. 在此意义下, 可以用 $\mathbf{e} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ 表示点 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 张成的超平面, 而当 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$ 不共超平面时, 用 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1})$ 表示过点 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$ 的超球面.

对于一般的 $0 \leq r \leq n-1$, 经过 \mathbb{R}^n 中 $r+2$ 个仿射无关的点 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+2}$ 的 r 维球面可以用 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_{r+2})$ 表示. 由 $r+1$ 个仿射无关的点 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+1}$ 张成的 r 维平面可以用 $\mathbf{e} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_{r+1})$ 表示. 这些表示都是差一系数唯一的. 这些 $\Lambda(\mathbb{R}^{n+1,1})$ 中的 $(r+2)$ -片都具

有 Minkowski 指标. 反过来, $\Lambda(\mathbb{R}^{n+1,1})$ 中的任一具有 Minkowski 指标的 $(r+2)$ -片都表示一个 r 维平面或球面, 并且表示一个平面当且仅当它包含共形无穷远点 e .

在以上意义下, 以点 $c = f(o)$ 为球心、 ρ 为半径的超球面具有表示

$$\left(o - \frac{\rho^2}{2}e\right)^\sim. \quad (3.15)$$

原因如下: 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$f(x) \wedge \left(c - \frac{\rho^2}{2}e\right)^\sim = \left(f(x) \cdot c - \frac{\rho^2}{2}f(x) \cdot e\right)^\sim = \frac{(\rho^2 - d_{xo}^2)^\sim}{2},$$

从而, $f(x) \in (c - \rho^2 e/2)^\sim$ 当且仅当 $\rho = d_{xo}$.

如果 $\Lambda(\mathbb{R}^{n+1,1})$ 中的 $(n+1)$ -片 A_{n+1} 表示一个定向超球面, 具有球心 $c \in \mathcal{N}_e$ 和半径 ρ , 则由 $e \cdot (c - \rho^2 e/2) = -1$ 和 $e \cdot A_{n+1}^\sim = [eA_{n+1}]$, 得

$$c - \frac{\rho^2}{2}e = -\frac{A_{n+1}^\sim}{[eA_{n+1}]} = -A_{n+1}(e \wedge A_{n+1})^{-1}. \quad (3.16)$$

由此得到

$$c = -\frac{A_{n+1}^\sim e A_{n+1}^\sim}{2[eA_{n+1}]^2}, \quad \rho^2 = -\frac{A_{n+1}^\sim \cdot A_{n+1}}{[eA_{n+1}]^2}. \quad (3.17)$$

当球面是 r 维时, 它的 $(r+2)$ -片表示 A_{r+2} 与球心 c 、半径 ρ 具有类似的关系:

$$c - \frac{\rho^2}{2}e = -A_{r+2}(e \wedge A_{r+2})^{-1}. \quad (3.18)$$

例如, 当 $n = 2$ 时, 圆 **123** (点用幂零向量表示) 可表示为 $\mathbf{1} \wedge \mathbf{2} \wedge \mathbf{3}$, 其圆心的幂零向量表示为

$$[e\mathbf{123}](\mathbf{1} \wedge \mathbf{2} \wedge \mathbf{3})^\sim + (\mathbf{1} \cdot \mathbf{2})(\mathbf{1} \cdot \mathbf{3})(\mathbf{2} \cdot \mathbf{3})e, \quad (3.19)$$

其半径的平方为

$$\rho^2 = -2 \frac{(\mathbf{1} \cdot \mathbf{2})(\mathbf{1} \cdot \mathbf{3})(\mathbf{2} \cdot \mathbf{3})}{[e\mathbf{123}]^2}. \quad (3.20)$$

此即圆内接三角形的正弦定理:

$$\rho = \frac{d_{12}d_{23}d_{31}}{4|S_{123}|} = \frac{d_{12}d_{23}d_{31}}{2d_{23}d_{31}|\sin(\angle 132)|} = \frac{d_{12}}{2|\sin(\angle 132)|}. \quad (3.21)$$

类似地, 以单位方向 $n \in \mathbb{R}^n$ 为法向、以 $\delta \in \mathbb{R}$ 为截距 (沿方向 n 从原点到超平面的带符号距离) 的超平面具有表示

$$(n + \delta e)^\sim. \quad (3.22)$$

虽然 \mathcal{N}_e 与 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 等距, 但前者显然不是仿射空间. 集合

$$e \wedge \mathcal{N}_e = \{e \wedge a \mid a \in \mathcal{N}_e\} = \{e \wedge (e_0 + v) \mid v \in \mathbb{R}^n\} \quad (3.23)$$

是 n 维仿射空间, 其无穷远空间为

$$e \wedge \mathbb{R}^n = \{e \wedge a \mid a \in \mathbb{R}^{n+1,1}, a \cdot e = 0\}. \quad (3.24)$$

$e \wedge \mathcal{N}_e$ 被称为 \mathbb{R}^n 中的仿射点在共形模型中的仿射表示, (3.24) 被称为 \mathbb{R}^n 中的方向 (位移向量) 在共形模型中的仿射表示. 类似地, \mathbb{R}^n 中的一个 r 维方向在共形模型中的仿射表示形如 $e \wedge \mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_r$, 其中 $\mathbf{a}_i \in e^\sim$ 是正向量.

球面或平面定向的表示在 Euclid 几何的构造中是重要的. 例如, 当 $n = 2$ 时, 平面上以点 $\mathbf{1}$ (幂零向量表示) 为中心的正向 90° 旋转, 把点 $\mathbf{2}$ (幂零向量表示) 变为

$$(e \cdot \mathbf{2})\mathbf{1} + (\mathbf{1} \cdot \mathbf{2})e + (e \wedge \mathbf{1} \wedge \mathbf{2})^\sim, \quad (3.25)$$

而以点 $\mathbf{1}$ 为中心的负向 90° 旋转, 把点 $\mathbf{2}$ 变为

$$(e \cdot \mathbf{2})\mathbf{1} + (\mathbf{1} \cdot \mathbf{2})e - (e \wedge \mathbf{1} \wedge \mathbf{2})^\sim. \quad (3.26)$$

在共形模型中, 设 \mathbf{A}_{r+2} 是任一具有 Minkowski 指标的 $(r+2)$ -片, 则 $\pm \mathbf{A}_{r+2}$ 表示同一 r 维球面或平面但具有相反的定向. 下面对此进行论证, 并导出几个计算定向的公式. 设 $\mathbf{I}_n = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, 其中 e_1, \dots, e_n 是 $\mathbb{R}^n = (e \wedge e_0)^\sim$ 的一组单位正交基, 且

$$C^\sim = \frac{C \cdot ((e \wedge e_0)\mathbf{I}_n)}{((e \wedge e_0)\mathbf{I}_n) \cdot ((e \wedge e_0)\mathbf{I}_n)} = C(e \wedge e_0)\mathbf{I}_n^{-1}, \quad \forall C \in \Lambda(\mathbb{R}^{n+1,1}). \quad (3.27)$$

经过仿射无关的点 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+1} \in \mathbb{R}^n$ 的 r 维仿射平面具有表示

$$\mathbf{A}_{r+2} = e \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_{r+1}) = e\mathbf{B}_{r+1} + (e \wedge e_0)\partial(\mathbf{B}_{r+1}), \quad (3.28)$$

其中 $\mathbf{B}_{r+1} = \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{r+1} \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$. (3.28) 右端是该平面的动量 - 方向表示 $(\mathbf{B}_{r+1}, \partial(\mathbf{B}_{r+1}))$ 在共形模型中的二项分解形式, 而左端是单项形式.

回顾在 \mathbb{R}^n 中, 由点 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ 决定的仿射超平面具有定向 $\mathbf{J}_{n-1} = \partial(\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n)$, 其法向为 $\mathbf{n} = \mathbf{J}_{n-1} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} / |\mathbf{J}_{n-1} \cdot \mathbf{I}_n^{-1}|$. 在共形模型中, 根据 (3.28), 超平面

$$\mathbf{A}_{n+1} = e \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = e\mathbf{B}_n + (e \wedge e_0)\mathbf{J}_{n-1}$$

的定向 \mathbf{J}_{n-1} 满足

$$\mathbf{J}_{n-1} = (e \wedge e_0) \cdot \mathbf{A}_{n+1}. \quad (3.29)$$

因此, $\pm \mathbf{A}_{n+1}$ 具有相反的定向. 此外, 根据 (3.4), 可得

$$\mathbf{A}_{n+1}^\sim = \mathbf{A}_{n+1}(e \wedge e_0)\mathbf{I}_n^{-1} = e(\mathbf{B}_n \cdot \mathbf{I}_n^{-1}) + \mathbf{J}_{n-1} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} = (\mathbf{n} + \delta e)|\mathbf{J}_{n-1} \cdot \mathbf{I}_n^{-1}|, \quad (3.30)$$

从而由 $(\mathbf{n} + \delta e)^\sim$ 表示的超平面与用 \mathbf{A}_{n+1} 表示的同一超平面具有相同的定向:

$$\mathbf{n} + \delta e = \frac{\mathbf{A}_{n+1}^\sim}{|\mathbf{A}_{n+1}|}. \quad (3.31)$$

由点 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ 决定的超球面具有定向 $\mathbf{J}_n = \partial(\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{n+1})$. 在共形模型中, 超球面具有表示 (参见文献 [1])

$$\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}) = e_0 \wedge \mathbf{J}_n + \frac{1}{2}e \wedge \mathbf{C}_n + \frac{1}{2}e \wedge e_0 \wedge \mathbf{D}_{n-1}, \quad (3.32)$$

其中 \mathbf{C}_n 和 \mathbf{D}_{n-1} 分别是 $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ 中的 n -片和 $(n-1)$ -片. 因此, \mathbf{J}_n 满足

$$\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{I}_n^{-1} = (e \wedge e_0)(e \wedge \mathbf{A}_{n+1})\mathbf{I}_n^{-1} = [e\mathbf{A}_{n+1}]. \quad (3.33)$$

由 \mathbf{A}_{n+1} 表示的超球面具有正 (或负) 定向当且仅当 $[\mathbf{e}\mathbf{A}_{n+1}] > 0$ (或 < 0). 特别地, $\pm\mathbf{A}_{n+1}$ 表示具有相反定向的同一个超球面. 如果超球面用 $(\mathbf{f}(\mathbf{o}) - \rho^2\mathbf{e}/2)^{\sim}$ 表示, 则因为 $[\mathbf{e}(\mathbf{f}(\mathbf{o}) - \rho^2\mathbf{e}/2)^{\sim}] = \mathbf{e} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{o}) = -1$, 超球面 $(\mathbf{f}(\mathbf{o}) - \rho^2\mathbf{e}/2)^{\sim}$ 具有负定向. 注意这并不意味着超球面 $(\mathbf{f}(\mathbf{o}) - \rho^2\mathbf{e}/2)^{\sim}$ 具有正定向.

引理 3.1 设 \mathbf{s}_1 和 \mathbf{s}_2 是 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中的两个正向量, 且 \mathbf{s}_1^{\sim} 和 \mathbf{s}_2^{\sim} 表示 \mathbb{R}^n 中的两个相交的定向超球面或超平面. 设 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是位于相交处的一个点. 对于 $i = 1, 2$, 当 \mathbf{s}_i^{\sim} 表示超球面时, 设 $\mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^n$ 是超球面在点 \mathbf{x} 处的单位法向量; 当 \mathbf{s}_i^{\sim} 表示超平面时, 设 $\mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^n$ 是超平面的单位法向量, 则

$$\frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{\|\mathbf{s}_1\| \|\mathbf{s}_2\|} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2. \tag{3.34}$$

特别地, 超球面或超平面 \mathbf{s}_1^{\sim} 和 \mathbf{s}_2^{\sim} 垂直相交当且仅当 $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0$.

证明 当 \mathbf{s}_i 变成 $-\mathbf{s}_i$ 时, \mathbf{n}_i 变成 $-\mathbf{n}_i$, 而结论 (3.34) 保持不变. 因此, 当 \mathbf{s}_i^{\sim} 表示超球面时, 可设 $\mathbf{s}_i = \mathbf{f}(\mathbf{o}_i) - \rho_i^2\mathbf{e}/2$, 其中 \mathbf{o}_i 和 ρ_i 分别是球心和半径; 当 \mathbf{s}_i^{\sim} 表示超平面时, 可设 $\mathbf{s}_i = \mathbf{n}_i + \delta_i\mathbf{e}$, 其中 \mathbf{n}_i 和 δ_i 分别是单位法向量和超平面相对于原点的截距.

当 \mathbf{s}_1^{\sim} 和 \mathbf{s}_2^{\sim} 全是超球面或全是超平面时, 直接代入 \mathbf{s}_1 和 \mathbf{s}_2 的表达式即可验证结论. 当 $\mathbf{s}_1^{\sim} = (\mathbf{f}(\mathbf{o}_1) - \rho_1^2\mathbf{e}/2)^{\sim}$ 和 $\mathbf{s}_2^{\sim} = (\mathbf{n}_2 + \delta_2\mathbf{e})^{\sim}$ 时, 设 $\mathbf{s} = \mathbf{n}_2 + \tau\mathbf{e}$, 其中变量 $\tau \in \mathbb{R}$ 连续变化, 使得开始时 $\tau = \tau_0$. 相应地, 超平面 \mathbf{s}^{\sim} 与超球面 \mathbf{s}_1^{\sim} 相切, 且 \mathbf{n}_2 是切点 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 处超球面 \mathbf{s}_1^{\sim} 的法向 (即内法向) \mathbf{n}_1 . 之后超平面 \mathbf{s}^{\sim} 向球心方向平移: 在经过球心之前, 在任一交点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 处始终有 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 > 0$; 当超平面经过球心时, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$; 在越过球心之后, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 < 0$. 在平移过程中, 交点 \mathbf{x} 和该点处的超球面 \mathbf{s}_1^{\sim} 法向量 \mathbf{n}_1 均随参数 τ 连续变化.

容易验证 $|\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}| = \|\mathbf{s}_1\| \|\mathbf{s}\| |\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|$ 对超球面 \mathbf{s}_1^{\sim} 和超平面 \mathbf{s}^{\sim} 成立. 为得到 $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}$ 与 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ 同号, 根据以上分析, 只需验证当 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$, 即 $\tau = \tau_0$ 时, 有

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s} = \left(\mathbf{f}(\mathbf{o}_1) - \frac{\rho_1^2}{2}\mathbf{e} \right) \cdot (\mathbf{n}_2 + \tau_0\mathbf{e}) > 0.$$

这时向量 \mathbf{o}_1 和 \mathbf{x}_0 都与 \mathbf{n}_1 线性相关, 且 $\mathbf{x}_0 = \tau_0\mathbf{n}_2$. 设 $\mathbf{o}_1 = \lambda_1\mathbf{n}_2$, 其中 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, 则

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{f}(\mathbf{o}_1) - \frac{\rho_1^2}{2}\mathbf{e} \right) \cdot (\mathbf{n}_2 + \tau_0\mathbf{e}) &= \mathbf{f}(\mathbf{o}_1) \cdot (\mathbf{n}_2 + \tau_0\mathbf{e}) \\ &= (\mathbf{e}_0 + \lambda_1\mathbf{n}_2) \cdot (\mathbf{n}_2 + \tau_0\mathbf{e}) \\ &= -\tau_0 + \lambda_1 \\ &= (\mathbf{o}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}_1 \\ &= \rho_1 > 0. \end{aligned}$$

证毕. □

设某 r 维球面具有定向 $\mathbf{J}_{r+1} \in \Lambda^{r+1}(\mathbb{R}^n)$ 和中心 $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$, 则对球面上任一点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 该球面在 \mathbf{x} 点处的切平面的诱导定向由 $(\mathbf{x} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{J}_{r+1}$ 给出. 特别是当 $r = n - 1$ 时, 点 \mathbf{x} 处切超平面的诱导定向还可用法方向 $(\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{I}_n^{-1})(\mathbf{x} - \mathbf{o})$ 表示.

定理 3.1 设 $(r + 2)$ -片 \mathbf{A}_{r+2} 表示 \mathbb{R}^n 中的一个 r 维球面, 零向量 $\mathbf{a} \in \mathcal{N}_{\mathbf{e}}$ 表示该球面上的一个点, 则 $-\mathbf{e} \wedge (\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}_{r+2})$ 表示该球面在点 \mathbf{a} 处的 r 维切平面, 并具有诱导定向.

证明 首先证明 $e \wedge (a \cdot \mathbf{A}_{r+2})$ 是一个平面, 并与球面 \mathbf{A}_{r+2} 切于点 a . 由已知条件, 点 a 在球面 \mathbf{A}_{r+2} 上, 因此, Minkowski 空间 \mathbf{A}_{r+2} 具有 Witt 分解^[1]

$$\mathbf{A}_{r+2} = a \wedge b \wedge C_r, \quad (3.35)$$

其中 b 是幂零向量, $a \cdot b = -1$, 并且 C_r 为具有 Euclid 指标的 r -片, 与 a 和 b 均正交. 由此,

$$a \cdot \mathbf{A}_{r+2} = a \cdot (a \wedge b \wedge C_r) = a \wedge C_r \quad (3.36)$$

是 $(r+1)$ -片, 具有指标 $(r, 0, 1)$. 由于 $e \notin \mathbf{A}_{r+2}$, 从而, $e \wedge (a \cdot \mathbf{A}_{r+2}) \neq 0$. 由于 $(r+2)$ -片 $e \wedge (a \cdot \mathbf{A}_{r+2}) = e \wedge a \wedge C_r$ 包含两个线性无关的幂零向量 e 和 a , 它必然是 Minkowski 的, 并表示一个 r 维平面.

现在 $(r+2)$ -片 $e \wedge (a \cdot \mathbf{A}_{r+2})$ 和 \mathbf{A}_{r+2} 包含同一个 $(r+1)$ -片 $a \cdot \mathbf{A}_{r+2}$. 根据 (3.36), $a \cdot \mathbf{A}_{r+2}$ 只有一个一维幂零子空间. 因此, 平面 $e \wedge (a \cdot \mathbf{A}_{r+2})$ 和球面 \mathbf{A}_{r+2} 必然相切. 下面证明 $-e \wedge (a \cdot \mathbf{A}_{r+2})$ 具有诱导定向.

设置原点 e_0 在平面 $e \wedge \mathbf{A}_{r+2}$ 上. 设球面 \mathbf{A}_{r+2} 的球心和半径分别为 o 和 ρ , 其中 $o \in \mathbb{R}^n$. 由 (3.18) 可得

$$e \wedge f(o) = -(e \cdot \mathbf{A}_{r+2})(e \wedge \mathbf{A}_{r+2})^{-1}. \quad (3.37)$$

r 维平面 $-e \wedge (a \cdot \mathbf{A}_{r+2}) = a \cdot (e \wedge \mathbf{A}_{r+2}) + \mathbf{A}_{r+2}$ 的定向是

$$(e \wedge e_0) \cdot (a \cdot (e \wedge \mathbf{A}_{r+2}) + \mathbf{A}_{r+2}) \in \Lambda^r(\mathbb{R}^n). \quad (3.38)$$

r 维球面 \mathbf{A}_{r+2} 的定向是 $(e \wedge e_0) \cdot (e \wedge \mathbf{A}_{r+2})$. 它在点 a 处的切平面上的诱导定向是

$$\begin{aligned} & (f^{-1}(a) - o) \cdot \{(e \wedge e_0) \cdot (e \wedge \mathbf{A}_{r+2})\} \\ &= (e \wedge e_0 \wedge (a - f(o))) \cdot (e \wedge \mathbf{A}_{r+2}) \\ &= (e \wedge e_0 \wedge a) \cdot (e \wedge \mathbf{A}_{r+2}) - \{e_0 \cdot ((e \cdot \mathbf{A}_{r+2})(e \wedge \mathbf{A}_{r+2})^{-1})\} \cdot (e \wedge \mathbf{A}_{r+2}) \\ &= (e \wedge e_0) \cdot (a \cdot (e \wedge \mathbf{A}_{r+2})) - e_0 \cdot \{((e \cdot \mathbf{A}_{r+2})(e \wedge \mathbf{A}_{r+2})^{-1}) \cdot (e \wedge \mathbf{A}_{r+2})\} \\ &= (e \wedge e_0) \cdot (a \cdot (e \wedge \mathbf{A}_{r+2}) + \mathbf{A}_{r+2}). \end{aligned}$$

结果与 (3.38) 一致. 当原点 e_0 不在平面 $e \wedge \mathbf{A}_{r+2}$ 上时, 关于定向一致的证明与上面类似. \square

推论 3.1 对 \mathbb{R}^n 中的定向超球面或超平面 $s^{-\sim}$, 在其上一点 $a \in \mathcal{N}_e$ 处的法方向具有仿射表示

$$e \wedge (s + (e \cdot s)a). \quad (3.39)$$

4 幂零奇单项式的分阶投影像的几何解释

一个分阶 Clifford 单项式被称为幂零的, 如果它的向量变元都是幂零的. 由于 Euclid 空间中的点在共形模型中由幂零向量表示, 这些幂零向量相乘得到的 Clifford 单项式和分阶 Clifford 单项式自然具有 Euclid 几何意义. 在使用共形几何代数进行几何计算时, 常常需要这些幂零单项式和分阶幂零单项式的几何解释. 在探讨这些几何解释之前, 首先建立关于幂零向量的若干一般性质.

命题 4.1 对任意 $C \in CL(\mathcal{V}^n)$ 、任意幂零向量 a 和任意 $0 \leq i \leq n$, 有

$$\langle aCa \rangle_i = a \langle C \rangle_i a = 2(a \cdot \langle C \rangle_i) \wedge a = 2(a \wedge \langle C \rangle_i) \cdot a. \quad (4.1)$$

证明 当 $i = 0$ 时, 结论是平凡的. 设 $i > 0$, 则 C 只有它的 i - 阶部分才对 $\langle aCa \rangle_i$ 有贡献. 因此不妨设 $C = C_i$ 是一个 i - 向量. 这样, $\langle aC_i a \rangle_i = aC_i a$. 根据

$$aC_i = a \cdot C_i + a \wedge C_i, \quad C_i a = (-1)^{i-1}(a \cdot C_i - a \wedge C_i),$$

得到

$$a \cdot C_i = \frac{1}{2}(aC_i + (-1)^{i-1}C_i a), \quad a \wedge C_i = \frac{1}{2}(aC_i - (-1)^{i-1}C_i a). \quad (4.2)$$

因此,

$$(a \cdot C_i)a = \frac{1}{2}aC_i a = (a \wedge C_i)a,$$

即 $aC_i a = 2(a \cdot C_i) \wedge a = 2(a \wedge C_i) \cdot a$. □

推论 4.1 对任意 $a_i \in \mathcal{V}^n$, 如果 a_1 是幂零向量, 则

$$\begin{aligned} \langle a_1 a_2 \cdots a_{2l} a_1 \rangle_1 &= 2 \langle a_1 a_2 \cdots a_{2l} \rangle a_1, \\ \langle a_1 a_2 \cdots a_{n+2l} a_1 \rangle_{n-1} &\stackrel{\sim}{=} (-1)^{n-1} 2 [a_1 a_2 \cdots a_{n+2l}] a_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

令

$$A = a_1 a_2 \cdots a_k \neq 0, \quad (4.4)$$

其中 $a_i \in \mathbb{R}^{n+1,1}$ 是幂零向量, $k \geq 3$. 由 (4.1), 如果差一数量因子 $a_k = a_1$, 则当 $\langle A \rangle_{k-2l}$ 是一个非零 $(k-2l)$ - 片时, 与定理 3.1 中的证明类似, 可以得到 $\langle A \rangle_{k-2l}$ 的指标是 $(k-2l-1, 0, 1)$, 因而, $\langle A \rangle_{k-2l}$ 只含有一个幂零方向, 即 a_1 . 由于

$$A = \sum_{l=0}^{[k/2]} \langle A \rangle_{k-2l}, \quad (4.5)$$

从而 A 本质上只含有一个幂零方向. 在 $n = 2$ 的情形, 这类幂零单项式表示点 (或共形无穷远点) a_1 和该点处的一个旋转或切方向, 详细内容将在第 6 节的推论 6.1 和定理 6.1 中讲述.

设 $a_1 \cdot a_k \neq 0$. 如果 A 是片, 则由于 $a_1 A = A a_k = 0$, 从而 $a_1 \wedge A = a_k \wedge A = 0$, 含有 Minkowski 平面 $a_1 \wedge a_k$ 的 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中向量子空间 A 必为 Minkowski 的. 由于 $a_1 \cdot A = a_k \cdot A = 0$, Minkowski 空间 A 与它包含的 Minkowski 平面 $a_1 \wedge a_k$ 完全正交, 这是不可能的. 因此 A 不是片.

设

$$\begin{aligned} M &= \text{最大的 } i \in \mathbb{N}, \text{ 使得 } \langle A \rangle_i \neq 0, \text{ 但对任意的 } j > i, \langle A \rangle_j = 0; \\ m &= \text{最小的 } i \in \mathbb{N}, \text{ 使得 } \langle A \rangle_i \neq 0, \text{ 但对任意的 } j < i, \langle A \rangle_j = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

由于 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 是 Minkowski 的, 根据文献 [14, 命题 6.86], $\langle A \rangle_m$ 和 $\langle A \rangle_M$ 都是片, 并且 $\langle A \rangle_m \in \Lambda(\langle A \rangle_M)$.

命题 4.2 设非零幂零单项式 $A = a_1 a_2 \cdots a_k \in CL(\mathbb{R}^{n+1,1})$, 其中 a_1 与 a_k 线性无关. 对于由 (4.6) 定义的 $M, m \in \mathbb{N}$, 当 $m > 0$ 时, $\langle A \rangle_m$ 表示过两点 (可能有共形无穷远点) a_1 和 a_k 的一个 $n-m$ 维球面或平面; 当 $M < n+2$ 时, $\langle A \rangle_M$ 表示过两点 (可能有共形无穷远点) a_1 和 a_k 的一个 $M-2$ 维球面或平面.

证明 当 $m > 0$ 时, 根据

$$0 = \langle a_1 A \rangle_{m-1} = a_1 \cdot \langle A \rangle_m, \quad 0 = \langle A a_k \rangle_{m-1} = \langle A \rangle_m \cdot a_k,$$

$(n+2-m)$ -片 $\langle \mathbf{A} \rangle_m^\sim$ 包含两个线性无关的幂零向量 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_k ; 它必然是 Minkowski 的, 从而表示过点 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_k 的一个 $n-m$ 维球面或平面. 类似地, 当 $M < n+2$ 时, 有

$$\mathbf{a}_1 \wedge \langle \mathbf{A} \rangle_M = \mathbf{a}_k \wedge \langle \mathbf{A} \rangle_M = 0,$$

从而片 $\langle \mathbf{A} \rangle_M$ 是 Minkowski 的, 并表示过点 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_k 的一个 $M-2$ 维球面或平面. \square

当 $M = m+2$ 时, 两个球面或平面 $\langle \mathbf{A} \rangle_m^\sim$ 和 $\langle \mathbf{A} \rangle_M$ 的维数和为 n ; 这时在 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中, 子空间 $\langle \mathbf{A} \rangle_m^\sim$ 与子空间 $\langle \mathbf{A} \rangle_M$ 的交是 Minkowski 平面 $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_k$, 从而在 \mathbb{R}^n 中, 由 $\langle \mathbf{A} \rangle_m^\sim$ 和 $\langle \mathbf{A} \rangle_M$ 分别表示的 $n-m$ 和 m 维球面或平面只有两个交点 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_k , 在交点处的切平面完全正交. 这时由其中的一个球面或平面可以完全决定另外一个球面或平面.

例如, 当 $n = 2$ 时, 对平面上 3 个不共线的点 $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3} \in \mathcal{N}_e$:

- $\langle \mathbf{e12} \rangle_3$ 表示直线 $\mathbf{12}$, $\langle \mathbf{e12} \rangle_1^\sim$ 表示过点 $\mathbf{2}$ 并垂直于直线 $\mathbf{12}$ 的直线, $\langle \mathbf{1e2} \rangle_1^\sim$ 表示以 $\mathbf{12}$ 为直径的圆周.

- $\langle \mathbf{123} \rangle_3$ 表示圆周 $\mathbf{123}$. 当 $\mathbf{13}$ 是圆周 $\mathbf{123}$ 的直径时, $\langle \mathbf{123} \rangle_1^\sim$ 表示该直径; 否则 $\langle \mathbf{123} \rangle_1^\sim$ 表示一个圆周, 它过点 $\mathbf{1}$ 和 $\mathbf{3}$ 并与圆周 $\mathbf{123}$ 垂直.

- 圆周 $\langle \mathbf{123} \rangle_3$ 在点 $\mathbf{1}$ 处的法方向为 $e \wedge (-e \cdot \mathbf{1} \langle \mathbf{123} \rangle_3^\sim + [\mathbf{e123}]\mathbf{1})$, 圆周 $\langle \mathbf{123} \rangle_1^\sim$ 在点 $\mathbf{1}$ 处的法方向为 $e \wedge (-e \cdot \mathbf{1} \langle \mathbf{123} \rangle_1 + \langle \mathbf{e123} \rangle_1)$.

- 直线 $\langle \mathbf{e12} \rangle_3$ 的法方向为 $e \wedge \langle \mathbf{e12} \rangle_3^\sim$, 直线 $\langle \mathbf{123} \rangle_1^\sim$ 的法方向为 $e \wedge \langle \mathbf{123} \rangle_1$.

作为 (2.22) 的直接推论, 有下列引理:

引理 4.1 (幂零向量基本引理) 设 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathcal{V}^n$. 若 $\mathbf{a}_1^2 = 0$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_k \mathbf{a}_1 &= 2 \sum_{i=2}^k (-1)^i \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i (\mathbf{a}_2 \cdots \check{\mathbf{a}}_i \cdots \mathbf{a}_k \mathbf{a}_1) \\ &= 2 \sum_{i=2}^k (-1)^{k-i} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \check{\mathbf{a}}_i \cdots \mathbf{a}_k). \end{aligned} \quad (4.7)$$

特别地,

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 = 2(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_1, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 = 2\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle_1 \mathbf{a}_1 = 2\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle_1 \wedge \mathbf{a}_1. \quad (4.9)$$

命题 4.3 (有理幂零展开) 设 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+2l} \in \mathcal{V}^n$, 其中 $\mathbf{a}_1^2 = 0$. 若 $\mathbf{a}_{n+2l-1}^2 = 0$, 则

$$(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{n+2l-1}) \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-1} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_{n+2l-1} \wedge \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-3}; \quad (4.10)$$

若 $\mathbf{a}_{n+2l}^2 = 0$, 则

$$(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{n+2l}) \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l} \rangle_n = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_{n+2l} \wedge \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l} \rangle_{n-2}. \quad (4.11)$$

证明 两个等式的证明类似. 下面只证明 (4.10). 一方面,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l-1} \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-1} \\ &= \mathbf{a}_1 \wedge \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-3} \wedge \mathbf{a}_{n+2l-1} + \langle \mathbf{a}_1 \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-1} \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-1}. \end{aligned}$$

另一方面, 由 $\mathbf{a}_1 \wedge \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-1} = \mathbf{a}_{n+2l-1} \wedge \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-1} = 0$, 得

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_1 \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-1} \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-1} &= (-1)^n \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{n+2l-1} \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-1} \rangle_{n-1} \\ &= (-1)^n (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{n+2l-1}) \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n+2l-1} \rangle_{n-1}. \end{aligned}$$

证毕. □

推论 4.2 当 \mathcal{V}^n 中的 n 等于 4 时, 设 $\mathbf{a}_1^2 = \mathbf{a}_{2l+1}^2 = 0$, 则

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{2l+1}) \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1 \tilde{\sim} &= \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_{2l+1} \wedge \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3 \tilde{\sim}, \\ (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{2l+1}) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} &= \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{2l+1} \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1 = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{2l+1}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

本文着重研究用于 2 维 Euclid 几何计算的 $CL(\mathbb{R}^{3,1})$ 中的分阶幂零单项式及其几何解释. 设幂零向量 $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^{3,1}$. 在 $CL(\mathbb{R}^{3,1})$ 中共有以下 6 种单分阶幂零单项式:

- 第 1 组: $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1$, $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$;
- 第 2 组: $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l} \rangle$, $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l} \rangle_4$;
- 第 3 组: $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l} \rangle_2$.

本节考察第 1 组分阶幂零单项式在 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_{2l+1} 线性无关时的情形. 第 5 节将考察第 2 组分阶幂零单项式, 第 6 节将考察第 3 组分阶幂零单项式和第 1 组分阶幂零单项式在 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{2l+1}$ 时的情形.

引理 4.2 设 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{3,1}$ 是幂零向量, $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in CL(\mathbb{R}^{3,1})$ 是两个奇的 Clifford 单项式. 标记

$$\langle \mathbf{aA} \rangle_{0,4} := \langle \mathbf{aA} \rangle_0 + \langle \mathbf{aA} \rangle_4, \tag{4.13}$$

则

$$\langle \mathbf{aAaA}' \rangle_{0,4} = 2\langle \mathbf{aA} \rangle_{0,4} \langle \mathbf{aA}' \rangle_{0,4}; \tag{4.14}$$

或者等价地,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \mathbf{aAaA}' \rangle &= \langle \mathbf{aA} \rangle \langle \mathbf{aA}' \rangle - [\mathbf{aA}] [\mathbf{aA}'], \\ \frac{1}{2} [\mathbf{aAaA}'] &= \langle \mathbf{aA} \rangle [\mathbf{aA}'] + [\mathbf{aA}] \langle \mathbf{aA}' \rangle. \end{aligned} \tag{4.15}$$

证明 易知 $\mathbf{aA} + \mathbf{A}^T \mathbf{a} = 2\langle \mathbf{aA} \rangle_{0,4}$. 从而,

$$\langle \mathbf{aAaA}' \rangle_{0,4} = \langle (\mathbf{aA} + \mathbf{A}^T \mathbf{a}) \mathbf{aA}' \rangle_{0,4} = 2\langle \langle \mathbf{aA} \rangle_{0,4} \mathbf{aA}' \rangle_{0,4} = 2\langle \mathbf{aA} \rangle_{0,4} \langle \mathbf{aA}' \rangle_{0,4}.$$

证毕. □

引理 4.3 设 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{3,1}$ 是幂零向量, $\mathbf{B}, \mathbf{B}' \in CL(\mathbb{R}^{3,1})$ 是两个偶的 Clifford 单项式, 则

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{aB} \rangle_1 \cdot \langle \mathbf{aB}' \rangle_1 &= \langle \mathbf{aB} \rangle_3 \cdot \langle \mathbf{aB}' \rangle_3 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{aBaB}' \rangle, \\ \langle \mathbf{aB} \rangle_1 \cdot \langle \mathbf{aB}' \rangle_3 \tilde{\sim} &= \frac{1}{2} [\mathbf{aBaB}']. \end{aligned} \tag{4.16}$$

证明 易知 $\mathbf{aB} + \mathbf{B}^T \mathbf{a} = 2\langle \mathbf{aB} \rangle_1$. 从而,

$$\langle \mathbf{aB} \rangle_1 \cdot \langle \mathbf{aB}' \rangle_1 = \frac{1}{2} \langle (\mathbf{aB} + \mathbf{B}^T \mathbf{a}) \langle \mathbf{aB}' \rangle_1 \rangle = \frac{1}{2} \langle (\mathbf{aB} + \mathbf{B}^T \mathbf{a}) \mathbf{aB}' \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{aBaB}' \rangle.$$

其他两个等式可类似证明. □

定理 4.1 对任意幂零向量 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^{3,1}$, 当 k 是奇数时,

$$\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k \rangle_3^2 = \langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k \rangle_1^2 = -2^{k-2} (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) \cdots (\mathbf{a}_{k-1} \cdot \mathbf{a}_k) (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_1); \quad (4.17)$$

当 k 是偶数时,

$$\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k \rangle^2 + [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k]^2 = 2^{k-2} (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) \cdots (\mathbf{a}_{k-1} \cdot \mathbf{a}_k) (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_1). \quad (4.18)$$

证明 当 k 为偶数时, 在 (4.15) 的第一个等式中, 令 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_k$ 和 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^T = \mathbf{a}_k \cdots \mathbf{a}_2$, 反复应用 (4.8), 得

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{A} \rangle \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{A}' \rangle - [\mathbf{a}_1 \mathbf{A}] [\mathbf{a}_1 \mathbf{A}'] &= 2^{-1} \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_k \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_k \cdots \mathbf{a}_2 \rangle \\ &= 2^{k-2} (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_1) (\mathbf{a}_{k-1} \cdot \mathbf{a}_k) \cdots (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2). \end{aligned}$$

由尖括号和方括号的对称性 (2.23), 得

$$\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{A} \rangle \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{A}' \rangle - [\mathbf{a}_1 \mathbf{A}] [\mathbf{a}_1 \mathbf{A}'] = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{A} \rangle \langle \mathbf{A} \mathbf{a}_1 \rangle - [\mathbf{a}_1 \mathbf{A}] [\mathbf{A} \mathbf{a}_1] = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{A} \rangle^2 + [\mathbf{a}_1 \mathbf{A}]^2.$$

当 k 为奇数时, 根据引理 4.3, 对 (4.17) 可类似证明. \square

推论 4.3 设 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_k$, $\mathbf{B} = \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_l$, 其中 $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^{3,1}$ 是幂零向量, 则

(1) $\mathbf{A} = 0$ 当且仅当存在 $1 \leq i < k$ 使得 \mathbf{a}_i 与 \mathbf{a}_{i+1} 线性相关;

(2) 当 $\mathbf{A} \neq 0$ 且 $\mathbf{B} \neq 0$ 时, 如果 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 差一数量因子相等, 则 \mathbf{a}_1 与 \mathbf{b}_1 线性相关, 且 \mathbf{a}_k 与 \mathbf{b}_l 线性相关.

证明 只要对 (2) 进行证明. 如果 $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{B}$, 其中 $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, 则当 \mathbf{a}_1 与 \mathbf{b}_1 线性无关时, $0 = \mathbf{a}_1 \mathbf{A} = \lambda \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_k \neq 0$, 矛盾. 同理可证 \mathbf{a}_k 与 \mathbf{b}_l 线性相关. \square

定理 4.2 设在 $\mathbb{R}^{3,1}$ 中 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2l+1} \in \{\mathbf{e}\} \cup \mathcal{N}_e$, 且 $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_{2l+1}$, 并对任意 $1 \leq i \leq 2l$, $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{a}_{i+1}$, 则 $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1^\sim$ 和 $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 表示一对相互垂直的圆周或直线, 交点为 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_{2l+1} (可能其中含有共形无穷远点).

(1) 当 $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{e}$ 时, 圆周 (或直线) $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1^\sim$ 在点 \mathbf{a}_1 处的切方向是

$$\mathbf{e} \wedge (\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3^\sim + [\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1}] \mathbf{a}_1). \quad (4.19)$$

它可由圆周 (或直线) $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 在同一点处的切方向负向旋转 90° 得到, 即是后者的法方向. 圆周 (或直线) $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 在点 \mathbf{a}_1 处的切方向是

$$\mathbf{e} \wedge (\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1 + [\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1}] \mathbf{a}_1). \quad (4.20)$$

(2) 当 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}$ 时, 直线 $\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1^\sim$ 的方向是 $-\mathbf{e} \wedge \langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3^\sim$. 它可由直线 $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 的方向正向旋转 90° 获得, 即是后者的法向相反方向. 直线 $\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 的方向是

$$-\mathbf{e} \wedge \langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1.$$

证明 由 (4.17) 知, $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1^2 > 0$, 且 $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3^2 > 0$, 所以, $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1^\sim$ 和 $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 表示两个圆周或直线. 由命题 4.3 可知, 这两个圆周或直线均过两点 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_{2l+1} . 由

$$\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1 \cdot \langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3^\sim = 0,$$

这两个圆周或直线相互正交.

当 $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{e}$ 时, 设 $\mathbf{e}_0 = \mathbf{a}_1$. 由推论 3.1 知, 圆周或直线 $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1^\sim$ 在点 \mathbf{a}_1 处切线的法方向是

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1) = -\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1 - \langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle \mathbf{a}_1. \quad (4.21)$$

设 $\mathbf{I}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ 给出 \mathbb{R}^2 的正定向, 则 $CL(\mathbb{R}^{3,1})$ 中的对偶是关于 $(\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}_1)\mathbf{I}_2$ 的. 由定理 3.1 可知, 在原点 \mathbf{a}_1 处定向圆周或直线 $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 的切线是 $-\mathbf{e} \wedge (\mathbf{a}_1 \cdot \langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3)$. 由命题 4.3 可知, 该切线在 \mathbb{R}^2 中的法方向 \mathbf{n}_3 计算如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_3 &= -(\mathbf{e} \wedge (\mathbf{a}_1 \cdot \langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3))^\sim \\ &= -\frac{(\mathbf{e} \wedge (\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_{2l+1} \wedge \langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1)))^\sim}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{2l+1}} \\ &= (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}_1 \wedge \langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1)^\sim \\ &= \{ \langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1 (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}_1) - \langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1 \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}_1) \} (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}_1) \mathbf{I}_2^{-1} \\ &= \langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1 \mathbf{I}_2^{-1} + \langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle \mathbf{a}_1 \mathbf{I}_2^{-1} \\ &= \mathbf{n}_1 \mathbf{I}_2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

因此, 方向 \mathbf{n}_3 由 \mathbf{n}_1 正向旋转 90° 获得. 圆周或直线 $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1^\sim$ 在点 \mathbf{a}_1 处的切方向由 \mathbf{n}_1 正向旋转 90° 而得, 因而正好与 \mathbf{n}_3 一致, 其仿射表示为 $\mathbf{e} \wedge (\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3^\sim + [\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1}] \mathbf{a}_1)$. 圆周或直线 $\langle \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 在点 \mathbf{a}_1 处的切方向是 $-\mathbf{n}_1$.

当 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}$ 时, \mathbf{a}_{2l+1} 表示一个仿射点, 直线 $\langle (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1})^\mathbf{T} \rangle_1^\sim$ 的方向由直线 $\langle (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1})^\mathbf{T} \rangle_3$ 的方向在点 \mathbf{a}_{2l+1} 处负向旋转 90° 获得. 由 $\langle (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1})^\mathbf{T} \rangle_1 = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1$ 和 $\langle (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1})^\mathbf{T} \rangle_3 = -\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 得知, 在该点直线 $\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1^\sim$ 的方向由直线 $\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 的方向正向旋转 90° 获得. 因而, 直线 $\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 的方向正好是直线 $\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1^\sim$ 的 (左手) 法向, 其仿射表示为 $-\mathbf{e} \wedge \langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1$; 直线 $\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_1^\sim$ 的方向是直线 $\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3$ 的法向相反方向, 其仿射表示为 $-\mathbf{e} \wedge \langle \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l+1} \rangle_3^\sim$. 证毕. \square

5 长括号的三角学

本节探讨 $n = 2$ 时在 $CL(\mathbb{R}^{3,1})$ 中的长括号 $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l} \rangle$ 和 $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l}]$ 的几何解释, 其中 $l > 1$, $\mathbf{a}_i \in \mathcal{N}_e \cup \{\mathbf{e}\}$, 并且如果 $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{e}$, 则 $\mathbf{a}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$, 其中 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$. 因为如果 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$, 则

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \cdots \mathbf{a}_{2l} = 0;$$

如果 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3$, 则

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \cdots \mathbf{a}_{2l} = 2(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \cdots \mathbf{a}_{2l};$$

由括号的对称性 (2.23), 可以假设对任意 $1 \leq i \leq 2l$, 有

$$\mathbf{a}_i \notin \{ \mathbf{a}_{i+1 \bmod 2l}, \mathbf{a}_{i+2 \bmod 2l} \}.$$

记号 1 当 $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \in \mathcal{N}_e$ 时, 标记

$$\overrightarrow{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j} := \overrightarrow{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2, \quad d_{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j} := |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|. \quad (5.1)$$

首先考察 $l = 2$ 的情形. 当 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}$ 时, 容易验证以下等式:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{ea}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4 \rangle = \overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \cdot \overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2} = d_{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} d_{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \cos \angle(\overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4}, \overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2}), \\ [\mathbf{ea}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4] = (\overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \wedge \overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2}) \cdot \mathbf{I}_2^{-1} = d_{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} d_{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \sin \angle(\overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4}, \overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2}), \end{cases} \quad (5.2)$$

其中 $\angle(\overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4}, \overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2}) \in [0, 2\pi)$ 表示平面上由向量 $\overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4}$ 到向量 $\overline{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2}$ 的正向旋转角度, $\mathbf{I}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ 给出 \mathbb{R}^2 的定向.

当 $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{e}$ 时, 根据本节开始时的假设, \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 和 \mathbf{a}_4 均不为 \mathbf{e} , 因而表示平面上的点. 当点 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 和 \mathbf{a}_3 不共线时, 设 $S_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}$ 是三角形 $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ 的带符号面积、 $\rho_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}$ 是外接圆半径、 $\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}$ 是三角形外接圆在点 \mathbf{a}_1 处的单位外法向量. 当点 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 和 \mathbf{a}_3 共线时, 设 $\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}$ 是直线 $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3$ 的法向.

命题 5.1 设 $\mathbf{a}_i \in \mathcal{N}_e$.

(1) 当 $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3$ 和 $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_4$ 均表示圆周 (简称为 $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ 和 $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4$ 均为圆周) 时,

$$\langle \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4 \rangle = -8 \frac{\rho_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} \rho_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4}}{d_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3}^2} S_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} S_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \cos \angle(\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}, \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4}); \quad (5.3)$$

(2) 当 $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ 为直线、 $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4$ 为圆周时,

$$\langle \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4 \rangle = -2 \frac{d_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} \rho_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4}}{d_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3}} S_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \cos \angle(\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}, \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4}); \quad (5.4)$$

(3) 二者均为直线时,

$$\langle \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4 \rangle = -\frac{1}{2} d_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} d_{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} d_{\mathbf{a}_4\mathbf{a}_1} \cos \angle(\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}, \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4}). \quad (5.5)$$

证明 (1) 容易验证以下等式:

$$\langle \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4 \rangle = \frac{1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_4). \quad (5.6)$$

由 (3.17) 和 (3.34) 可得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_4) \\ &= (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3)^\sim \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_4)^\sim \\ &= [\mathbf{ea}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3][\mathbf{ea}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4] \rho_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} \rho_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \\ &= 4S_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} S_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \rho_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} \rho_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \cos \angle(\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}, \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4}). \end{aligned}$$

(2) 由 (3.17)、(3.31) 和 (3.34) 可得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3)^\sim \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_4)^\sim \\ &= |\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3| [\mathbf{ea}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4] \rho_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \\ &= d_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3} d_{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} S_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \rho_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4} \cos \angle(\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}, \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4}). \end{aligned}$$

(3) 由 (3.31) 和 (3.34) 可得

$$(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3)^\sim \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_4)^\sim$$

$$\begin{aligned}
 &= |\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3| |\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_4| \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} \\
 &= \frac{1}{4} d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3}^2 d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4} d_{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} d_{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} \cos \angle(\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}, \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4}).
 \end{aligned}$$

证毕. □

命题 5.2 设 $\mathbf{a}_i \in \mathcal{N}_e$.

(1) 当 $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ 和 $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4$ 都是圆周时,

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_4] = -8 \frac{\rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} S_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} S_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4}}{d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3}^2} \sin \angle(\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}, \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4}); \quad (5.7)$$

(2) 当 $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ 是直线、 $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4$ 是圆周时,

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4] = -2 \frac{d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4}}{d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3}} S_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} \sin \angle(\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}, \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4}); \quad (5.8)$$

(3) 二者都是直线时,

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4] = -\frac{1}{2} d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} d_{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} d_{\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_1} \sin \angle(\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}, \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4}). \quad (5.9)$$

证明 以下只证明 (5.7). 容易验证以下等式:

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4] = \frac{\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle_1 \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_4)^\sim}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3}. \quad (5.10)$$

设圆周 $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle_1^\sim$ 的圆心和半径为 (\mathbf{c}_1, ρ_1) , 在点 \mathbf{a}_1 处的单位外法向量为 \mathbf{n}_1 , 其中 $\mathbf{c}_1 \in \mathcal{N}_e$. 设 $\mathbf{s}_1 = \mathbf{c}_1 - \rho_1^2 \mathbf{e} / 2$. 由于 \mathbf{s}_1^\sim 在点 \mathbf{a}_1 处的法向朝外, 根据 $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{e} = -1$, 得知圆周 $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle_1^\sim$ 在点 \mathbf{a}_1 处的法向为

$$-(\mathbf{e} \cdot \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle_1) \mathbf{n}_1 = -\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{n}_1.$$

类似地, 圆周 $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle_3$ 在点 \mathbf{a}_1 处的法向为

$$-(\mathbf{e} \cdot \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle_3^\sim) \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} = [\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}. \quad (5.11)$$

由定理 4.2 证明中的 (4.22) 可得

$$\frac{\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle}{|\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle|} \mathbf{n}_1 = \frac{[\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]}{|[\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]|} \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \mathbf{I}_2. \quad (5.12)$$

根据 (3.17) 和 (4.17) 可得

$$\rho_1 = \frac{|\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle_1|}{|\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle|} = \frac{|\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle_3|}{|\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle|} = \rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \frac{|[\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]|}{|\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle|},$$

即

$$|[\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]| : |\langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle| = \rho_1 : \rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}.$$

将它代入 (5.12), 得

$$\rho_1 \langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{n}_1 = \rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} [\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \mathbf{I}_2. \quad (5.13)$$

最后, 由 (3.34) 和 (5.13) 可得

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle_1 \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_4) \sim \\
 & = \langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle [\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4] \rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} \\
 & = [\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] [\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4] \rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} (\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \wedge \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4}) \mathbf{I}_2^{-1} \\
 & = 4S_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} S_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} \rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \rho_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} \sin \angle(\mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}, \mathbf{n}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4}).
 \end{aligned}$$

证毕. \square

自定向圆周或直线 $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ 到 $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5$ 的旋转角, 记为 $\angle(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5)$, 指由 $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ 在点 \mathbf{a}_1 处的法方向正向旋转到 $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5$ 在点 \mathbf{a}_1 处的法方向的角度. 显然, 它也等于由前者在点 \mathbf{a}_1 处的切方向正向旋转到后者在点 \mathbf{a}_1 处的切方向的角度.

命题 5.3 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \in \mathcal{N}_e$ 表示平面上 4 个不同点 (见图 1), 则

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \rangle & = -\frac{d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} d_{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} d_{\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_1}}{2} \cos \angle(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4), \\
 [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4] & = -\frac{d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} d_{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4} d_{\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_1}}{2} \sin \angle(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4).
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

证明 由 (4.18) 可得

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \rangle^2 + [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4]^2 & = 4(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3)(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4)(\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}_1) \\
 & = \frac{1}{4} d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}^2 d_{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}^2 d_{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4}^2 d_{\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_1}^2.
 \end{aligned}$$

由命题 5.1、5.2 和法方向关系 (5.11), 结论获证. \square

在角度 $\angle(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5)$ 中, \mathbf{a}_1 可以取共形无穷远点 e . 对直线 $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$ 和 $\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$, 有如下关系:

$$\angle(\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2, \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3) = -\angle(\overrightarrow{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}, \overrightarrow{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}) = \angle(\overrightarrow{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}, \overrightarrow{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1}) - \pi, \tag{5.15}$$

这时, (5.2) 可以写为

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle & = -d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \cos \angle(\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2, \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3), \\
 [\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] & = -d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} \sin \angle(\mathbf{e} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2, \mathbf{e} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3).
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

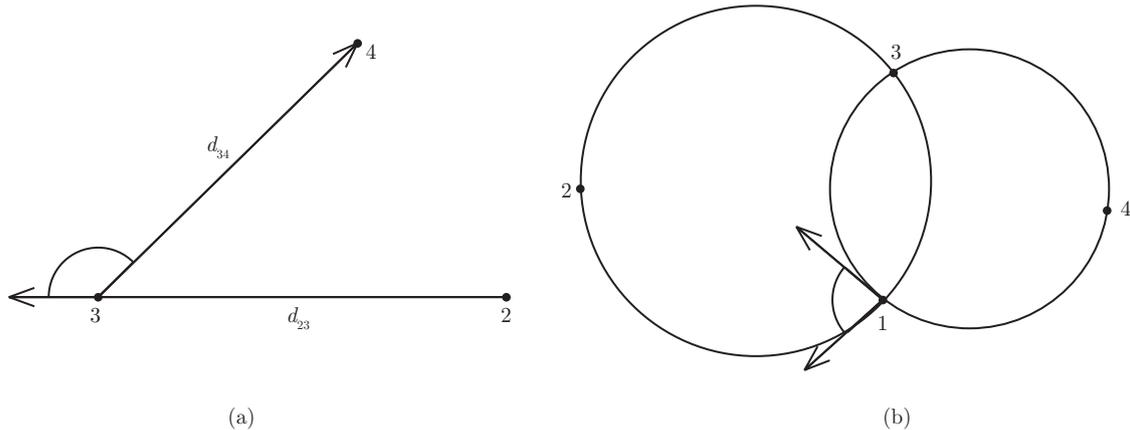


图 1 命题 5.3 的构型, 其中点 \mathbf{a}_i 被标记为 i . (a) 点 \mathbf{a}_1 在无穷远; (b) 所有点都有有限

记号 2 本节设

$$d_{ea_i} = d_{a_i e} = -\sqrt{2}, \tag{5.17}$$

从而使得 $e \cdot a_i = -d_{ea_i}^2/2$ 成立. 这里的负号是为了与仿射点之间的真实距离加以区分.

命题 5.4 设 $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathcal{N}_e \cup \{e\}$ 且两两不同, 则

$$\begin{aligned} \langle a_1 a_2 a_3 a_4 \rangle &= -\frac{d_{a_1 a_2} d_{a_2 a_3} d_{a_3 a_4} d_{a_4 a_1}}{2} \cos \angle(a_1 a_2 a_3, a_1 a_3 a_4), \\ [a_1 a_2 a_3 a_4] &= -\frac{d_{a_1 a_2} d_{a_2 a_3} d_{a_3 a_4} d_{a_4 a_1}}{2} \sin \angle(a_1 a_2 a_3, a_1 a_3 a_4). \end{aligned} \tag{5.18}$$

证明 根据 (5.14)、(5.16) 和括号对称性 (2.23), 只需要考虑 $a_2 = e$ 的情形. 这时只需要证明

$$\angle(a_1 a_2 a_3, a_1 a_3 a_4) = -\angle(a_2 a_3 a_4, a_2 a_4 a_1) \pmod{2\pi}. \tag{5.19}$$

以上等式在 $a_1 = e$ 时, 成立

$$\angle(\overrightarrow{a_2 a_3}, \overrightarrow{a_3 a_4}) = \angle(a_2 a_3 a_4, a_2 a_4 e) = \angle(t_{a_2 a_3 a_4}, \overrightarrow{a_2 a_4}), \tag{5.20}$$

其中 $t_{a_2 a_3 a_4}$ 是圆 $a_2 a_3 a_4$ 在点 a_2 处的切方向. 简单画图即可验证这一等式 (见图 2).

当 $a_2 = e$ 时, a_1 表示一个点. 这时可以通过关于以 a_1 为圆心的一个圆周的反演实现 a_1 与 a_2 互换. 它在 $\mathbb{R}^2 = (e \wedge e_0) \sim$ 上保角度但是反转定向, 即任何有向角度 α 变为 $-\alpha$. 由于 (5.19) 是角度的线性关系, 因此, 它在该共形映射下保持不变. \square

命题 5.5 设 $a_i \in \mathcal{N}_e \cup \{e\}$ 且两两不同 (见图 3), 则

$$\begin{aligned} \langle a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \rangle &= -\frac{d_{a_1 a_2} d_{a_2 a_3} d_{a_3 a_4} d_{a_4 a_5} d_{a_5 a_6} d_{a_6 a_1}}{2} \cos(\angle(a_1 a_2 a_3, a_1 a_3 a_4) \\ &\quad + \angle(a_1 a_4 a_5, a_1 a_5 a_6)), \\ [a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6] &= -\frac{d_{a_1 a_2} d_{a_2 a_3} d_{a_3 a_4} d_{a_4 a_5} d_{a_5 a_6} d_{a_6 a_1}}{2} \sin(\angle(a_1 a_2 a_3, a_1 a_3 a_4) \\ &\quad + \angle(a_1 a_4 a_5, a_1 a_5 a_6)). \end{aligned} \tag{5.21}$$

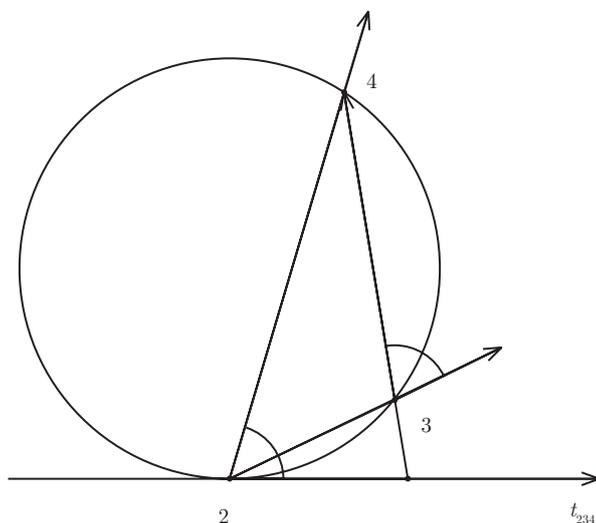


图 2 等式 (5.20), 其中点 a_i 被标记为 i

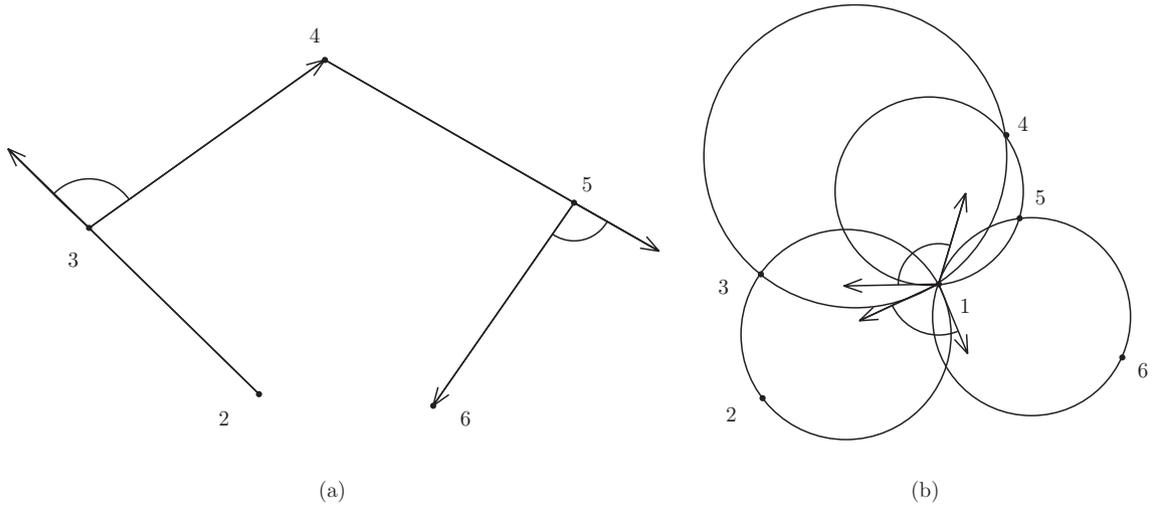


图 3 命题 5.5 的构型, 其中点 a_i 被标记为 i . (a) 点 a_1 在无穷远; (b) 所有点都有限

证明 当 a_1 和 a_4 均表示点时, 根据 $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6 / (2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_4)$, 结论可由 (4.15) 直接推出. 当 $a_1 = e$ 或 $a_4 = e$ 时, 由于 $2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_4 = -d_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4}^2$, 结论依然成立. 证毕. \square

下面的定理可以归纳证明.

定理 5.1 设 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2l} \in \mathcal{N}_e \cup \{e\}$ 满足 $\mathbf{a}_i \notin \{\mathbf{a}_{i+1 \bmod 2l}, \mathbf{a}_{i+2 \bmod 2l}\}$, 以及对任意 $i > 1$, 有 $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{a}_1$, 则

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l} \rangle &= -\frac{d_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}d_{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} \cdots d_{\mathbf{a}_{2l-1}\mathbf{a}_{2l}}d_{\mathbf{a}_{2l}\mathbf{a}_1}}{2} \cos(\angle(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4) \\ &\quad + \angle(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_1\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6) + \cdots + \angle(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_{2l-2}\mathbf{a}_{2l-1}, \mathbf{a}_1\mathbf{a}_{2l-1}\mathbf{a}_{2l})), \\ [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2l}] &= -\frac{d_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}d_{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} \cdots d_{\mathbf{a}_{2l-1}\mathbf{a}_{2l}}d_{\mathbf{a}_{2l}\mathbf{a}_1}}{2} \sin(\angle(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4) \\ &\quad + \angle(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_1\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6) + \cdots + \angle(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_{2l-2}\mathbf{a}_{2l-1}, \mathbf{a}_1\mathbf{a}_{2l-1}\mathbf{a}_{2l})). \end{aligned} \quad (5.22)$$

以上定理未覆盖幂零偶单项式 $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5 \cdots \mathbf{a}_1\mathbf{a}_{4l}\mathbf{a}_{4l+1}$ 的括号. 首先根据

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4 = 2(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4, \quad (5.23)$$

以及由 (4.7) 得到的如下关系:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5] &= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5] - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5], \\ -\frac{1}{2}\langle \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5 \rangle &= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2\langle \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5 \rangle - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3\langle \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5 \rangle, \end{aligned} \quad (5.24)$$

可以得到以下结果.

命题 5.6 设 $a_i \in \mathcal{N}_e$, 且 $a_2 \neq a_3$ 和 $a_4 \neq a_5$, 则

$$\begin{aligned}
 [ea_2a_3ea_4a_5] &= -2((a_3 - a_2) \wedge (a_5 - a_4)) \cdot I_2^{-1} \\
 &= 2d_{a_2a_3}d_{a_4a_5} \sin \angle(a_4a_5, a_2a_3) \\
 &= 2d_{a_2a_3}d_{a_4a_5} \sin \angle(ea_2a_3, ea_4a_5), \\
 \langle ea_2a_3ea_4a_5 \rangle &= 2(a_3 - a_2) \cdot (a_5 - a_4) \\
 &= 2d_{a_2a_3}d_{a_4a_5} \cos \angle(a_4a_5, a_2a_3) \\
 &= 2d_{a_2a_3}d_{a_4a_5} \cos \angle(ea_2a_3, ea_4a_5).
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

推论 5.1 对 $a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathcal{N}_e$, 直线 $a_2a_3 \parallel a_4a_5$ 当且仅当 $[ea_2a_3ea_4a_5] = 0$, 直线 $a_2a_3 \perp a_4a_5$ 当且仅当 $\langle ea_2a_3ea_4a_5 \rangle = 0$.

命题 5.7 设 $a_i \in \mathcal{N}_e$, 使得 $a_1a_2a_3$ 和 $a_1a_4a_5$ 形成两个圆周, 则

$$\begin{aligned}
 [a_1a_2a_3a_1a_4a_5] &= 8\rho_{a_1a_2a_3}\rho_{a_1a_4a_5}S_{a_1a_2a_3}S_{a_1a_4a_5} \sin \angle(n_{a_1a_2a_3}, n_{a_1a_4a_5}), \\
 \langle a_1a_2a_3a_1a_4a_5 \rangle &= 8\rho_{a_1a_2a_3}\rho_{a_1a_4a_5}S_{a_1a_2a_3}S_{a_1a_4a_5} \cos \angle(n_{a_1a_2a_3}, n_{a_1a_4a_5}).
 \end{aligned}
 \tag{5.26}$$

证明 由

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle a_3a_2a_1a_1a_4a_5 \rangle \\
 &= \langle a_3a_2a_1 \rangle_1 \cdot \langle a_1a_4a_5 \rangle_1 + \langle a_3a_2a_1 \rangle_3 \cdot \langle a_1a_4a_5 \rangle_3 \\
 &= \langle a_1a_2a_3 \rangle_1 \cdot \langle a_1a_4a_5 \rangle_1 - \langle a_1a_2a_3 \rangle_3 \cdot \langle a_1a_4a_5 \rangle_3,
 \end{aligned}$$

得到

$$\langle a_1a_2a_3 \rangle_1 \cdot \langle a_1a_4a_5 \rangle_1 = (a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) \cdot (a_1 \wedge a_4 \wedge a_5).
 \tag{5.27}$$

由此和命题 5.1 的证明, 得

$$\langle a_1a_2a_3 \rangle_1 \cdot \langle a_1a_4a_5 \rangle_1 = 4S_{a_1a_2a_3}S_{a_1a_4a_5}\rho_{a_1a_2a_3}\rho_{a_1a_4a_5} \cos \angle(n_{a_1a_2a_3}, n_{a_1a_4a_5}).$$

再由 (4.16), 得

$$\langle a_1a_2a_3a_1a_4a_5 \rangle = 8\rho_{a_1a_2a_3}\rho_{a_1a_4a_5}S_{a_1a_2a_3}S_{a_1a_4a_5} \cos \angle(n_{a_1a_2a_3}, n_{a_1a_4a_5}).$$

另一等式类似可证. □

推论 5.2 设 $a_i \in \{e\} \cup \mathcal{N}_e$, 使得 a_1 表示平面上的点, $a_1a_2a_3$ 和 $a_1a_4a_5$ 形成两个圆周或直线, 则这两个圆周 (或直线) 相切 (或平行) 当且仅当 $[a_1a_2a_3a_1a_4a_5] = 0$, 它们相互垂直当且仅当

$$\langle a_1a_2a_3a_1a_4a_5 \rangle = 0.$$

推论 5.3 设 $a_i \in \{e\} \cup \mathcal{N}_e$, 使得 $a_1a_2a_3$ 和 $a_1a_4a_5$ 形成两个圆周或直线, 则

$$\begin{aligned}
 \langle a_1a_2a_3a_1a_4a_5 \rangle &= \frac{d_{a_1a_2}d_{a_2a_3}d_{a_3a_1}d_{a_1a_4}d_{a_4a_5}d_{a_5a_1}}{2} \cos \angle(a_1a_2a_3, a_1a_4a_5), \\
 [a_1a_2a_3a_1a_4a_5] &= \frac{d_{a_1a_2}d_{a_2a_3}d_{a_3a_1}d_{a_1a_4}d_{a_4a_5}d_{a_5a_1}}{2} \sin \angle(a_1a_2a_3, a_1a_4a_5).
 \end{aligned}
 \tag{5.28}$$

以下定理可由以上结果归纳证明. 它包含定理 5.1 作为特例.

定理 5.2 设在 $\mathbb{R}^{3,1}$ 中, $\mathbf{a}_i \in \{e\} \cup \mathcal{N}_e$, 使得 $\mathbf{a}_{2i} \neq \mathbf{a}_{2i+1}$, 且对任意 $i > 1$, 有 $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_i$, 则

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5 \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{4l} \mathbf{a}_{4l+1} \rangle \\
&= \frac{d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} d_{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1} \cdots d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{4l}} d_{\mathbf{a}_{4l} \mathbf{a}_{4l+1}} d_{\mathbf{a}_{4l+1} \mathbf{a}_1}}{2} \cos(\angle(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5) \\
&\quad + \angle(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_6 \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_8 \mathbf{a}_9) + \cdots + \angle(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{4l-2} \mathbf{a}_{4l-1}, \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{4l} \mathbf{a}_{4l+1})), \\
& [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5 \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{4l} \mathbf{a}_{4l+1}] \\
&= \frac{d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2} d_{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3} d_{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1} \cdots d_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{4l}} d_{\mathbf{a}_{4l} \mathbf{a}_{4l+1}} d_{\mathbf{a}_{4l+1} \mathbf{a}_1}}{2} \sin(\angle(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5) \\
&\quad + \angle(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_6 \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_8 \mathbf{a}_9) + \cdots + \angle(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{4l-2} \mathbf{a}_{4l-1}, \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{4l} \mathbf{a}_{4l+1})).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

可见, $CL(\mathbb{R}^{3,1})$ 中幂零偶单项式的两个括号分别表示一个定向角度的余弦、正弦乘以若干长度因子. 三角函数的运算性质由幂零偶单项式的分裂、拼接反映. 例如, 幂零偶单项式的性质 (4.15) 对应于三角关系

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.
\end{aligned}$$

又例如, 对任意幂零奇单项式 $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in CL(\mathbb{R}^{3,1})$ 和任意幂零向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{3,1}$, 等式

$$\begin{aligned}
4\langle \mathbf{aA} \rangle \langle \mathbf{aA}' \rangle &= \langle \mathbf{aAaA}' \rangle + \langle \mathbf{aAaA}'^T \rangle, \\
4\langle \mathbf{aA} \rangle [\mathbf{aA}'] &= [\mathbf{aAaA}'] - [\mathbf{aAaA}'^T], \\
4[\mathbf{aA}] [\mathbf{aA}'] &= \langle \mathbf{aAaA}'^T \rangle - \langle \mathbf{aAaA}' \rangle
\end{aligned} \tag{5.30}$$

对应于三角关系

$$\begin{aligned}
2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), \\
2 \cos \alpha \sin \beta &= \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta), \\
2 \sin \alpha \sin \beta &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).
\end{aligned}$$

对任意非零的幂零偶单项式 $\mathbf{B} \in CL(\mathbb{R}^{3,1})$, 它的 (0, 4)- 阶分量为

$$\langle \mathbf{B} \rangle_{0,4} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{I}_4 [\mathbf{B}], \tag{5.31}$$

其中 $\mathbf{I}_4 = (\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_0) \mathbf{I}_2$ 定义了 $CL(\mathbb{R}^{3,1})$ 中的对偶算子. 由于 $\mathbf{I}_4^2 = -1$, 因此, (5.31) 对应于一个复括号. 特别地, (5.31) 差一数量因子表示平面上的一个旋转, 或者等价地, 表示一个有向角.

平面上的有向角, 模去 π 后得到的等价类称为全角^[23, 24]. 如果不引入 “>” 型不等式, 那么对于有向角的代数等式刻画也只能做到全角. 例如, 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, 则作为模 2π 的有向角, 有等式

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\angle(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad \text{和} \quad \angle(-\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \pi.$$

然而, 作为全角的相等关系 “ \simeq ”, 有

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \simeq -\angle(\mathbf{b}, \mathbf{a}), \quad \angle(-\mathbf{a}, \mathbf{b}) \simeq \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{5.32}$$

直线 12 与 34 平行当且仅当它们的方向形成的全角为 0 , 它们垂直当且仅当该全角为 $\pi/2$.

对三角形 123 , 记顶点 2 处的有向角为自向量 $\vec{21}$ 到 $\vec{23}$ 的转角

$$\angle 123 := \angle(\vec{21}, \vec{23}). \quad (5.33)$$

两个有向角 $\angle 123$ 和 $\angle 1'2'3'$ 作为全角相等当且仅当 $\tan \angle 123 = \tan \angle 1'2'3'$. 由 (5.2), 这一条件可以表示为

$$\frac{[e123]}{\langle e123 \rangle} = \frac{[e1'2'3']}{\langle e1'2'3' \rangle}, \quad (5.34)$$

即

$$[e123]\langle e1'2'3' \rangle - \langle e123 \rangle[e1'2'3'] = 0.$$

由 (4.15), 这一条件可以进一步简化为

$$[e123e3'2'1'] = 0. \quad (5.35)$$

在 $(0, 4)$ - 分阶算子内部, 根据命题 5.6, 幂零单项式 $e12e34$ 表示角度

$$\angle(e12, e34) = -\angle(\vec{12}, \vec{34}),$$

而幂零单项式 $e34e12$, 或者等价地, $e(12e34)^T$, 表示 $-\angle(e12, e34) = \angle(\vec{12}, \vec{34})$. 两个角度之和 $\angle(e12, e34) + \angle(e1'2', e3'4')$ 用两个幂零单项式的拼接 (即几何积) 表示: $e12e34e1'2'e3'4'$. 对于两个幂零偶单项式 B 和 B' 的 $(0, 4)$ - 阶分量 $\langle B \rangle_{0,4}$ 和 $\langle B' \rangle_{0,4}$, 它们差一非零数量因子相等当且仅当它们表示的全角相等.

以下是三角形 123 的内角和 $\angle 123 + \angle 231 + \angle 312 = \pi \pmod{2\pi}$ 的括号证明:

$$\begin{aligned} \langle e123e231e312 \rangle_{0,4} &= \langle e1 \underline{232} e3e \underline{131} 2 \rangle_{0,4} \\ &= 2^3(e \cdot 3)(1 \cdot 3)(2 \cdot 3)\langle e\underline{12}e12 \rangle_{0,4} \\ &= -2^3(e \cdot 3)(1 \cdot 3)(2 \cdot 3)\langle e\underline{21}e12 \rangle_{0,4} \\ &= -2^4(e \cdot 1)(e \cdot 3)(1 \cdot 3)(2 \cdot 3)\langle e\underline{212} \rangle_{0,4} \\ &= -2^5(e \cdot 1)(e \cdot 2)(e \cdot 3)(1 \cdot 2)(2 \cdot 3)(3 \cdot 1) \\ &< 0. \end{aligned}$$

以上计算中的下划线部分需要应用 (4.9) 和 (4.7).

6 幂零偶单项式的 2- 阶分量的几何意义

首先考察 $\langle e123 \rangle_2$ 的几何意义, 其中 $1, 2, 3 \in \mathcal{N}_e$.

引理 6.1 对任意幂零偶单项式 $B \in CL(\mathbb{R}^{3,1})$, $\langle B \rangle_2$ 是一个 2- 片当且仅当 $\langle B \rangle [B] = 0$.

证明 由于 $BB^T = 0$, 因此,

$$\begin{aligned} 0 &= [BB^T] \\ &= [(\langle B \rangle + \langle B \rangle_2 + \langle B \rangle_4)(\langle B \rangle - \langle B \rangle_2 + \langle B \rangle_4)] \\ &= 2\langle B \rangle [B] - [\langle B \rangle_2 \langle B \rangle_2], \end{aligned}$$

即 $[\langle B \rangle_2 \langle B \rangle_2] = 2\langle B \rangle [B]$. 另一方面, $\langle B \rangle_2$ 是片的充要条件为 $\langle B \rangle_2 \wedge \langle B \rangle_2 = 0$. □

对于 $\langle e\mathbf{123} \rangle_2$, 其中 $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3} \in \mathcal{N}_e$ 且两两不同, 它是一个片当且仅当 $\angle\mathbf{123} = 0 \pmod{\pi/2}$. 当此条件不满足时, $\langle e\mathbf{123} \rangle_2$ 可分解为两个 2-片之和, 其中的每个片都有几何意义. 当然这种分解并不唯一. 设 $\langle e\mathbf{123} \rangle [e\mathbf{123}] \neq 0$. 由于 $e \wedge \langle \mathbf{123} \rangle_3 \neq 0$ 和 $e \cdot \langle \mathbf{123} \rangle_1 \neq 0$, 因此, $\langle \mathbf{123} \rangle_3$ 和 $\langle \mathbf{123} \rangle_1^\sim$ 表示一对相互垂直的圆周. 设圆心分别为 $\mathbf{o}_3, \mathbf{o}_1 \in \mathcal{N}_e$, 则

$$\begin{aligned} \langle e\mathbf{123} \rangle_2 &= e \wedge \langle \mathbf{123} \rangle_1 + e \cdot \langle \mathbf{123} \rangle_3 \\ &= e \wedge \langle \mathbf{123} \rangle_1 + (e \wedge \langle \mathbf{123} \rangle_3^\sim)^{\sim} \\ &= -\langle e\mathbf{123} \rangle e \wedge \mathbf{o}_1 + [e\mathbf{123}] (e \wedge \mathbf{o}_3)^\sim. \end{aligned} \quad (6.1)$$

因此, $\langle e\mathbf{123} \rangle_2$ 表示角度 $\angle\mathbf{123}$ 和一对圆心, 其中一个圆心是三角形的外心, 另一个所在的圆周与外接圆垂直相交于点 $\mathbf{1}$ 和 $\mathbf{3}$. 由于 $\mathbf{o}_1 \cdot (e \wedge \mathbf{o}_3)^\sim = (e \wedge \mathbf{o}_3 \wedge \mathbf{o}_1)^\sim \neq 0$, 因此, (6.1) 并不是 $\langle e\mathbf{123} \rangle_2$ 的完全正交分解.

下面给出 $\langle e\mathbf{123} \rangle_2$ 的一个完全正交分解, 并证明它的唯一性. 考虑更为一般的 $\mathbf{A}_2 = \langle e\mathbf{12e34} \rangle_2$, 其中 $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4} \in \mathcal{N}_e$, 且 $\mathbf{1} \neq \mathbf{2}$ 和 $\mathbf{3} \neq \mathbf{4}$. 显然,

$$e\mathbf{12} = e(\mathbf{1} - \mathbf{2})\mathbf{2} = e\overrightarrow{\mathbf{21}}\mathbf{2} = -\overrightarrow{\mathbf{21}}e\mathbf{2},$$

由此可得

$$\begin{aligned} \langle e\mathbf{12e34} \rangle_2 &= -\langle \overrightarrow{\mathbf{21}}e\mathbf{2}e\overrightarrow{\mathbf{43}}\mathbf{4} \rangle_2 \\ &= 2\langle \overrightarrow{\mathbf{21}}e\overrightarrow{\mathbf{43}}\mathbf{4} \rangle_2 \\ &= -2\langle \overrightarrow{\mathbf{21}}\overrightarrow{\mathbf{43}}e\mathbf{4} \rangle_2 \\ &= -2\{(\overrightarrow{\mathbf{21}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{43}})e \wedge \mathbf{4} + (\overrightarrow{\mathbf{21}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{43}})e\mathbf{4}\}_2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

考虑向量 $\overrightarrow{\mathbf{21}} \in \mathbb{R}^2$ 相对于 Minkowski 平面 $e \wedge \mathbf{4}$ 的正交分解:

$$\begin{aligned} P_{e \wedge \mathbf{4}}(\overrightarrow{\mathbf{21}}) &= (\overrightarrow{\mathbf{21}} \cdot (e \wedge \mathbf{4})) \cdot (e \wedge \mathbf{4}) = -(\overrightarrow{\mathbf{21}} \cdot \mathbf{4})e, \\ P_{e \wedge \mathbf{4}}^\perp(\overrightarrow{\mathbf{21}}) &= \overrightarrow{\mathbf{21}} + (\overrightarrow{\mathbf{21}} \cdot \mathbf{4})e. \end{aligned} \quad (6.3)$$

由此可得

$$\begin{aligned} \langle (\overrightarrow{\mathbf{21}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{43}})e\mathbf{4} \rangle_2 &= \langle \{(P_{e \wedge \mathbf{4}}^\perp(\overrightarrow{\mathbf{21}}) - (\overrightarrow{\mathbf{21}} \cdot \mathbf{4})e) \wedge (P_{e \wedge \mathbf{4}}^\perp(\overrightarrow{\mathbf{43}}) - (\overrightarrow{\mathbf{43}} \cdot \mathbf{4})e)\} e\mathbf{4} \rangle_2 \\ &= \langle \{P_{e \wedge \mathbf{4}}^\perp(\overrightarrow{\mathbf{21}}) \wedge P_{e \wedge \mathbf{4}}^\perp(\overrightarrow{\mathbf{43}})\} e\mathbf{4} \rangle_2 \\ &= -P_{e \wedge \mathbf{4}}^\perp(\overrightarrow{\mathbf{21}}) \wedge P_{e \wedge \mathbf{4}}^\perp(\overrightarrow{\mathbf{43}}) \\ &= \lambda(e \wedge \mathbf{4})^\sim, \end{aligned} \quad (6.4)$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda &= [e\mathbf{4} P_{e \wedge \mathbf{4}}^\perp(\overrightarrow{\mathbf{21}}) P_{e \wedge \mathbf{4}}^\perp(\overrightarrow{\mathbf{43}})] \\ &= [e\mathbf{4} \overrightarrow{\mathbf{21}} \overrightarrow{\mathbf{43}}] \\ &= [e\mathbf{4}(\mathbf{1} - \mathbf{2})(\mathbf{3} - \mathbf{4})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [e4 \langle e12 \rangle_1 \langle e34 \rangle_1] \\
 &= \frac{1}{4} [e4e12e34] \\
 &= -\frac{1}{2} [e12e34].
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

将 (6.4)、(6.5) 和 $\vec{21} \cdot \vec{43} = \langle e12e34 \rangle / 2$ 代入 (6.2), 得到以下结果.

命题 6.1 设 $a_i \in \mathcal{N}_e$, 则有以下完全正交分解:

$$\begin{aligned}
 (e \cdot a_4) \langle ea_1a_2ea_3a_4 \rangle_2 &= \langle ea_1a_2ea_3a_4 \rangle e \wedge a_4 - [ea_1a_2ea_3a_4] (e \wedge a_4)^\sim \\
 &= \langle ea_1a_2ea_3a_4 \rangle_{0,4} e \wedge a_4.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

作为推论, 当 (6.6) 中的 $a_2 = a_3$ 时,

$$\langle e123 \rangle_2 = \frac{1}{2(e \cdot 2)} \langle e12e23 \rangle_2 = \langle e123 \rangle e \wedge 3 - [e123] (e \wedge 3)^\sim. \tag{6.7}$$

这是有别于 (6.1) 的 $\langle e123 \rangle_2$ 的完全正交分解, 它给出的几何解释就只是仿射表示下的点 3 附以角度 $\angle 123$. 这种分解的唯一性由后面的命题 6.3 给出.

命题 6.2 对任意幂零向量 $a_i \in \mathbb{R}^{3,1}$, 有

$$(a_1 \cdot a_{2k}) a_1 a_2 \cdots a_{2k} = \langle a_1 a_2 \cdots a_{2k} \rangle_{0,4} a_1 a_{2k}. \tag{6.8}$$

证明 利用

$$\begin{aligned}
 \langle a_1 a_2 \cdots a_{2k} \rangle_{0,4} a_1 &= \frac{1}{2} (a_1 a_2 \cdots a_{2k} + a_{2k} \cdots a_2 a_1) a_1 \\
 &= \frac{1}{2} a_1 a_2 \cdots a_{2k} a_1,
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

可得

$$\langle a_1 a_2 \cdots a_{2k} \rangle_{0,4} a_1 a_{2k} = \frac{1}{2} a_1 a_2 \cdots a_{2k} a_1 a_{2k} = a_1 a_2 \cdots a_{2k} (a_{2k} \cdot a_1).$$

证毕. □

作为 (6.9) 的直接推论, 有以下结果.

推论 6.1 设 $a_1, \dots, a_{2k} \in \mathcal{N}$, 其中 a_1 与 a_{2k} 线性无关, 则

$$\begin{aligned}
 \langle a_1 a_2 \cdots a_{2k} a_1 \rangle_1 &= 2 \langle a_1 a_2 \cdots a_{2k} \rangle a_1, \\
 \langle a_1 a_2 \cdots a_{2k} a_1 \rangle_3 &= 2 [a_1 a_2 \cdots a_{2k}] a_1^\sim.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

当 $a_i \in \{e\} \cup \mathcal{N}_e$ 时, 如果 $a_1 \neq a_{2k}$, 则差一共同数量因子, $\langle a_1 a_2 \cdots a_{2k} a_1 \rangle_1$ 和 $\langle a_1 a_2 \cdots a_{2k} a_1 \rangle_3$ 表示点 (或共形无穷远点) a_1 分别附以一个角度的余弦和正弦, 作为它们之和的 $a_1 a_2 \cdots a_{2k} a_1$ 表示该点附以一个旋转.

定理 6.1 设 $a_1, \dots, a_{2k} \in \mathcal{N}$, 则有以下完全正交分解:

$$(a_1 \cdot a_{2k}) \langle a_1 a_2 \cdots a_{2k} \rangle_2 = \langle a_1 a_2 a_3 a_1 a_4 a_5 \rangle a_1 \wedge a_5 - [a_1 a_2 a_3 a_1 a_4 a_5] (a_1 \wedge a_5)^\sim. \tag{6.11}$$

当 $a_1 = a_{2k}$ 时,

$$\langle a_1 a_2 \cdots a_{2k-1} a_1 \rangle_2 = a_1 a_2 \cdots a_{2k-1} a_1 = 2 \langle a_1 a_2 \cdots a_{2k-1} \rangle_1 \wedge a_1. \tag{6.12}$$

证明 (6.11) 由命题 6.2 和

$$\langle \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k} \rangle_{0,4} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{2k} \rangle_2 = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k} \rangle \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_{2k} + \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k} \rangle_4 \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_{2k})$$

立得. 当 \mathbf{a}_{2k-1} 与 \mathbf{a}_1 线性相关时, (6.12) 平凡成立. 设 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{2k-1} \neq 0$. 根据推论 4.2, 可得

$$(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{2k-1}) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k-1} = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k-1} \rangle_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{2k-1},$$

从而,

$$\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k-1} \mathbf{a}_1 \rangle_2 = \frac{\langle \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k-1} \rangle_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{2k-1} \mathbf{a}_1 \rangle_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{2k-1}} = 2 \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k-1} \rangle_1 \wedge \mathbf{a}_1.$$

证毕. □

作为推论, 当 $\mathbf{a}_i \in \{e\} \cup \mathcal{N}_e$ 时, 如果 $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_{2k}$, 则差一数量因子 $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k} \rangle_2$ 表示一对点 (可能包含共形无穷远点) \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_{2k} 附以一个旋转; 如果 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{2k}$, 则差一数量因子 $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k} \rangle_2$ 表示点 (或共形无穷远点) \mathbf{a}_1 和在 \mathbf{a}_1 处圆或直线 $\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{2k-1} \rangle_3$ 的切方向.

命题 6.3 (完全正交分解的唯一性) 如果存在 $\Lambda(\mathbb{R}^{3,1})$ 中的非零 2-片 \mathbf{B}_2 、 \mathbf{B}'_2 、 \mathbf{C}_2 和 \mathbf{C}'_2 , 使得 \mathbf{B}_2 和 \mathbf{B}'_2 具有 Minkowski 指标, 并且 $\mathbf{B}_2 + \mathbf{C}_2 = \mathbf{B}'_2 + \mathbf{C}'_2$ 是两个完全正交分解, 则

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}'_2, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}'_2.$$

证明 显然, \mathbf{C}_2 和 \mathbf{C}'_2 具有 Euclid 指标, 并存在 $\mu, \mu' \in \mathbb{R} - \{0\}$, 使得

$$\mathbf{C}_2 = \mu \mathbf{B}_2 \mathbf{I}_4, \quad \mathbf{C}'_2 = \mu' \mathbf{B}'_2 \mathbf{I}_4.$$

代入已知条件中的等式, 得 $\mathbf{B}_2(1 + \mu \mathbf{I}_4) = \mathbf{B}'_2(1 + \mu' \mathbf{I}_4)$, 因而,

$$\mathbf{B}_2(1 + \mu \mathbf{I}_4)(1 - \mu \mathbf{I}_4) = \mathbf{B}'_2(1 + \mu' \mathbf{I}_4)(1 - \mu \mathbf{I}_4).$$

展开并化简, 得

$$\mathbf{B}_2(1 + \mu^2) = \mathbf{B}'_2(1 + \mu\mu' + (\mu' - \mu)\mathbf{I}_4). \quad (6.13)$$

由于 (6.13) 左端是 2-片, 必然有

$$0 = [\mathbf{B}'_2(1 + \mu\mu' + (\mu' - \mu)\mathbf{I}_4)\mathbf{B}'_2(1 + \mu\mu' + (\mu' - \mu)\mathbf{I}_4)] = 2\mathbf{B}'_2{}^2(1 + \mu\mu')(\mu' - \mu).$$

由于 $\mathbf{B}'_2{}^2 > 0$, 因此, 或者 $\mu' = \mu$, 或者 $\mu\mu' = -1$. 当后者发生时, (6.13) 右端为

$$(\mu' - \mu)\mathbf{B}'_2 \mathbf{I}_4 \neq 0;$$

它具有 Euclid 指标, 不可能等于左端. 因此, $\mu' = \mu$. 代入 (6.13), 得到 $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}'_2$. □

通过命题 6.2 容易看出, 不仅幂零单项式的各种分阶投影像具有明确的几何意义, 幂零单项式本身也会具有很好的几何解释. 详细内容将另文撰述. 以下举一个应用幂零单项式本身、而不是它的分阶投影像对几何约束进行表示的例子.

容易证明, 对任意幂零向量 $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4} \in \mathbb{R}^{3,1}$, 有

$$\begin{aligned} 4\langle \mathbf{e12e34} \rangle_4 \mathbf{e} &= \mathbf{e12e34e} - \mathbf{e34e12e}, \\ 4\langle \mathbf{e12e34} \rangle \mathbf{e} &= \mathbf{e12e34e} + \mathbf{e34e12e}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

因此, 直线 **12** 与 **34** 平行当且仅当

$$e12e34e = e34e12e,$$

它们相互垂直当且仅当

$$e12e34e = -e34e12e.$$

从符号计算的角度看, 几何约束的幂零多项式表示, 通过将几何关系化为幂零单项式内部的对称性, 使得对幂零单项式内部的重排相当于几何约束的应用. 这对于控制表达式的项数增长非常有利.

参考文献

- 1 Li H, Hestenes D, Rockwood A. Generalized homogeneous coordinates for computational geometry. In: Geometric Computing with Clifford Algebras. Heidelberg: Springer, 2001, 27–60
- 2 Hestenes D. Old wine in new bottles: A new algebraic framework for computational geometry. In: Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering. Boston: Birkhäuser, 2001, 3–17
- 3 Li H. Symbolic computation in the homogeneous geometric model with Clifford algebra. In: Proceedings of the 2004 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: ACM Press, 2004, 221–228
- 4 Li H, Cao Y. On geometric theorem proving with null geometric algebra. In: Guide to Geometric Algebra in Practice. London: Springer, 2011, 195–216
- 5 Dorst L, Fontijne D, Mann S. Geometric Algebra for Computer Science. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2007
- 6 Rosenhahn B, Perwass C, Sommer G. Pose estimation of 3D free-form contours. Int J Comput Vision, 2005, 62: 267–289
- 7 Bayro-Corrochano E, Falcón L E. Geometric algebra of points, lines, planes and spheres for computer vision and robotics. Robotica, 2005, 23: 755–770
- 8 Lasenby A, Doran C. Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: Cambridge University Press, 2003
- 9 Witte F M C. Lightlike infinity in CGA models of spacetime. J Phys A, 2004, 37: 9965–9973
- 10 Yu Z Y, Luo W, Hu Y, et al. Change detection for 3D vector data: A CGA-based Delaunay-TIN intersection approach. Int J Geographical Inf Sci, 2015, 29: 2328–2347
- 11 Yu Z Y, Luo W, Yuan L, et al. Geometric algebra model for geometry-oriented topological relation computation. Trans GIS, 2016, 20: 259–279
- 12 Li H. A recipe for symbolic geometric computing: Long geometric product, BREEFS and Clifford factorization. In: Proceedings of the 2007 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: ACM Press, 2007, 261–268
- 13 Li H, Huang L. Complex brackets, balanced complex differences, and applications in symbolic geometric computing. In: Proceedings of the Twenty-First International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: ACM Press, 2008, 181–188
- 14 Li H. Invariant Algebras and Geometric Reasoning. Singapore: World Scientific, 2008
- 15 Li H. Symbolic geometric reasoning with advanced invariant algebras. In: Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9582. Switzerland: Springer, 2015, 35–49
- 16 Li H. Automated geometric reasoning with geometric algebra: Theory and practice. In: Proceedings of the 2017 ACM on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: ACM Press, 2017, 7–8
- 17 Havel T F, Li H. From molecular distance geometry to conformal geometric algebra. In: Handbook of Geometric Constraint Systems Principles. Boca Raton: CRC Press, 2019, 106–136
- 18 Li H. Automated theorem proving practice with null geometric algebra. J Syst Sci Complex, 2019, 32: 95–123
- 19 Hestenes D, Sobczyk G. Clifford Algebra to Geometric Calculus. Fundamental Theories of Physics, vol. 5. Dordrecht: Springer, 1984
- 20 Bravi P, Brini A. Remarks on invariant geometric calculus, Cayley-Grassmann algebras and geometric Clifford algebras. In: Algebraic Combinatorics and Computer Science. Milano: Springer, 2001, 129–150
- 21 Hestenes D, Li H, Rockwood A. New algebraic tools for classical geometry. In: Geometric Computing with Clifford Algebra. Heidelberg: Springer, 2001, 3–26

- 22 Dress A W M, Havel T F. Distance geometry and geometric algebra. *Found Phys*, 1993, 23: 1357–1374
- 23 Wu W T. *Basic Principles of Mechanical Theorem Proving in Geometries, Volume I: Part of Elementary Geometries*. Beijing: Science Press, 1984; Wien: Springer, 1994
- 24 Chou S C, Gao X S, Zhang J Z. *Machine Proofs in Geometry: Automated Production of Readable Proofs for Geometric Theorems*. Singapore: World Scientific, 1994

Geometric interpretations of graded null monomials in conformal geometric algebra

Hongbo Li

Abstract This paper further develops conformal geometric algebra (CGA) from both the algebraic aspect and the geometric viewpoint, by exploring the algebraic properties and geometric interpretations of the graded monomials generated by null vectors. The content includes the computation of the orientations of various dimensional spheres and planes, the trigonometry of long brackets, the graded null monomial representation of angles and directions, the geometric meaning of various single-graded null monomials, etc. These results help not only in understanding the geometric implication of various advanced symbolic algebraic manipulations in conformal geometric algebra, but also in clarifying the intrinsic machinery behind the efficiency brought about by conformal geometric algebra in symbolic geometric computing.

Keywords conformal geometric algebra, symbolic geometric computation, trigonometry, null bracket algebra, algebraic expressions of geometric constraints

MSC(2010) 15A66, 51A25, 51B10

doi: 10.1360/SSM-2019-0329