带跳的平均场随机微分方程的中偏差

献给严士健教授 90 华诞

马小翠¹, 席福宝^{2*}

1. 济宁学院数学系, 曲阜 273155;

2. 北京理工大学数学与统计学院, 北京 100081

E-mail: macui8228@163.com, xifb@bit.edu.cn

收稿日期: 2018-07-31; 接受日期: 2018-10-23; 网络出版日期: 2019-08-05; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11671034 和 11771327) 资助项目

摘要 平均场随机微分方程是一类在众多工程和科学领域具有广泛应用的随机模型. 本文利用弱收敛的方法建立由 Poisson 随机测度驱动的平均场随机微分方程的中偏差原理.

关键词 中偏差 平均场随机微分方程 Poisson 随机测度

MSC (2010) 主题分类 60F10, 60H10

1 引言

作为大偏差研究的一个经典领域, Freidlin-Wentzell 型大偏差处理的是带小噪声的随机动力系统的样本轨道的渐近问题. 自 Freidlin 和 Wentzell 于 20 世纪 60 年代研究动力系统的小扰动以来, 随机 (偏) 微分方程的大偏差理论得到了广泛的研究和深入的发展 (参见文献 [1]). 一般采用的方法是将时间离散化, 然后证明指数连续性和指数紧性, 利用压缩原理得到大偏差原理, 但有时证明指数紧性是一项很困难的工作, 非常复杂. 近年来, Dupuis 和 Ellis^[2]、Budhiraja 和 Dupuis^[3]、Budhiraja 等^[4]提出了基于变分表示的弱收敛方法. 相对于时间离散方法, 弱收敛方法避免了证明离散逼近和指数紧性, 只需验证矩估计和矩收敛. 随后, 弱收敛方法已被广泛应用于研究随机微分方程的大偏差^[4-6]和随机偏微分方程的大偏差^[7-10].

类似于大偏差, 中偏差也起源于统计推断, 它关心的是阶数小于大偏差的概率估计. 例如, 设 X_i 是取值于 $\mathbb{R}^d$ 的均值为 0 的独立同分布的随机变量序列, 并设 X_i 均与随机变量 X 同分布, 再设 X 的分布为 μ . 大偏差原理考虑的是, 对 $c > 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 满足

$$P(|S_n| > nc) \approx \exp\{-n \inf\{I(x) : |x| > c\}\},$$

英文引用格式: Ma X C, Xi F B. Moderate deviations for mean-field stochastic differential equations with jumps (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 87–100, doi: 10.1360/N012018-00192

其中

$$I(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \left\{ \langle \alpha, x \rangle - \log \int_{\mathbb{R}^d} \exp \langle \alpha, x \rangle \mu(dx) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

设 $\{a_n\}$ 是正实数列, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \uparrow \infty$, $n^{-1/2}a_n \rightarrow 0$ (例如, 令 $a_n = n^{1/4}$). 中偏差原理则描述的是

$$\mathbb{P}(|S_n| > n^{1/2}a_n c) \approx \exp\{-a_n^2 \inf\{I^0(x) : |x| > c\}\},$$

其中

$$I^0(x) = \frac{1}{2} \langle x, \Sigma^{-1}x \rangle, \quad \Sigma = \text{Cov}(X).$$

可以看出, 中偏差原理研究了偏差阶数是 $n^{1/2}a_n$ 的概率估计, 介于中心极限的阶数 $n^{1/2}$ 与大偏差的阶数 n 之间. 由于可以按照要求控制 $a_n \rightarrow \infty$ 的速度, 因此可以说中偏差原理建立了中心极限定理与大偏差原理之间的桥梁. 另一方面, 中偏差的速率函数仅取决于随机变量 X 的协方差函数, 不受它的分布形式的影响, 从这个角度来看, 与中心极限定理一样, 中偏差原理具有一定的普适性. 中偏差理论也受到了众多学者的关注. 关于中偏差已有较多的研究成果, 例如, 文献 [11, 12] 关心的是一般拓扑空间上的经验过程; 文献 [13–17] 关注的是弱相依的随机序列; 文献 [18–21] 研究的是 Markov 链的占位测度与 Markov 链的一般可加泛函的中偏差, 但是关于连续时间的随机动力系统的中偏差, 成果相对较少. Liptser 和 Spokoiny^[22] 研究了有限维的随机平均下两时间尺度的扩散模型的中偏差; 对于此模型, Guillin^[23, 24]、Chigansky 和 Liptser^[25] 则研究了中偏差和平均原理; Hu 和 Shi^[26] 考虑了带 Brown 势的常返扩散过程的长时间行为的中偏差估计; 另外, 关于统计推断中的有限维扩散过程的中偏差也有学者关注 (参见文献 [27, 28]). 对于偏微分方程的研究, Wang 和 Zhang^[29] 得到了可乘噪声的随机反应扩散方程的中偏差; Wang 等^[30] 考虑了由可乘 Wiener 过程驱动的 2-D 随机 Navier-Stokes 方程的中偏差原理. 对于带跳的随机动力系统的中偏差, 研究成果更是不多. Budhiraja 等^[31] 利用弱收敛的方法得到了 Poisson 随机测度的可测泛函的中偏差原理, 并用此结果解决了由 Poisson 随机测度驱动的有限维和无限维随机微分方程的中偏差; 随后, Dong 等^[32] 利用此一般性结果研究了由可乘 Lévy 噪声驱动的 2-D 随机 Navier-Stokes 方程的中偏差; Ma 和 Xi^[33] 也利用此方法研究了带跳的中立型随机时滞微分方程的大偏差. 同大偏差类似, 利用基于变分表示的弱收敛方法证明中偏差原理, 避免了传统方法中的离散近似及指数紧性的证明, 大大降低了中偏差原理的证明难度. 本文也将使用此方法研究由 Poisson 随机测度驱动的平均场随机微分方程的中偏差.

平均场随机微分方程是一类在众多工程和科学领域具有广泛应用的随机模型. 作为一类经典的平均场随机微分方程, McKean-Vlasov 模型在化学动力学和统计力学中有着重要应用 (参见文献 [34, 35]). 另一方面, 平均场随机微分方程可用来研究大总体粒子系统, 此类系统在经济学、生物学、工程、社会科学和金融学等科学领域中有着重要应用. 关于平均场随机微分方程, 有丰富的研究成果 (参见文献 [36–40]). 特别地, 对于由 Brown 运动驱动的平均场随机微分方程的大偏差问题, 目前也有一些研究成果 (参见文献 [41]); 而 Feng^[42, 43] 和 Léonard^[44] 研究了纯跳情形下的大偏差; Cai 等^[45] 利用弱收敛的方法研究了由 Brown 运动和 Poisson 随机测度驱动的平均场随机微分方程的大偏差, 其中 Poisson 随机测度的强度测度为有限测度. 本文主要研究由可乘 Lévy 噪声驱动的平均场随机微分方程的中偏差. 我们将考虑带跳的平均场随机微分方程

$$dX^\varepsilon(t) = b(X^\varepsilon(t), \bar{E}\varphi(X^\varepsilon(t)))dt + \varepsilon \int_{\mathbb{X}} G(X^\varepsilon(t-), \bar{E}\varphi(X^\varepsilon(t-)), z) \tilde{N}^{\varepsilon^{-1}}(dtdz), \quad (1.1)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是充分小的参数, $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是可测映射, 初始值为 $X^\varepsilon(0) = x \in \mathbb{R}^d$. 此处, $\mathbb{X}$ 是局部紧的 Polish 空间, $b: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 和 $G: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是方程的系数, $N^{\varepsilon^{-1}}$ 为 $[0, T] \times \mathbb{X}$ 空间上的 Poisson 随机测度, 强度测度为 σ -有限测度 $\varepsilon^{-1}\lambda_T \otimes \nu$, 其中 λ_T 是 $[0, T]$ 上的 Lebesgue 测度, ν 是 $\mathbb{X}$ 上的 σ -有限测度. $\tilde{N}^{\varepsilon^{-1}}([0, t] \times B) = N^{\varepsilon^{-1}}([0, t] \times B) - \varepsilon^{-1}t\nu(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ 为 $N^{\varepsilon^{-1}}$ 相应的补偿 Poisson 随机测度. 当 ε 趋于 0 时, 在适当的条件下, 易证方程 (1.1) 的解 X^ε 依概率收敛于下述确定性微分方程的解:

$$dX^0(t) = b(X^0(t), \varphi(X^0(t)))dt, \quad (1.2)$$

其初始值为 $X^0(0) = x \in \mathbb{R}^d$.

研究 X^ε 的中偏差相当于研究下述轨迹的渐近行为:

$$Y^\varepsilon = \frac{X^\varepsilon - X^0}{a(\varepsilon)}, \quad (1.3)$$

其中 $a(\varepsilon)$ 是偏差尺度, 它的取值强烈影响着 X^ε 的渐近行为. 若 $a(\varepsilon) = 1$, 则 Y^ε 的渐近行为显然是 X^ε 的大偏差的研究领域. 若 $a(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$, 则是中心极限定理的研究范围. 为了填补大偏差与中心极限定理之间的空白, 我们需要研究中偏差原理, 即研究当偏差尺度 $a(\varepsilon)$ 满足下面条件时 Y^ε 的渐近性质:

$$a(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon}{a^2}(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

在本文中, 假设 $a(\varepsilon)$ 满足条件 (1.4). 本文研究的是由 Poisson 随机测度驱动的平均场随机微分方程 (1.1) 的中偏差原理, 主要采用的方法是由 Budhiraja 等^[31] 提出的弱收敛方法.

本文余下内容安排如下. 第 2 节主要描述文献 [31] 得到的 Poisson 随机测度的可测泛函的一般性中偏差原理. 利用这个结果, 第 3 节研究由可乘 Lévy 噪声驱动的平均场随机微分方程的中偏差原理.

下面给出本文用到的一些记号. 记 “ $\Rightarrow$ ” 为依分布收敛. 设 $\mathbb{S}$ 为一个度量空间, 分别记 $C_b(\mathbb{S})$ 和 $C_c(\mathbb{S})$ 为 $\mathbb{S}$ 上有界连续实函数和具有紧支撑的连续实函数空间. 记 $L^1(\nu)$ 为满足条件 $\int_{\mathbb{S}} |\phi(v)|\nu(dv) < \infty$ 的可测函数 $\phi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ 组成的空间, 记 $L^2(\nu)$ 为满足条件 $\int_{\mathbb{S}} |\phi(v)|^2\nu(dv) < \infty$ 的可测函数 $\phi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ 组成的空间, 其中 ν 是 $\mathbb{S}$ 上的测度. 记 $\|\cdot\|_2$ 为空间 $L^2(\nu)$ 上的范数, 记 $\|\cdot\|_\infty$ 为上确界范数.

2 一般性中偏差原理

本节主要叙述文献 [31] 中建立的 Poisson 随机测度的可测泛函的一般性中偏差原理.

对局部紧的 Polish 空间 $\mathbb{X}$, 记 $\mathcal{M}_F(\mathbb{X})$ 为 $\mathbb{X}$ 上满足对任意的紧集 $K \subset \mathbb{X}$ 都有 $\nu(K) < \infty$ 的测度 ν 的全体组成的空间. 对 $\mathcal{M}_F(\mathbb{X})$ 赋予最弱的拓扑, 使得对任意的 $f \in C_c(\mathbb{X})$, 函数 $\nu \rightarrow \langle f, \nu \rangle$ 和 $\nu \in \mathcal{M}_F(\mathbb{X})$ 是连续的. 在这种拓扑下, $\mathcal{M}_F(\mathbb{X})$ 可以距离化, 使其成为一个 Polish 空间 (参见文献 [4]). 设 $T \in (0, \infty)$, 令 $\mathbb{X}_T = [0, T] \times \mathbb{X}$, $\nu_T = \lambda_T \otimes \nu$, 其中 λ_T 是 $[0, T]$ 上 Lebesgue 测度且 $\nu \in \mathcal{M}_F(\mathbb{X})$. 令 $\mathbb{M} = \mathcal{M}_F(\mathbb{X}_T)$, $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \times [0, \infty)$, $\mathbb{Y}_T = [0, T] \times \mathbb{Y}$, $\bar{\mathbb{M}} = \mathcal{M}_F(\mathbb{Y}_T)$. 记 $\mathbb{P}$ 是 $(\mathbb{M}, \mathcal{B}(\mathbb{M}))$ 上唯一的概率测度, 使得映射 $N: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ ($N(m) = m$) 是强度测度为 ν_T 的 Poisson 随机测度. 类似地, 记 $\bar{\mathbb{P}}$ 是 $(\bar{\mathbb{M}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{M}}))$ 上唯一的概率测度, 使得映射 $\bar{N}: \bar{\mathbb{M}} \rightarrow \bar{\mathbb{M}}$ ($\bar{N}(\bar{m}) = \bar{m}$) 是强度测度为 $\bar{\nu}_T = \lambda_T \otimes \nu \otimes \lambda_\infty$ 的 Poisson 随机测度, 其中 λ_∞ 是 $[0, \infty)$ 上的 Lebesgue 测度. 相应的期望算子分别记为 $\mathbb{E}$ 和 $\bar{\mathbb{E}}$. 对 $\theta > 0$, 记 $\mathbb{P}_\theta$ 是 $(\mathbb{M}, \mathcal{B}(\mathbb{M}))$ 上唯一的概率测度, 使得 N 是强度测度为 $\theta\nu_T$ 的 Poisson 随机测度, 将相应的期望算子记为 $\mathbb{E}_\theta$. 令 $\mathcal{F}_t = \sigma\{\bar{N}([0, s] \times A) : 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{B}(\mathbb{Y})\}$, 记 $\bar{\mathcal{F}}_t$ 为 $\mathcal{F}_t$ 在概率 $\bar{\mathbb{P}}$ 下的完备化. 令 $\bar{\mathcal{P}}$ 为

$[0, T] \times \bar{\mathbb{M}}$ 上的可料 σ -代数, 而 $(\bar{\mathbb{M}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{M}}))$ 上 σ -代数流为 $\{\bar{\mathcal{F}}_t, 0 \leq t \leq T\}$. 令 $\mathcal{A}^+$ (相应地, $\mathcal{A}$) 为所有 $(\bar{\mathcal{P}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{X}))/\mathcal{B}[0, \infty)$ (相应地, $(\bar{\mathcal{P}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{X}))/\mathcal{B}(\mathbb{R})$) 可测映射 $\phi: \mathbb{X}_T \times \bar{\mathbb{M}} \rightarrow [0, \infty)$ (相应地, $\mathbb{R}$) 的全体. 设 $\phi \in \mathcal{A}^+$, 定义 $\mathbb{X}_T$ 上计数过程 N^ϕ 如下:

$$N^\phi((0, t] \times U) = \int_0^t \int_U \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0, \phi(s, x)]}(r) \bar{N}(ds dx dr), \quad t \in [0, T], \quad U \in \mathcal{B}(\mathbb{X}). \quad (2.1)$$

由于可以利用 ϕ 选择位置 x 和时间 s 处的强度, 因此, N^ϕ 可看作受控的计数测度. 对 $\theta > 0$ 及任意的 $(s, x, \omega) \in \mathbb{X}_T \times \bar{\mathbb{V}}$, 若 $\phi(s, x, \omega) = \theta$, 则记 $N^\phi = N^\theta$. 显然, N^θ 关于 $\bar{\mathbb{P}}$ 与 N 关于 $\mathbb{P}_\theta$ 具有相同的分布.

定义函数 $l: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 为

$$l(r) = r \log r - r + 1, \quad r \in [0, \infty).$$

设 $\phi \in \mathcal{A}^+$, 定义取值于 $[0, \infty]$ 的随机变量 $L_T(\phi)$ 如下:

$$L_T(\phi)(\omega) = \int_{\mathbb{X}_T} l(\phi(t, x, \omega)) \nu(dx) dt.$$

令 $\{K_n \subset \mathbb{X}, n = 1, 2, \dots\}$ 为一个递增的紧集序列, 且满足 $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = \mathbb{X}$. 对任意的 n , 令

$$\mathcal{A}_{b,n} = \left\{ \phi \in \mathcal{A}^+ : \begin{aligned} &\text{对任意的 } (t, \omega) \in [0, T] \times \bar{\mathbb{M}}, \text{ 若 } x \in K_n, \text{ 则 } \frac{1}{n} \leq \phi(t, x, \omega) \leq n; \\ &\text{若 } x \in K_n^c, \text{ 则 } \phi(t, x, \omega) = 1 \end{aligned} \right\},$$

以及 $\mathcal{A}_b = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{A}_{b,n}$.

对 $\varepsilon \rightarrow 0$, 令 $\{\mathcal{G}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ 为从 $\bar{\mathbb{M}}$ 到 $\mathbb{U}$ 的可测映射的集合, 其中 $\mathbb{U}$ 是一个 Polish 空间. 设 $a(\varepsilon)$ 满足 (1.4). 接下来给出文献 [31] 中关于集合 $\mathcal{G}^\varepsilon(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}})$ 的速度为 $\varepsilon/a^2(\varepsilon)$ 的大偏差原理, 其速率函数由适当的二次型形式表示.

设 $\varepsilon > 0, M < \infty$, 令

$$\begin{aligned} S_{+, \varepsilon}^M &= \{\phi \in [0, T] \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+ : L_T(\phi) \leq M a^2(\varepsilon)\}, \\ S_\varepsilon^M &= \left\{ \psi \in [0, T] \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} : \psi = \frac{\phi - 1}{a(\varepsilon)}, \phi \in S_{+, \varepsilon}^M \right\}. \end{aligned}$$

相应地, 令

$$\mathcal{U}_{+, \varepsilon}^M = \{\phi \in \mathcal{A}_b : \phi(\cdot, \cdot, \omega) \in S_{+, \varepsilon}^M \bar{\mathbb{P}}\text{-a.s.}\}, \quad \mathcal{U}_\varepsilon^M = \{\psi \in \mathcal{A} : \psi(\cdot, \cdot, \omega) \in S_\varepsilon^M \bar{\mathbb{P}}\text{-a.s.}\}.$$

记 $B_2(M)$ 为 $L^2(\nu_T)$ 中半径为 M 的球. $B_2(M)$ 上的拓扑为 $L^2(\nu_T)$ 上的弱拓扑. 相应地, $B_2(M)$ 是弱紧的. 设 $\phi \in S_{+, \varepsilon}^M$, 由文献 [31, 引理 3.2] 知, 存在与 ε 无关的常数 $\kappa_2(1) \in (0, \infty)$, 使得 $\psi \mathbf{1}_{\{|\psi| < 1/a(\varepsilon)\}} \in B_2(M \kappa_2(1))^{1/2}$, 其中 $\psi = (\phi - 1)/a(\varepsilon)$.

接下来, 介绍 Poisson 随机测度的可测泛函的一般性中偏差原理, 首先需要下面的条件.

条件 2.1 存在可测映射 $\mathcal{G}_0: L^2(\nu_T) \rightarrow \mathbb{U}$ 满足下面两条:

(1) 给定 $M \in (0, \infty)$, 设 $f^\varepsilon, f \in B_2(M)$, 且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $f^\varepsilon \rightarrow f$, 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\mathcal{G}_0(f^\varepsilon) \rightarrow \mathcal{G}_0(f).$$

(2) 给定 $M \in (0, \infty)$, 令 ϕ^ε 满足对任意的 $\varepsilon > 0$, $\phi^\varepsilon \in \mathcal{U}_{+, \varepsilon}^M$, 以及在 $B_2((M\kappa_2(1))^{1/2})$ 中, 存在 $\beta \in (0, 1]$, 使得 $\psi^\varepsilon \mathbf{1}_{\{|\psi^\varepsilon| \leq \beta/a(\varepsilon)\}} \Rightarrow \psi$, 其中 $\psi^\varepsilon = (\phi^\varepsilon - 1)/a(\varepsilon)$, 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\mathcal{G}^\varepsilon(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}\phi^\varepsilon}) \Rightarrow \mathcal{G}_0(\psi).$$

对于映射 $\mathcal{G}_0: L^2(\nu_T) \rightarrow \mathbb{U}$ 及 $\eta \in \mathbb{U}$, 令

$$\mathbb{S}_\eta^0 = \{\psi \in L^2(\nu_T) : \eta = \mathcal{G}_0(\psi)\},$$

并定义速率函数 I 为

$$I(\eta) = \inf_{\psi \in \mathbb{S}_\eta^0} \left\{ \frac{1}{2} \|\psi\|_2^2 \right\}. \quad (2.2)$$

按照约定, 若 $\mathbb{S}_\eta^0 = \emptyset$, 则 $I(\eta) = +\infty$.

基于上面的描述, 我们给出文献 [31] 中的中偏差结果.

定理 2.1 假设泛函 $\mathcal{G}^\varepsilon$ 和 $\mathcal{G}_0$ 满足条件 2.1, 则 $Y^\varepsilon = \mathcal{G}^\varepsilon(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}})$ 满足速度为 $\varepsilon/a^2(\varepsilon)$ 的大偏差原理, 而速率函数 I 由 (2.2) 定义, 即

- (1) 对任意的 $s > 0$, 集合 $\Phi(s) = \{x \in \mathbb{U} : I(x) \leq s\}$ 是紧的;
- (2) 对任意的闭集 $F \subseteq \mathbb{U}$, 有

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{a^2(\varepsilon)} \log \bar{\mathbb{P}}(Y^\varepsilon \in F) \leq - \inf_{x \in F} I(x);$$

- (3) 对任意的开集 $G \subseteq \mathbb{U}$, 有

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{a^2(\varepsilon)} \log \bar{\mathbb{P}}(Y^\varepsilon \in G) \geq - \inf_{x \in G} I(x).$$

3 带跳的平均场随机微分方程的中偏差

本节将在空间 $(\bar{\mathbb{M}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{M}}), \bar{\mathbb{P}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\})$ 上建立由方程 (1.1) 确定的过程 $X^\varepsilon(t)$ 的中偏差原理.

假设 3.1 设映射 $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $b: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 和 $G: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 满足下面的条件:

- (1) 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^d$, 存在 $K_1 > 0$, 使得

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_1 |x - y|;$$

- (2) 对任意的 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$, 对常数 $K_1 > 0$ 和非负函数 $L_G \in L^1(\nu) \cap L^2(\nu)$, 有下面两式成立:

$$|G(x_1, y_1, z) - G(x_2, y_2, z)| \leq L_G(z)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|);$$

- (3) 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 及 $z \in \mathbb{X}$, 存在非负函数 $M_G \in L^1(\nu) \cap L^2(\nu)$, 使得

$$|G(x, y, z)| \leq M_G(z)(1 + |x| + |y|).$$

在此假设成立的条件下, 可知方程 (1.1) 有唯一的全局解 (参见文献 [45]). 进一步, 由假设 3.1 可得方程系数满足线性增长条件, 即存在常数 K'_1 , 使得

$$|\varphi(x)| \leq K'_1(1 + |x|), \quad |b(x, y)| \leq K'_1(1 + |x| + |y|). \quad (3.1)$$

记 $D([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 为 $[0, T]$ 到 $\mathbb{R}^d$ 上右连续且具有左极限的函数全体组成的空间. 利用 Yamada-Watanabe 定理可知, 在假设 3.1 成立的条件下, 存在可测映射 $\bar{\mathcal{G}}^\varepsilon : \bar{\mathbb{M}} \rightarrow D([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 使得 $X^\varepsilon = \bar{\mathcal{G}}^\varepsilon(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}})$ (参见文献 [45]). 进一步地, 存在映射 $\mathcal{G}^\varepsilon$ 使得 $Y^\varepsilon = \mathcal{G}^\varepsilon(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}})$, 其中

$$Y^\varepsilon = \frac{1}{a(\varepsilon)}(X^\varepsilon - X^0).$$

对可微函数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, 定义矩阵 $Df(x) = (\partial f_i(x)/\partial x_j)_{i,j}$, $x \in \mathbb{R}^d$; 用 $\|Df(x)\|_{\text{op}}$ 表示矩阵 $Df(x)$ 的算子范数. 定义函数集

$$\mathbb{G} = \left\{ g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} : \text{存在 } \delta > 0, \text{ 使得 } \forall \Gamma \text{ 满足 } \nu(\Gamma) < \infty, \text{ 则 } \int_{\Gamma} \exp(\delta g^2(z)) \nu(dz) < \infty \right\}.$$

为了证明本文的主要结果, 我们还需介绍如下假设.

假设 3.2 设下面两条成立:

(4) 函数 L_G 和 M_G 包含在集合 $\mathbb{G}$ 中;

(5) 映射 $x \mapsto \varphi(x)$ 和 $(x, y) \mapsto b(x, y)$ 是可微的, 且存在常数 $K_2 \in (0, \infty)$, 使得

$$\begin{aligned} \|D_1 b(x_1, y_1) - D_1 b(x_2, y_2)\|_{\text{op}} &\leq K_2(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \\ \|D_2 b(x_1, y_1) - D_2 b(x_2, y_2)\|_{\text{op}} &\leq K_2(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \end{aligned}$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$, $D_i b(x, y)$ 表示 $b(x, y)$ 关于第 i 个分量的偏导数.

下面是本文的主要结果, 它描述了平均场随机微分方程的中偏差原理.

定理 3.1 若假设 3.1 和 3.2 成立, 则 $\{Y^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 以速度 $\varepsilon/a^2(\varepsilon)$ 在空间 $D([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 上服从大偏差原理, 速率函数为

$$I(\eta) = \inf_{\psi \in L^2(\nu_T)} \left\{ \frac{1}{2} \|\psi\|_2^2 \right\},$$

其中 (η, ψ) 满足下面的方程:

$$\begin{aligned} d\eta(t) &= \{D_1 b(X^0(t), \varphi(X^0(t)))\eta(t) + D_2 b(X^0(t), \varphi(X^0(t)))D\varphi(X^0(t))\eta(t)\}dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{X}} \psi(t, z)G(X^0(t), \varphi(X^0(t)), z)\nu(dz)dt, \end{aligned} \quad (3.2)$$

其初始条件为 $\eta(0) = o$, 其中 o 表示 $\mathbb{R}^d$ 的坐标原点. 按照约定, 若 $\eta \in D([0, T]; \mathbb{R}^d) \setminus C([0, T]; \mathbb{R}^d)$, 则 $I(\eta) = \infty$, 即

- (1) 对任意的 $s > 0$, 集合 $\Phi(s) = \{x \in D([0, T]; \mathbb{R}^d) : I(x) \leq s\}$ 是紧的;
- (2) 对任意的闭集 $F \subseteq D([0, T]; \mathbb{R}^d)$, 有

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{a^2(\varepsilon)} \log \bar{\mathbb{P}}(Y^\varepsilon \in F) \leq - \inf_{x \in F} I(x);$$

- (3) 对任意的开集 $G \subseteq D([0, T]; \mathbb{R}^d)$, 有

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{a^2(\varepsilon)} \log \bar{\mathbb{P}}(Y^\varepsilon \in G) \geq - \inf_{x \in G} I(x).$$

设 $\mathcal{G}_0 : L^2(\nu_T) \rightarrow C([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 由下式确定:

$$\mathcal{G}_0(\psi) = \eta, \quad \text{其中 } \psi \in L^2(\nu_T), \quad \eta \text{ 是 (3.2) 的解.} \quad (3.3)$$

接下来的工作就是要证明定理 3.1. 根据定理 2.1, 我们只需证明本节定义的 $\mathcal{G}^\varepsilon$ 和 $\mathcal{G}_0$ 满足第 2 节中的条件 2.1 即可.

引理 3.1 设假设 3.1 和 3.2 成立. 对某个 $N \in (0, \infty)$, 设 $\psi^\varepsilon, \psi \in B_2(N)$ 满足当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\psi^\varepsilon \rightarrow \psi$, 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\mathcal{G}_0(\psi^\varepsilon) \rightarrow \mathcal{G}_0(\psi)$, 其中 $\mathcal{G}_0$ 由 (3.3) 定义.

证明 由假设 3.1 可推得, $\|D\varphi\|_{\text{op}}, \|D_1b(X^0(s), \varphi(X^0(s)))\|_{\text{op}}$ 和 $\|D_2b(X^0(s), \varphi(X^0(s)))\|_{\text{op}}$ 是有界的, 并由 $\mathcal{G}_0(\psi^\varepsilon) = \eta^\varepsilon$ 和 $\mathcal{G}_0(\psi) = \eta$ 可知,

$$\begin{aligned} |\eta^\varepsilon(t) - \eta(t)| &\leq \left| \int_0^t D_1b(X^0(s), \varphi(X^0(s))) (\eta^\varepsilon(s) - \eta(s)) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t D_2b(X^0(s), \varphi(X^0(s))) D\varphi(X^0(s)) (\eta^\varepsilon(s) - \eta(s)) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{X}} (\psi^\varepsilon(s, z) - \psi(s, z)) G(X^0(s), \varphi(X^0(s)), z) \nu(dz) ds \right| \\ &\leq K_1(K_1 + 1) \int_0^t |\eta^\varepsilon(s) - \eta(s)| ds + \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{X}} |\psi^\varepsilon(s, z) - \psi(s, z)|^2 \nu(dz) ds \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{X}} M_G^2(z) (1 + |X^0(s)| + |\varphi(X^0(s))|)^2 \nu(dz) ds \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_1(K_1 + 1) \int_0^t |\eta^\varepsilon(s) - \eta(s)| ds + \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{X}} |\psi^\varepsilon(s, z) - \psi(s, z)|^2 \nu(dz) ds \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \|M_G\|_2 \left(1 + \sup_{0 \leq s \leq T} |X^0(s)| + \sup_{0 \leq s \leq T} |\varphi(X^0(s))| \right) \\ &\leq K_1(K_1 + 1) \int_0^t |\eta^\varepsilon(s) - \eta(s)| ds + \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{X}} |\psi^\varepsilon(s, z) - \psi(s, z)|^2 \nu(dz) ds \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \|M_G\|_2 (1 + K'_1) \left(1 + \sup_{0 \leq s \leq T} |X^0(s)| \right). \end{aligned}$$

由 $X^0(t)$ 连续可知, 存在常数 $C_0 > 0$, 使得

$$|\eta^\varepsilon(t) - \eta(t)| \leq K_1(K_1 + 1) \int_0^t |\eta^\varepsilon(s) - \eta(s)| ds + C_0 \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{X}} |\psi^\varepsilon(s, z) - \psi(s, z)|^2 \nu(dz) ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

由 Gronwall 不等式, 可得

$$|\eta^\varepsilon(t) - \eta(t)| \leq C_0 e^{K_1(K_1+1)t} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{X}} |\psi^\varepsilon(s, z) - \psi(s, z)|^2 \nu(dz) ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

进一步, 有

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\eta^\varepsilon(t) - \eta(t)| \leq C_0 e^{K_1(K_1+1)T} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{X}} |\psi^\varepsilon(s, z) - \psi(s, z)|^2 \nu(dz) ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

从而结论成立. □

引理 3.2 和 3.3 的证明已在文献 [31] 中给出.

引理 3.2 设 $g \in L^2(\nu) \cap \mathbb{G}$ 及 $M > 0$, 存在常数 $\iota > 0$, 使得对任意的可测集 $I \subseteq [0, T]$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\sup_{\phi \in \mathcal{S}_{+, \varepsilon}^M} \int_{I \times \mathbb{X}} g^2(z) \phi(t, z) dt \nu(dz) \leq \iota(a^2(\varepsilon) + \lambda_T(I)).$$

引理 3.3 给定 $g \in L^2(\nu) \cap \mathbb{G}$ 及 $[0, T]$ 的可测子集 I . 对 $M > 0$, 存在映射 $\rho, \varrho: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 满足当 $v \uparrow \infty$ 时, $\rho(v) \downarrow 0$, 对所有的 $\varepsilon, \beta > 0$, 使得下式成立:

$$\sup_{\psi \in \mathcal{S}_\varepsilon^M} \int_{I \times \mathbb{X}} |g(z) \psi(s, z)| ds \nu(dz) \leq \varrho(\beta) \lambda_T(I)^{\frac{1}{2}} + \rho(\beta) a(\varepsilon).$$

注意到对 $\phi \in \mathcal{U}_{+, \varepsilon}^M$, 利用 Girsanov 定理 (参见文献 [4, 引理 2.3]) 可知, $\bar{X}^{\varepsilon, \phi} = \bar{\mathcal{G}}^\varepsilon(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1} \phi})$ 是下述随机微分方程的解:

$$d\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(t) = b(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(t), \bar{\mathbb{E}}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(t)))dt + \int_{\mathbb{X}} G(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(t-), \bar{\mathbb{E}}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(t-)), z)(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1} \phi}(dzdt) - \nu(dz)dt), \quad (3.4)$$

初始条件为 $\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(0) = x \in \mathbb{R}^d$ (参见文献 [45]). 令 $\bar{Y}^{\varepsilon, \phi} = \mathcal{G}^\varepsilon(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1} \phi})$, 显然可得

$$\bar{Y}^{\varepsilon, \phi} = \frac{1}{a(\varepsilon)} (\bar{X}^{\varepsilon, \phi} - X^0). \quad (3.5)$$

下面的两个引理描述的是 $\bar{X}^{\varepsilon, \phi}$ 和 $\bar{Y}^{\varepsilon, \phi}$ 的矩有界性.

引理 3.4 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} \sup_{\phi \in \mathcal{U}_{+, \varepsilon}^M} \bar{\mathbb{E}} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2 \right] < \infty.$$

证明 利用 Itô 公式, 可得

$$\begin{aligned} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(t)|^2 &\leq |x|^2 + 2 \int_0^t |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)| \cdot |b(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s), \bar{\mathbb{E}}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)))| ds + M_1(t) + M_2(t) \\ &\quad + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{X}} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)| |G(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s), \bar{\mathbb{E}}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)), z)| |1 - \phi(s, z)| ds \nu(dz) \\ &\leq |x|^2 + M_1(t) + M_2(t) + \int_0^t (1 + |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)| + |\bar{\mathbb{E}}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s))|) \\ &\quad \times |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)| \left(K'_1 + \int_{\mathbb{X}} M_G(z) |1 - \phi(s, z)| \nu(dz) \right) ds, \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} M_1(t) &= 2\varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \int_{\mathbb{X}} \langle \bar{X}^{\varepsilon, \phi}(u-), G(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(u-), \bar{\mathbb{E}}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(u-)), z) \rangle \tilde{N}^{\varepsilon^{-1} \phi}(dudz) \right|, \\ M_2(t) &= \varepsilon^2 \int_0^t \int_{\mathbb{X}} |G(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s-), \bar{\mathbb{E}}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s-)), z)|^2 N^{\varepsilon^{-1} \phi}(dsdz). \end{aligned}$$

由 (3.1) 和假设 3.1 知,

$$\bar{\mathbb{E}} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2 \right) \leq |x|^2 + \bar{\mathbb{E}} M_1(t) + \bar{\mathbb{E}} M_2(t) + \int_0^t \bar{\mathbb{E}} (|\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)| (1 + |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)| + K'_1 (1 + \bar{\mathbb{E}} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)|))) ds$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(K'_1 + \int_{\mathbb{X}} M_G(z) |1 - \phi(s, z)| \nu(dz) \right) ds \\
& \leq |x|^2 + \bar{E}M_1(t) + \bar{E}M_2(t) + \int_0^t (K'_1 + 1) \left(1 + 2\bar{E} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(u)|^2 \right) \right) \\
& \times \left(K'_1 + \int_{\mathbb{X}} M_G(z) |1 - \phi(s, z)| \nu(dz) \right) ds.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

根据 Gronwall 不等式, 由引理 3.3 知, 存在常数 C_1 使得

$$\bar{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2 \right) \leq C_1 (1 + \bar{E}M_1(t) + \bar{E}M_2(t)).$$

利用 Burkhold-Davis-Gundy 不等式和 Jensen 不等式可知, 存在常数 C_2 使得

$$\begin{aligned}
\bar{E}M_1(t) & \leq 2\sqrt{\varepsilon}C_2\bar{E} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{X}} (1 + |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)| + |\bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s))|)^2 |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2 M_G^2(z) \phi(s, z) d\nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq 2C_2\sqrt{\varepsilon}\bar{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)| (1 + |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)| + K'_1(1 + \bar{E}|\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)|)) \right) \left(\int_0^t \int_{\mathbb{X}} M_G^2(z) \phi(s, z) d\nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq 2C_2(K'_1 + 1)\sqrt{\varepsilon}\bar{E} \left(1 + 2 \sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2 \right) \left(\int_0^t \int_{\mathbb{X}} M_G^2(z) \phi(s, z) d\nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

另一方面, 由 Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned}
\bar{E}M_2(t) & \leq \varepsilon\bar{E} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{X}} (1 + |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)| + |\bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s))|)^2 M_G^2(z) \phi(s, z) d\nu(dz) \right) \\
& \leq \varepsilon\bar{E} \sup_{0 \leq s \leq t} (1 + |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)| + K'_1\bar{E}(1 + |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)|))^2 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{X}} M_G^2(z) \phi(s, z) d\nu(dz) \right) \\
& \leq 2(K'_1 + 1)^2\varepsilon\bar{E} \left(1 + \sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2 \right) \left(\int_0^t \int_{\mathbb{X}} M_G^2(z) \phi(s, z) d\nu(dz) \right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

综上, 根据引理 3.2, 对充分小的 $\varepsilon > 0$, 存在常数 C_3 和 C_4 使得

$$\bar{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2 \right) \leq C_3 + C_4\sqrt{\varepsilon}\bar{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2 \right). \tag{3.10}$$

选取 ε_0 使得 $1 - C_4\sqrt{\varepsilon_0} < \frac{1}{2}$, 则引理结论显然成立. $\square$

引理 3.5 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} \sup_{u \in \mathcal{U}_{+, \varepsilon}^M} \bar{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |\bar{Y}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2 \right] < \infty.$$

证明 设 $\phi \in \mathcal{U}_{+, \varepsilon}^M$, 令 $\psi = (\phi - 1)/a(\varepsilon)$. 注意到

$$\tilde{N}^{\varepsilon^{-1}\phi}(dsdz) = N^{\varepsilon^{-1}\phi}(dsdz) - \varepsilon^{-1}\phi(s, z)ds\nu(dz).$$

因此,

$$\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(t) - X^0(t) = \int_0^t (b(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s), \bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s))) - b(X^0(s), \varphi(X^0(s))))ds$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{X}} G(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s-), \bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s-)), z) \tilde{N}^{\varepsilon^{-1}\phi}(dsdz) \\
 & + \int_0^t \int_{\mathbb{X}} (G(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s), \bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)), z) - G(X^0(s), \varphi(X^0(s-)), z))(\phi(s, z) - 1) d\nu(dz) \\
 & + \int_0^t \int_{\mathbb{X}} G(X^0(s), \varphi(X^0(s-)), z)(\phi(s, z) - 1) d\nu(dz).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

令

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \frac{1}{a(\varepsilon)} \int_0^t (b(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s), \bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s))) - b(X^0(s), \varphi(X^0(s)))) ds, \\
 B(t) &= \frac{1}{a(\varepsilon)} \int_0^t \int_{\mathbb{X}} G(X^0(s), \varphi(X^0(s)), z)(\phi(s, z) - 1) d\nu(dz), \\
 \Delta_1(t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{X}} (G(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s), \bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)), z) - G(X^0(s), \varphi(X^0(s)), z)) \psi(s, z) d\nu(dz), \\
 M^\varepsilon(t) &= \frac{\varepsilon}{a(\varepsilon)} \int_0^t \int_{\mathbb{X}} G(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s-), \bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)), z) \tilde{N}^{\varepsilon^{-1}\phi}(dsdz).
 \end{aligned}$$

显然,

$$\bar{Y}^{\varepsilon, \phi}(t) = A(t) + B(t) + \Delta_1(t) + M^\varepsilon(t). \tag{3.12}$$

设 C_i ($i = 5, \dots, 9$) 为常数. 由于 M^ε 是鞅, 利用 Doob 不等式和 Jensen 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
 \bar{E}\left(\sup_{t \leq T} |M^\varepsilon(t)|^2\right) &\leq \frac{4\varepsilon^2}{a^2(\varepsilon)} \bar{E} \int_0^T \int_{\mathbb{X}} |G(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s), \bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)), z)|^2 \varepsilon^{-1} \phi(s, z) d\nu(dz) \\
 &\leq \frac{4\varepsilon}{a^2(\varepsilon)} \bar{E} \left(1 + \sup_{t \leq T} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(t)| + \sup_{t \leq T} |\bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s))|\right)^2 \int_0^T \int_{\mathbb{X}} M_G^2(z) \phi(s, z) d\nu(dz) \\
 &\leq \frac{12\varepsilon}{a^2(\varepsilon)} (K'_1 + 1)^2 \left(1 + \bar{E}\left(\sup_{t \leq T} |\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(t)|^2\right)\right) \int_0^T \int_{\mathbb{X}} M_G^2(z) \phi(s, z) d\nu(dz) \\
 &\leq C_5 \frac{\varepsilon}{a^2(\varepsilon)},
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中, 最后一个不等式是根据引理 3.2 和 3.4 得到的. 利用 Jensen 不等式, 结合引理 3.3 和 3.4 知, 对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned}
 \bar{E}\left(\sup_{s \leq t} |\Delta_1(s)|^2\right) &\leq \bar{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{X}} (|\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s) - \bar{X}^0(s)| + |\bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)) - \varphi(\bar{X}^0(s))|) L_G(z) |\psi(s, z)| d\nu(dz)\right)^2 \\
 &\leq \bar{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{X}} (|\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s) - \bar{X}^0(s)| + K_1 |\bar{E}\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s) - \bar{X}^0(s)|) L_G(z) |\psi(s, z)| d\nu(dz)\right)^2 \\
 &\leq 2(K_1^2 + 1) a^2(\varepsilon) \bar{E}\left(\sup_{s \leq t} |\bar{Y}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2\right) \left(\int_0^t \int_{\mathbb{X}} L_G(z) |\psi(s, z)| d\nu(dz)\right)^2 \\
 &\leq C_6 a^2(\varepsilon) \bar{E}\left(\sup_{s \leq t} |\bar{Y}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2\right).
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

同样地, 对任意的 $t \in [0, T]$, 由 Jensen 不等式可得

$$\bar{E}\left(\sup_{s \leq t} |A(s)|^2\right) \leq K_1^2 T \frac{1}{a^2(\varepsilon)} \bar{E} \int_0^t (|\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s) - \bar{X}^0(s)| + |\bar{E}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s)) - \varphi(\bar{X}^0(s))|)^2 ds$$

$$\begin{aligned} &\leq K_1^2 T \frac{1}{a^2(\varepsilon)} \bar{\mathbb{E}} \int_0^t (|\bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s) - \bar{X}^0(s)| + K_1 |\bar{\mathbb{E}} \bar{X}^{\varepsilon, \phi}(s) - \bar{X}^0(s)|)^2 ds \\ &\leq C_7 \int_0^t \bar{\mathbb{E}} \left(\sup_{s \leq t} |\bar{Y}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2 \right) ds. \end{aligned}$$

由假设 3.1(3) 和引理 3.3, 可得

$$\sup_{s \leq T} |B(s)|^2 \leq (K_1' + 1)^2 \left(1 + \sup_{s \leq T} |X^0(s)| \right)^2 \left(\int_0^T \int_{\mathbb{X}} M_G(z) |\psi(s, z)| ds \nu(dz) \right)^2 \leq C_8. \quad (3.15)$$

综合上面的估计, 对所有的 $\phi \in \mathcal{U}_{+, \varepsilon}^M$, $t \in [0, T]$, 可得

$$(1 - 5C_6 a^2(\varepsilon)) \bar{\mathbb{E}} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{Y}^{\varepsilon, \phi}(s)|^2 \right] \leq C_9 \left(1 + \int_0^t \bar{\mathbb{E}} \left[\sup_{0 \leq r \leq s} |\bar{Y}^{\varepsilon, \phi}(r)|^2 \right] dr \right). \quad (3.16)$$

选取 ε_0 , 使得对所有的 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, 有 $(1 - 5C_6 a^2(\varepsilon)) > 1/3$. 由 Gronwall 不等式知引理结论成立. 证毕. $\square$

下述引理 3.6 的严格的理论证明可参见文献 [31].

引理 3.6 设 $M < \infty$, 对所有的 $\varepsilon > 0$, 令 $\psi^\varepsilon \in \mathcal{S}_\varepsilon^M$. 设函数 f 满足对某个 $g \in L^2(\nu) \cap \mathbb{G}$, 有

$$|f(s, z)| \leq g(z), \quad s \in [0, T], \quad z \in \mathbb{X}.$$

设存在 $\beta \in (0, 1]$, 使得在球 $B_2((M\kappa_2(1))^{1/2})$ 中, $\psi^\varepsilon \mathbf{1}_{\{|\psi^\varepsilon| \leq \frac{\beta}{a(\varepsilon)}\}}$ 收敛到 ψ , 则对所有的 $t \in [0, T]$, 有

$$\int_{[0, t] \times \mathbb{X}} f \psi^\varepsilon ds \nu(dz) \rightarrow \int_{[0, t] \times \mathbb{X}} f \psi ds \nu(dz).$$

为了证明下面的引理 3.8, 先介绍一个胎紧性准则.

引理 3.7 (参见文献 [46, 定理 1]) 设对任意的 $\varepsilon > 0$, τ_ε 是关于自然 σ -代数的停时, 且只取有限个值, δ_ε 满足 $0 \leq \delta_\varepsilon \leq T$ 且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\delta_\varepsilon \rightarrow 0$. 设 $\{Y^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ 是 $D([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 中的随机变量序列, 满足下面两条:

- (1) 对每个 $t \in [0, T]$, $\{Y^\varepsilon(t)\}_{\varepsilon > 0}$ 是胎紧的;
- (2) 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $Y^\varepsilon(\tau_\varepsilon + \delta_\varepsilon) - Y^\varepsilon(\tau_\varepsilon)$ 依概率收敛到 0,

则 $\{Y^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ 在 $D([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 上是胎紧的.

引理 3.8 设对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M < \infty$, 使得 $\phi^\varepsilon \in \mathcal{U}_{+, \varepsilon}^M$. 令 $\psi^\varepsilon = (\phi^\varepsilon - 1)/a(\varepsilon)$, $\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon} = \mathcal{G}^\varepsilon(\varepsilon N^{\varepsilon-1} \phi^\varepsilon)$. 注意到 $\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon} = (\bar{X}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon} - X^0)/a(\varepsilon)$, 其中 $\bar{X}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon} = \bar{\mathcal{G}}^\varepsilon(\varepsilon N^{\varepsilon-1} \phi^\varepsilon)$, 则 $\{\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}, \psi^\varepsilon \mathbf{1}_{\{|\psi^\varepsilon| \leq \frac{\beta}{a(\varepsilon)}\}}\}$ 在 $D([0, T]; \mathbb{R}^d) \times B_2((M\kappa_2(1))^{1/2})$ 上是胎紧的, 其中 $\beta \in (0, 1]$, 且极限点 $(\bar{Y}, \psi)$ 满足 (3.2).

证明 继续采用引理 3.5 中的记号, 只需把其中的 ϕ 替换为 ϕ^ε , 其中 $\phi^\varepsilon \in \mathcal{U}_{+, \varepsilon}^M$. 根据 (3.13), 可得当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\bar{\mathbb{E}}(\sup_{t \leq T} |M^\varepsilon(t)|^2) \rightarrow 0$. 同理, 由引理 3.5 和 (3.14) 可得, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\bar{\mathbb{E}}(\sup_{t \leq T} |\Delta_1(t)|^2) \rightarrow 0$. 根据 Taylor 定理可知,

$$\begin{aligned} &b(\bar{X}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s), \bar{\mathbb{E}} \varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s))) - b(X^0(s), \varphi(X^0(s))) \\ &= a(\varepsilon) D_1 b(X^0(s), \varphi(X^0(s))) \bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s) + a(\varepsilon) D_2 b(X^0(s), \varphi(X^0(s))) D \varphi(X^0(s)) \bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s) + R_1^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}, \end{aligned}$$

其中

$$|R_1^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}| \leq \frac{1}{2} K_2 (|\bar{X}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(t) - X^0(t)|^2 + 2 |\bar{X}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(t) - X^0(t)| |\bar{\mathbb{E}} \varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(t)) - \varphi(X^0(t))|)$$

$$+ |\bar{\mathbb{E}}\varphi(\bar{X}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(t)) - \varphi(X^0(t))|^2).$$

因此,

$$A(t) = \int_0^t (D_1 b(X^0(s), \varphi(X^0(s))) \bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s) + D_2 b(X^0(s), \varphi(X^0(s))) D\varphi(X^0(s)) \bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s)) ds + \Delta_2(t),$$

由 Jensen 不等式可知,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}\left(\sup_{t \leq T} |\Delta_2(t)|\right) &\leq K_2 a(\varepsilon) \bar{\mathbb{E}} \int_0^T (|\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s)|^2 + K_1^2 |\bar{\mathbb{E}} \bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s)|^2) ds \\ &\leq (1 + K_1^2) K_2 a(\varepsilon) \int_0^T \bar{\mathbb{E}} |\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 由引理 3.5, 可得 $\bar{E}[\sup_{t \leq T} |\Delta_2(t)|] \rightarrow 0$. 结合 (3.12) 与上面的估计, 可得

$$\begin{aligned} \bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(t) &= \int_0^t (D_1 b(X^0(s), \varphi(X^0(s))) \bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s) + D_2 b(X^0(s), \varphi(X^0(s))) D\varphi(X^0(s)) \bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{X}} G(X^0(s), \varphi(X^0(s)), z) \psi^\varepsilon(s, z) d\nu(dz) + \Delta(t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\Delta(t) = M^\varepsilon(t) + \Delta_1(t) + \Delta_2(t) + \Delta_3(t) \Rightarrow 0$. 下面证明 $\{\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ 在 $D([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 上是胎紧的. 只需证明 $\{\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ 满足引理 3.7(1) 和 3.7(2). 对任意给定的 $R > 0$, 利用引理 3.5 和 Chebyshev 不等式, 可得

$$\bar{\mathbb{P}}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(t)| > R\right) \leq \frac{C_{10}}{R^2},$$

其中 C_{10} 为常数. 因此, 对任意的 $t \in [0, T]$, $\{\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ 是胎紧的. 下面证明 (2) 成立. 设 τ_ε 和 δ_ε 按照引理 3.7 定义, 则可得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}|\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(\tau_\varepsilon + \delta_\varepsilon) - \bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(\tau_\varepsilon)| &\leq \bar{\mathbb{E}}(|\Delta(\tau_\varepsilon + \delta_\varepsilon) - \Delta(\tau_\varepsilon)|) + \bar{\mathbb{E}}\left(\int_{\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon + \delta_\varepsilon} |D_1 b(X^0(s), \varphi(X^0(s))) \bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s) \right. \\ &\quad \left. + D_2 b(X^0(s), \varphi(X^0(s))) D\varphi(X^0(s)) \bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s)| ds\right) \\ &\quad + \bar{\mathbb{E}}\left(\int_{\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon + \delta_\varepsilon} \int_{\mathbb{X}} |G(X^0(s), \varphi(X^0(s)), z) \psi^\varepsilon(s, z)| d\nu(dz)\right) \\ &=: \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

显然, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\mathbf{I}_1 \rightarrow 0$. 由假设 3.1 和引理 3.5 可得, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\mathbf{I}_2 \leq K_1(1 + K_1) \bar{\mathbb{E}}\left(\sup_{0 \leq s \leq T} |\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}(s)|\right) \cdot \delta_\varepsilon \rightarrow 0.$$

利用假设 3.1(3) 和引理 3.3 可知, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_3 &\leq \bar{\mathbb{E}}\left(1 + \sup_{0 \leq t \leq T} |X^0(t)|\right) \int_{\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon + \delta_\varepsilon} \int_{\mathbb{X}} M_G(z) |\psi^\varepsilon(s, z)| d\nu(dz) \\ &\leq \bar{\mathbb{E}}\left(1 + \sup_{0 \leq t \leq T} |X^0(t)|\right) (\varrho(1) \sqrt{\delta_\varepsilon} + \rho(1) a(\varepsilon)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

因此, $\{\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ 在 $D([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 上是胎紧的. 由于 $B_2((M\kappa_2(1))^{1/2})$ 是紧的, 由文献 [31, 引理 4.9] 知, $\psi^\varepsilon \mathbf{1}_{\{|\psi^\varepsilon| \leq \frac{\beta}{a(\varepsilon)}\}}$ 是胎紧的. 不失一般性, 利用 Skorokhod 表示定理, 设 $\{\bar{Y}^{\varepsilon, \phi^\varepsilon}, \psi^\varepsilon \mathbf{1}_{\{|\psi^\varepsilon| \leq \frac{\beta}{a(\varepsilon)}\}}\}$ 依分布收敛于 $(\bar{Y}, \psi)$. 在 (3.17) 的两边令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 由引理 3.6 可知, $(\bar{Y}, \psi)$ 满足 (3.2). 证毕. $\square$

有了上面的引理, 定理 3.1 的证明就变得非常简单了.

定理 3.1 的证明 根据定理 2.1, 再结合引理 3.1 和 3.8 可知定理 3.1 的结论成立. 证毕. $\square$

致谢 衷心感谢鲍建海副教授给予的宝贵建议, 感谢审稿人所提出的有益评论和宝贵建议.

参考文献

- Dembo A, Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications. New York: Springer-Verlag, 1998
- Dupuis P, Ellis R S. A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations. New York: John Wiley & Sons, 1997
- Budhiraja A, Dupuis P. A variational representation for positive functionals of infinite dimensional Brownian motion. Probab Math Statist, 2000, 20: 39–61
- Budhiraja A, Dupuis P, Maroulas V. Variational representations for continuous time processes. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 2011, 47: 725–747
- Bao J H, Yuan C G. Large deviations for neutral functional SDEs with jumps. Stochastics, 2015, 87: 48–70
- Wu J. Uniform large deviations for multivalued stochastic differential equations with Poisson jumps. Kyoto J Math, 2011, 51: 535–559
- Budhiraja A, Chen J, Dupuis P. Large deviations for stochastic partial differential equations driven by a Poisson random measure. Stochastic Process Appl, 2013, 123: 523–560
- Maroulas V. Large deviations for infinite-dimensional stochastic systems with jumps. Mathematika, 2011, 57: 175–192
- Yang X, Zhai J L, Zhang T S. Large deviations for SPDEs of jump type. Stoch Dyn, 2015, 15: 1550026
- Zhai J L, Zhang T S. Large deviations for 2-D stochastic Navier-Stokes equations driven by multiplicative Lévy noises. Bernoulli, 2015, 21: 2351–2392
- de Acosta A. Moderate deviations and associated Laplace approximations for sums of independent random vectors. Trans Amer Math Soc, 1992, 329: 357–375
- Deo C M, Babu G J. Probabilities of moderate deviations in a Banach space. Proc Amer Math Soc, 1981, 83: 392–397
- Djellout H. Moderate deviations for martingale differences and applications to φ -mixing sequences. Stochastics Stochastic Rep, 2002, 73: 37–63
- Gao F Q. Moderate deviations for martingales and mixing random processes. Stochastic Process Appl, 1996, 61: 263–275
- Ghosh M, Babu G J. Probabilities of moderate deviations for some stationary ϕ -mixing processes. Ann Probab, 1977, 5: 222–234
- Grama I G. On moderate deviations for martingales. Ann Probab, 1997, 25: 152–183
- Grama I G, Haeusler E. An asymptotic expansion for probabilities of moderate deviations for multivariate martingales. J Theoret Probab, 2006, 19: 1–44
- Gantert N, Zeitouni O. Large and moderate deviations for the local time of a recurrent Markov chain on $\mathbb{Z}^2$. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 1998, 34: 687–704
- de Acosta A, Chen X. Moderate deviations for empirical measures of Markov chains: Upper bounds. J Theoret Probab, 1998, 11: 1075–1110
- Chen X. Moderate deviations for Markovian occupation times. Stochastic Process Appl, 2001, 94: 51–70
- Wu L M. Moderate deviations of dependent random variables related to CLT. Ann Probab, 1995, 23: 420–445
- Liptser R, Spokoyny V. Moderate deviations type evaluation for integral functionals of diffusion processes. Electron J Probab, 1999, 4: 1–25
- Guillin A. Moderate deviations of inhomogeneous functionals of Markov processes and application to averaging. Stochastic Process Appl, 2001, 92: 287–313
- Guillin A. Averaging principle of SDE with small diffusion: Moderate deviations. Ann Probab, 2003, 31: 413–443
- Chigansky P, Liptser R. Moderate deviations for a diffusion-type process in a random environment. Theory Probab Appl, 2010, 54: 29–50
- Hu Y, Shi Z. Moderate deviations for diffusions with Brownian potentials. Ann Probab, 2004, 32: 3191–3220
- Jiang H. Moderate deviations for estimators of quadratic variational process of diffusion with compound Poisson jumps. Statist Probab Lett, 2010, 80: 1297–1305

- 28 Gao F, Jiang H. Moderate deviations for squared radial Ornstein-Uhlenbeck process. *Statist Probab Lett*, 2009, 79: 1378–1386
- 29 Wang R, Zhang T S. Moderate deviations for stochastic reaction-diffusion equations with multiplicative noise. *Potential Anal*, 2015, 42: 99–113
- 30 Wang R, Zhai J L, Zhang T S. A moderate deviation principle for 2-D stochastic Navier-Stokes equations. *J Differential Equations*, 2015, 258: 3363–3390
- 31 Budhiraja A, Dupuis P, Ganguly A. Moderate deviation principles for stochastic differential equations with jumps. *Ann Probab*, 2016, 44: 1723–1775
- 32 Dong Z, Xiong J, Zhai J L, et al. A moderate deviation principle for 2-D stochastic Navier-Stokes equations driven by multiplicative Lévy noises. *J Funct Anal*, 2017, 272: 227–254
- 33 Ma X C, Xi F B. Moderate deviations for neutral stochastic differential delay equations with jumps. *Statist Probab Lett*, 2017, 126: 97–107
- 34 Chan T. Dynamics of the McKean-Vlasov equation. *Ann Probab*, 1994, 22: 431–441
- 35 Talay D, Vaillant O. A stochastic particle method with random weights for the computation of statistical solutions of McKean-Vlasov equations. *Ann Appl Probab*, 2003, 13: 140–180
- 36 Bossy M, Talay D. A stochastic particle method for the McKean-Vlasov and the Burgers equation. *Math Comp*, 1997, 66: 157–192
- 37 Buckdahn R, Djehiche B, Li J, et al. Mean-field backward stochastic differential equations: A limit approach. *Ann Probab*, 2009, 37: 1524–1565
- 38 Kotelenetz P. A class of quasilinear stochastic partial differential equations of McKean-Vlasov type with mass conservation. *Probab Theory Related Fields*, 1995, 102: 159–188
- 39 Lasry J M, Lions P L. Mean field games. *Jpn J Math*, 2007, 2: 229–260
- 40 Xi F B, Yin G. Asymptotic properties of a mean-field model with a continuous-state-dependent switching process. *J Appl Probab*, 2009, 46: 221–243
- 41 Dos Reis G, Salkeld W, Tugaut J. Freidlin-Wentzell LDPs in path space for McKean-Vlasov equations and the functional iterated logarithm law. *ArXiv:1708.04961*, 2017
- 42 Feng S. Large deviations for Markov processes with mean field interaction and unbounded jumps. *Probab Theory Related Fields*, 1994, 100: 227–252
- 43 Feng S. Large deviations for empirical process of mean-field interacting particle system with unbounded jumps. *Ann Probab*, 1994, 22: 2122–2151
- 44 Léonard C. Large deviations for long range interacting particle systems with jumps. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 1995, 31: 289–323
- 45 Cai Y J, Huang J H, Maroulas V. Large deviations of mean-field stochastic differential equations with jumps. *Statist Probab Lett*, 2015, 96: 1–9
- 46 Aldous D. Stopping times and tightness. *Ann Probab*, 1978, 6: 335–340

Moderate deviations for mean-field stochastic differential equations with jumps

Xiaocui Ma & Fubao Xi

Abstract The mean-field stochastic differential equations have various applications in engineering and science. A moderate deviation principle for mean-field stochastic differential equations driven by Poisson random measure is established. The weak convergence method plays a key role.

Keywords moderate deviations, mean-field stochastic differential equations, Poisson random measure

MSC(2010) 60F10, 60H10

doi: 10.1360/N012018-00192