



裸奇点相关问题的数学进展

献给中山大学建校百年暨中山大学数学学科建设 100 周年

黎俊彬

中山大学数学学院, 广州 510275

E-mail: lijunbin@mail.sysu.edu.cn

收稿日期: 2024-03-28; 接受日期: 2024-05-31; 网络出版日期: 2024-09-13

国家重点研发计划 (批准号: 2022YFA1005400) 和国家自然科学基金 (批准号: 12326602 和 12141106) 资助项目

摘要 在广义相对论中, 裸奇点指的是那些不隐藏在黑洞内部的时空奇点. Penrose (1969) 提出的宇宙监督假设指出裸奇点不应该出现在引力坍缩的过程中. 然而, 人们随后通过数值计算和数学证明发现了裸奇点在引力坍缩中形成的例子, 转而猜测裸奇点应该是不稳定的. 本文回顾近年来广义相对论中裸奇点的不稳定性的一些数学进展.

关键词 广义相对论 Einstein 方程 宇宙监督假设 裸奇点 陷俘面

MSC (2020) 主题分类 35Q75, 83C57, 83C75

1 宇宙监督假设与裸奇点

宇宙监督假设¹⁾是经典广义相对论中最重要的问题之一, 由 Penrose^[42]在 1969 年提出, 旨在假设大自然中存在一种“宇宙监督”的机制, 用以禁止所谓裸露奇点在引力坍缩的过程中形成. 所谓裸露奇点, 或简称裸奇点, 指的是那些能够被处于远处的观测者所能观测到的奇点. 而这种禁止裸奇点的方法就是将它们隐藏在黑洞的内部——根据定义, 黑洞指的是不能被远处观测者观测到的时空区域. Penrose 提出宇宙监督假设是出于一种朴素的动机, 因为如果能够观测到奇点的存在, 则奇点处的物质密度与时空曲率可能存在的爆破 (并且目前尚没有完整的物理理论来描述奇点附近的时空几何), 将可能会影响到处于远处的观测者. 随后, 在 Hawking 对黑洞面积不减定理以及 (解析情形) 黑洞唯一性的证明中, 都在某种程度上假设了宇宙监督假设的正确性. 因此, 宇宙监督假设是否正确, 一直都是经典广义相对论的根本问题之一.

1) 更准确地, 是弱宇宙监督假设. 本文使用宇宙监督假设来特指弱宇宙监督假设. 强宇宙监督假设以及两者的区别可见 Christodoulou 的综述 [17], 强宇宙监督假设的最新数学进展可参见 Luk 的综述 [39].

英文引用格式: Li J B. Mathematical developments on the naked singularities (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 2141–2154, doi: 10.1360/SSM-2024-0087

宇宙监督假设可以被陈述为一个数学问题. 所谓引力坍缩, 指的是孤立系统在满足 Einstein 方程下的演化, 可以理解为从一个渐近平坦的 Cauchy 初值求解 Einstein 方程得到的解. Einstein 方程是广义相对论的基本方程, 具有如下形式:

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}. \quad (1.1)$$

这里只考虑宇宙学常数为零的情形. 这里 $g_{\alpha\beta}$ 是背景时空 4 维流形上的一个 Lorentz 度规, $\mathbf{Ric}$ 与 R 分别是 $g_{\alpha\beta}$ 的 Ricci 曲率与数量曲率, $T_{\alpha\beta}$ 是物质的能动张量. 如果将 $T_{\alpha\beta}$ 设为零, 则可得到真空的 Einstein 方程. 在非真空的情形, 对应于我们想要考虑的不同的物质, $T_{\alpha\beta}$ 有对应不同的形式. 在选定适当的坐标系后, Einstein 方程是一组双曲型方程, 这是因为, 在合适的坐标系下 (如波坐标, 或称为调和坐标), 大概可以认为

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} \sim g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta},$$

在 Lorentz 情形, 方程的主部显示这是双曲型的. 因此, 人们会考虑 Cauchy 初值问题. 对真空情形而言, Einstein 方程的 Cauchy 初值是一个三元组 $(\Sigma, \bar{g}, \bar{k})$, 其中 $(\Sigma, \bar{g})$ 是一个 3 维 Riemann 流形, $\bar{k}$ 是一个对称的 $(0, 2)$ 张量, 并且满足约束方程组

$$\begin{aligned} R(\bar{g}) - |\bar{k}|^2 + (\mathrm{tr}_{\bar{g}} \bar{k})^2 &= 0, \\ \mathrm{div}(\bar{k} - \mathrm{tr}_{\bar{g}} \bar{k} \bar{g}) &= 0. \end{aligned}$$

一个 Lorentz 流形 $(\mathcal{M}, g)$ 称为是这组 Cauchy 初值问题的真空 Einstein 方程解 (在相对论的术语中, 这称为 Cauchy 发展), 如果 $(\mathcal{M}, g)$ 满足真空 Einstein 方程解, 且 $(\Sigma, \bar{g})$ 可以等距嵌入到 $(\mathcal{M}, g)$ 中, 使得 $\bar{k}$ 是对应的第二基本形式, 并且 $(\mathcal{M}, g)$ 是整体双曲的且以 Σ 为 Cauchy 面, 即其中的任何一条不可延拓的因果曲线, 都与 Σ 交且只交一次. 约束方程组实际上是等距嵌入的 Gauss-Codazzi 方程组的缩并形式. Choquet-Bruhat^[8] 与 Choquet-Bruhat 和 Geroch^[10] 证明了任意给定一组 Cauchy 初值 $(\Sigma, \bar{g}, \bar{k})$, 都存在对应的 Cauchy 发展 $(\mathcal{M}, g)$, 并且最大的那个 Cauchy 发展, 称为最大 Cauchy 发展²⁾, 是唯一的. 用偏微分方程的语言, 这实际上是真空 Einstein 方程的局部适定性, 相比起传统的偏微分方程, 其描述的复杂性, 其实是来源于 Einstein 方程在坐标变换下的不变性. 而 Cauchy 初值是渐近平坦的, 是指趋于无穷远时, 该 Cauchy 初值接近于 Minkowski 时空的对应初值. 具体而言, 在去掉一个紧集 K 后, $\Sigma - K$ 与 Euclid 空间去掉一个闭球 $\mathbb{R}^3 - B$ 微分同胚, 并且在对应的坐标系下,

$$\bar{g}_{ij} - \delta_{ij} \rightarrow 0, \quad \bar{k}_{ij} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

在具体的问题中, 还会对以上衰减的速度作出具体的假设. 此外, 对于非真空的情形, 通过合适地给定 Cauchy 初值, 也可以陈述相应的结果, 在此不再赘述. 上述 Cauchy 初值等距嵌入到时空后, 是一个类空超曲面, 我们有时候也会考虑这个超曲面是类光的情形. 这种情形的局部适定性还没有得到完全的理解, 但是在我们感兴趣的大部分情形, 都有对应的局部适定性. 这里不展开讨论.

接下来引入裸奇点的定义. 奇点在广义相对论中的定义本身是一个困难的问题, 因为时空度规所处的背景时空流形本身也是求解的对象, 而奇点其实是处于时空流形以外的, 因此, 纵然过去有很多尝试, 人们发现要对广义相对论中的奇点给出一个统一的定义并非简单的事情 (参见文献 [37]). 不过, 针对具体的奇点, 我们还是可以有办法来描述. 所谓裸奇点, 指的是远处观测者在某个时刻观测到奇

2) 如无特指, 都是指最大未来 Cauchy 发展, 即最大 Cauchy 发展处于 Σ 未来的一部分.

点, 即它与“从奇点发出的光线”相交. 而从偏微分方程的角度, 称一个方程的解出现奇点, 指的是方程在有限时间后就不能再解了. 因此, 称一个时空出现裸奇点, 便可以理解为远处的观测者在有限的时间便会离开最大 Cauchy 发展. 因此, 可以作如下定义 (参见文献 [43]).

定义 1.1 [43] 设一个最大 Cauchy 发展 $(\mathcal{M}, g)$ 包含一个渐近平坦的类光超曲面 $\mathcal{H}$, 这个类光超曲面由指向未来的类光测地线生成. 记 v 是类光测地线的仿射参数, S_v 是函数 v 的截面. 在 $\mathcal{H}$ 上选定一个指向未来的类光向量场 $\underline{L}$, 使得 $\underline{L}$ 在每一点与 S_v 正交且 $\underline{L}$ 与那些类光测地线的切向量场 L 满足

$$g(L, \underline{L}) = -2.$$

称 $(\mathcal{M}, g)$ 包含裸奇点, 如果存在正数 $A > 0$ 以及一个渐近平坦的类光超曲面 $\mathcal{H}$, 并且按如上方式定义记号, 使得对充分大的 v , 在 S_v 上出发的以 $\underline{L}$ 为初始速度的类光测地线, 其在 $\mathcal{M}$ 中的部分的仿射参数不超过 A .

这个定义的方式最早可追溯到 Christodoulou 的综述 [17], 在该文献中, 他引入了“时空具有完备未来类光无穷远”的定义, 并且将这作为满足宇宙监督假设的涵义. 上述包含裸奇点的定义, 则是“时空具有完备未来类光无穷远”的否定陈述. 这种定义的方式一方面避免具体地谈及“奇点”的位置和行为; 另一方面, 相比起传统的物理教科书 (如文献 [24, 48] 等), 这种定义进一步避免谈及时空的共形紧化以及渐近平坦的复杂内涵. 然而, 人们在具体的研究中似乎并不会太拘泥于形式上的定义, 因为裸奇点事实上上有十分明显的物理图像, 文献 [43] 中裸奇点的精准定义, 据作者所知是第一个给出准确描述的, 这可能是为对裸奇点的物理图像并不熟悉的数学家所准备的.

值得指出的是, 任意给定一个渐近平坦的类空的 Cauchy 初值 (可能要对渐近平坦的速度作额外要求), 可以证明对应的最大 Cauchy 发展包含一个渐近平坦的光锥 (参见文献 [17, 28]). 因此, 总能在一个引力坍缩时空中谈论有还是没有裸奇点. 而从一个渐近平坦的光锥 $\mathcal{H}$ 出发 (下面继续使用定义 1.1 中的记号), Li 和 Zhu [35, 36] 证明了存在 $\epsilon > 0$, 使得对任意 v , S_v 上出发的以 $\underline{L}$ 为初始速度的类光测地线, 其仿射参数在对应的最大 Cauchy 发展中都不小于 ϵ . 我们将这称为未来类光无穷远的开性或局部延拓, 这是验证宇宙监督假设的一个非常初步的尝试.

2 裸奇点的例子

即使在现实中尚未观测到宇宙中存在有裸奇点的迹象, 也不代表裸奇点不存在, 数学工具可以为科学家提供一些佐证. 鉴于证明宇宙监督假设需要的数学工具可能超越了时代, 数学家和物理学家们在数十年中都致力于用数学方法 (包括理论分析和数值模拟) 寻找是否有裸奇点在引力坍缩中形成的例子, 并且试图从各种角度论证这些例子是否确实从物理上构成宇宙监督假设的反例.

2.1 流体坍缩中的例子

Oppenheimer 和 Snyder [40] 首次严格地构造出一个代表尘埃球引力坍缩的例子. 他们考虑了 Einstein 方程与尘埃的耦合, 尘埃是无压强的理想流体. 理想流体的能动张量是

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + p(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta), \quad (2.1)$$

其中 ρ , p 和 u 分别是流体的密度、压强和 4-速度. 尘埃即满足 $p = 0$ 的流体. 流体必须满足时空中的 Euler 方程. 他们假设时空是球对称的, 即 $SO(3)$ 可以等距地作用在时空上. 他们还假设尘埃球是

均匀的, 即对某个给定的半径 $r_0 > 0$, 当 $r < r_0$ 时, $\rho \equiv \rho_0$; 当 $r > r_0$ 时, $\rho \equiv 0$. 这个均匀尘埃球的坍缩结果是一个 Schwarzschild 黑洞. Christodoulou^[11] 考虑了非均匀的坍缩, 此时 $\rho = \rho(r)$ 可以是任意一个函数, 代表初始时刻的尘埃密度分布. 他还要求 ρ 在 $r = 0$ 处的奇数阶导数为零以保证时空的光滑性. 此外, Christodoulou 还要求 ρ 是一个递减函数以避免非中心奇点的形成. Christodoulou 发现, 只要 $\rho''(0) < 0$, 则在形成黑洞之前, 尘埃球中心就已经产生了奇点, 于是这个奇点处出发的光线可以离开这个奇点. 这至少是一个“局部裸露”的奇点. 额外调整尘埃球的外部的分布, 可以使得奇点出发的光线可以一直到达尘埃球的表面, 并在接下来逃离到远处. 这就得到了一个含有裸奇点的解. 一些物理学家考虑了更一般的初始物质和速度分布 (Christodoulou 考虑的情形是星体从静止状态开始坍缩), 仍然能够得到裸奇点存在的结论, 如文献 [26, 47]. 值得一提的是, 在 Christodoulou 的工作的十年以前, Gu^[21] 就开始研究从静止状态出发的球对称非均匀尘埃球的坍缩, 发现中心和非中心奇点都可以形成, 并且指出了中心奇点形成先于黑洞形成的可能性. Hu^[25] 则将关于奇点的形成的计算推广到不一定是静止状态出发的情形. 这些工作由于以中文发表, 很长一段时间不为国外的数学家和物理学家所知道 (参见文献 [9, 第 96–98 页]).

下面简单的讨论可进一步说明宇宙监督假设的复杂性. Gu^[21]、Hu^[25] 和 Yodzis 等^[49] 均指出球对称非均匀尘埃的坍缩可以形成密度爆破的非中心奇点, 这个奇点可以很早就形成, 不会隐藏在黑洞内部, 因此可认为是一个裸奇点解. 然而, 人们普遍不认为这是一个物理意义上的裸奇点 (参见文献 [11] 中的讨论). 一个原因是尘埃的坍缩产生密度爆破并非相对论效应, 在非相对论尘埃中也会出现. 另一个更重要的原因是, 人们期待 Einstein 方程的解在越过这个奇点之后仍能以某种 (具有更低正则性的) 方式存在. 这表明, 宇宙监督假设正确与否, 与所谈及的时空和物质的正则性也是相关的, 注意到定义 1.1 中并没有任何对解的正则性的表述. 对于真空 Einstein 方程而言, 一个粗略的计算表明, 只要 Christoffel 符号是局部 L^2 可积的, 则积分意义下的弱解就可以定义. 另外, 文献 [11] 中所描述的裸奇点则是真正的相对论效应产生的裸奇点, 因此, 这确实构成数学意义下的裸奇点解. 但是, 由于 $p = 0$ 是一个非常极端的情形, 在真正的引力坍缩中压强都不会消失 (甚至和密度可比较), 于是也不认为这是物理意义下的裸奇点.

基于对真实世界中恒星坍缩过程 (以及宇宙演化过程) 的考虑, 很多物理学家会考虑更一般的理想流体物态方程. 球对称的尘埃球坍缩的解是通过隐函数表示的解析解, 因此对其的分析可以做得十分透彻. 然而, 对一般的物态方程, 人们最初只能尝试在球对称性外添加额外的对称性. 一种常见的对称性是自相似性, 它指的是时空存在一个位似向量场 S 使得

$$\mathcal{L}_S g_{\alpha\beta} = 2g_{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

这等价于说 S 生成的微分同胚群 ϕ_a 满足 $\phi_a^* g_{\alpha\beta} = a^2 g_{\alpha\beta}$. 由于时空满足 Einstein 方程 (1.1), 于是

$$\mathcal{L}_S T_{\alpha\beta} = 0.$$

Minkowski 时空是一个球对称的自相似时空, $S = t\partial_t + r\partial_r$ 是对应的位似向量场, 对应的微分同胚群就是关于原点的伸缩. 如果能动张量取理想流体的形式 (2.1), 并且假设流体的物态方程是 $p = k\rho$, 其中 $k \in [0, 1]$ 是常数, 则流体变量的一个与时空的对称性匹配的对称性是

$$\mathcal{L}_S \rho = -2\rho, \quad \mathcal{L}_S u_\alpha = u_\alpha.$$

事实上, 线性的物态方程 $p = k\rho$ 是所有正压流体中与时空对称性匹配的唯一选择 (参见文献 [5]). 通过添加自相似性, 物理学家发现在自相似的坍缩中, 裸奇点可以形成, 并且详细研究了该裸奇点的性

质 (参见文献 [41]). 最近, Guo 等^[23] 严格证明了 $0 < k \ll 1$ 时这样的解的存在性 (球对称自相似 Einstein-Euler 方程的光滑裸奇点解).

2.2 标量场与引力场的自相似坍缩

另一类研究最为广泛的模型是球对称的标量场的坍缩, 一个最为特殊的标量场是无质量不带电的标量场 (下面简称标量场), 其能动张量为

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (2.3)$$

其中 ϕ 是一个实值函数, 满足时空中的线性波动方程 $\square_g \phi = 0$. 这个模型可视作研究真空 Einstein 方程的玩具模型, 一个理由是线性标量波与线性引力波具有相似的动力学行为 (至少在 Minkowski 时空中是如此), 特别地, Minkowski 时空中线性标量波方程的解不会产生奇点 (这与理想流体的情形完全不同), 因此标量场的引力坍缩中产生的任何奇性均是相对论的效应. 另外, 由于 Birkhoff 定理保证球对称真空 Einstein 方程的解一定是 Schwarzschild 解, 没有任何动力学自由度, 故标量场是为简化方程而添加球对称性后的无奈选择. 为构造裸奇点形成的解, Christodoulou^[15] 同样研究额外添加自相似性的解, 即时空需要满足条件 (2.2), 以及标量场 ϕ 满足与 Einstein 方程 (1.1) 匹配的对称性

$$\mathcal{L}_S \phi = -k,$$

其中 k 是常数. 不同于理想流体情形, 球对称标量场的自相似坍缩中不存在光滑的非平凡解, 因此 Christodoulou^[14] 引入了更大的一类所谓有界变差 (bounded variation, BV) 解以容纳他所构造的这些裸奇点解, 特别地, 这类解允许标量场 ϕ 的导数沿着某些方向并非是 C^1 的 (甚至可以是间断的). Christodoulou 发现, 对于 $0 < k^2 < \frac{1}{3}$, 确实存在这样的球对称自相似裸奇点解. 跨越奇点出发的过去光锥 $\mathcal{C}$ 时, ϕ 沿外向光锥方向的导数在 $\mathcal{C}$ 上不是 C^1 的, 更准确地 (如图 1 所示), 如果记 $\mathcal{Q} = \mathcal{M}/SO(3)$ 是球对称的商时空, 则

$$\phi \in C^2(\mathcal{Q} - \mathcal{C}), \quad \phi|_{\mathcal{C}} \in C^2(\mathcal{C}),$$

而 $\phi \in C^{1, \frac{k^2}{1-k^2}}(\mathcal{Q})$.

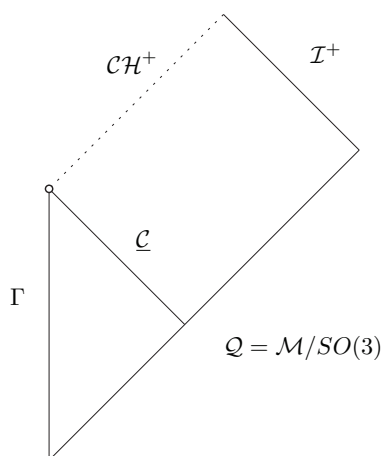


图 1 一个球对称的裸奇点解, 其中 Γ 是 $\mathcal{Q} = \mathcal{M}/SO(3)$ 的边界, 它是实际 4 维时空中的中心轴, $\mathcal{C}$ 是奇点出发的过去光锥, $\mathcal{I}^+$ 是未来类光无穷远, $\mathcal{CH}^+$ 是 Cauchy 视界, 即奇点出发的未来光锥

这种想法曾经被用到高维真空的裸奇点构造 (参见文献 [4]), 这个工作将高维真空 Einstein 方程约化为 4 维情形的球对称的带势函数的标量场坍缩. 最近, 这个想法被用到 4 维的真空方程中, Rodnianski 和 Shlapentokh-Rothman^[43] 利用自相似性构造了真空的裸奇点解的外部区域 (对应于上述 $\mathcal{C}$ 的未来部分, 过去部分的构造参见文献 [44]). 在球对称情形额外添加自相似性后, Einstein- 标量场方程可以转化为一个双变量的自治系统 (Einstein-Euler 则是非自治的), 通过相平面法分析, 裸奇点解对应于相平面中那些趋于稳定点的整体解. 在真空情形, Birkhoff 定理指出形成裸奇点的时空一定不能是球对称的, 因此即使添加了自相似性, Einstein 方程仍然是一个偏微分方程. 因此, 文献 [43] 中的方法实际上是通过给定“自相似”的初值, 并通过与“自相似”的初值作差来实现能量估计, 进而得到解关于自相似变量 (对应于球对称相平面法的参数) 的整体存在性. 可以证明这样的解在趋于奇点时, 在某种意义上是渐近自相似的. 值得注意的是, 这样构造出来的渐近自相似解仍然不可能是光滑解, 跨越从奇点出发的过去光锥时, 时空度规的外向导数 (在适当的坐标系下) 仍然只能是 $C^{1,\alpha}$ 的.

2.3 临界坍缩

物理学家似乎更关心光滑的裸奇点解. 想象如果一个系统的初始能量足够大, 那么人们预期物质和能量将聚集并最终坍缩形成黑洞. 而当系统的初始能量足够小, 那么人们预期这些能量会最终全部逃逸到远处 (用数学的语言, 对应的 Einstein 方程解整体存在并趋于平坦). 1987 年, Christodoulou 曾提出一个想法 (参见文献 [7]), 试想不断减少系统的初始能量, 使得最终坍缩形成的黑洞面积“变为零”时, 对应的时空满足什么样的性质? Choptuik^[6] 通过数值模拟得到了初步的结果. 他考虑的仍然是球对称的标量场的坍缩, 即对应的能动张量为 (2.3). 对一些含参数 (如称作 p) 的初值的具体表达式, Choptuik 发现当 p 从足够大的值 (足以形成黑洞) 不断减小时, 存在一个“经过微调”得到的临界值 p_* , 使得对应于不同 p 值的时空最终形成的黑洞质量

$$M_{BH} \propto (p - p_*)^\gamma,$$

其中 γ 是一个不依赖于 (他所研究的) 初值表达式的常数. Choptuik 猜测这个常数应该是万有 (universal) 常数. 另外, 通过数值的结果, 他猜测, 当 $p = p_*$ 时, 对应的解 (称为是临界坍缩) 是渐近离散自相似的. 所谓离散自相似, 指的是存在一个时空的微分同胚 Φ 和正数 $\Delta > 0$ 使得

$$\Phi^* g_{\alpha\beta} = e^{-2\Delta} g_{\alpha\beta}.$$

标量场 ϕ 也需要满足相应的对称性. 为与此作区分, 上文中提到的自相似有时被称为连续自相似. Choptuik 还猜测对于不同形式的初值, 所得到的渐近模型其实是同一个, 即这个临界坍缩中的离散自相似的奇点模型是万有的. 这个解被认为是一个光滑的裸奇点解. 证明这一个临界坍缩解的存在性是数学上的一个挑战. Choptuik 的发现极大地开拓了新的研究方向, 多种物质场以及真空时的临界坍缩现象都得到了研究 (参见综述 [22]). 值得一提的是, 线性物态方程 $p = k\rho$ 的 Einstein-Euler 方程的临界坍缩解是连续自相似的 (参见文献 [20, 31]), 这与标量场的坍缩完全不同.

3 裸奇点的不稳定性

既然宇宙监督假设的提出目的是禁止裸奇点的形成, 以上所提及的诸多例子, 都足以构造宇宙监督假设的“反例”. 因而, 人们则转而期待裸奇点并不会在真实世界中形成, 上述的反例均只能在数学中

存在. 当前, 宇宙监督假设指的是在一般情形下 (generically), 裸奇点不会在引力坍缩中形成. 文献 [17] 给出了一个数学的陈述如下.

猜想 3.1 (宇宙监督假设) 一般情形下, 由渐近平坦的 Cauchy 初值演化出的 Einstein 方程的最大 Cauchy 发展 $(\mathcal{M}, g)$, 均不含有裸奇点.

这里, 时空不含有裸奇点, 指的是“时空具有完备类光无穷远”, 即在定义 1.1 的意义下理解. 注意, 这里的“一般情形”所指代的涵义并不明确, 根据上一节的讨论, 除了与所考虑的物质有关 (例如, 可能要排除掉尘埃的情形), 还与所考虑时空的正则性有关. 更准确地, 考虑所有渐近平坦 Cauchy 初值所形成的空间, 这个空间可以是所有光滑 Cauchy 初值的空间, 或者是具有有限正则性的空间, 希望证明对于这个空间中“绝大多数”的 Cauchy 初值, 所演化出来的最大 Cauchy 发展都不含有裸奇点. 这里的绝大多数, 则可以认为是概率测度意义下的, Baire 纲意义下的, 或者称其补集具有正的余维数, 等等.

为了完整地证明宇宙监督假设, 需要考虑所有可能的裸奇点的情形, 证明所有的裸奇点经过微扰后都会隐藏在黑洞中. 这就要求得到一个对奇点判别的最优刻画. 鉴于完整问题的复杂性, 有时候我们会仅仅考虑单个或一类特殊的裸奇点解的不稳定性, 于是可以提出裸奇点的不稳定性猜测. 首先注意到, 对任意的包含裸奇点的时空 $(\mathcal{M}, g)$ (在定义 1.1 的意义下), 它都是一个整体双曲的、从某个 Cauchy 初值 $(\Sigma, \bar{g}, \bar{k}, \Phi)$ 演化出来的最大 Cauchy 发展, 其中 Φ 表示物质场演化所需要的初值.

猜想 3.2 (裸奇点的不稳定性) 对任意的裸奇点解 $(\mathcal{M}, g)$, 存在其一个 Cauchy 初值 $(\Sigma, \bar{g}, \bar{k}, \Phi)$, 以及一系列 Cauchy 初值 $(\Sigma_i, \bar{g}_i, \bar{k}_i, \Phi_i)$, 使得 $(\Sigma, \bar{g}_i, \bar{k}_i, \Phi_i)$ 的最大 Cauchy 发展 $(\mathcal{M}_i, g_i)$ 不含有裸奇点, 而在适当的意义下,

$$(\Sigma_i, \bar{g}_i, \bar{k}_i, \Phi_i) \rightarrow (\Sigma, \bar{g}, \bar{k}, \Phi), \quad i \rightarrow \infty.$$

这个猜测说的是一个裸奇点解经过一个对其 Cauchy 初值的微扰, 该裸奇点就会被黑洞所隐藏. 与猜想 3.1 相同, 这里微扰是何种意义下 (在何种拓扑下) 的微扰, 尚不明确. 然而有一点可以明确的是, 这种微扰不能太强, 或者说所使用的拓扑不能太弱, 否则这种裸奇点的不稳定性没有任何意义. 例如, Christodoulou 在黑洞形成的工作 [18] 以及 Li 和 Yu^[34]、Li 和 Mei^[33] 的工作表明, 存在平坦初值的一个度规层次的 H_{loc}^1 的微扰 (这里所有涉及的初值和时空都可以是光滑的, 仅仅是指在 H_{loc}^1 范数下接近), 使得微扰后的时空终结于一个 Kerr 黑洞. 因此, 即使证明了一个裸奇点解的 Cauchy 初值经过度规层次的 H_{loc}^1 的微扰后会不包含裸奇点, 也不能认为是该裸奇点的不稳定性, 因为 H_{loc}^1 的微扰已经足以强到远在裸奇点形成之前就形成了黑洞. 事实上, 物理学家更希望看到这个微扰是光滑的, 或至少是 C^k 的.

3.1 球对称情形的宇宙监督假设

1999 年, Christodoulou^[16] 证明了一切球对称标量场坍缩中产生的裸奇点都在猜想 3.2 的意义下是 BV 不稳定的. 结合他前期关于奇点判别的最优刻画的工作 [14], 他得以在球对称标量场的坍缩情形完整地证明宇宙监督假设 (即猜想 3.1) 在具有正余维的意义下成立.

Christodoulou 考虑球对称的 Einstein 方程解, 能动张量具有形式 (2.3), 标量场 ϕ 满足时空的线性波动方程 $\square_g \phi = 0$. 他考虑的是在一个从一点 o 出发的光锥 C_o 上的特征初值问题, 由于 Birkhoff 定理指出引力场部分没有动力学自由度, 因此这个问题的初值就仅仅是 ϕ 在 C_o 上的值. 由于变换 $\phi \rightarrow \phi + b$ 并没有改变方程的实质, 因此考虑 ϕ 在 C_o 上的导数, 更准确地, $\alpha = \partial_r(r\phi)|_{C_o} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 作为真正的初始数据, 其中 r 是球对称轨道的面积半径并作为 C_o 上的坐标. 为简单起见, 设 α 所处的空

间 $\mathcal{A}$ 是带 BV 拓扑的在 $[0, +\infty)$ 上的绝对连续函数空间 $AC[0, +\infty)$. Christodoulou^[16] 证明了如下定理:

定理 3.1 令 $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ 是所有使得最大 Cauchy 发展不完备的初值 α 所组成的集合, 令 $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$ 是所有使得最大 Cauchy 发展不含有裸奇点的初值的集合.

(1) 任给初值 $\alpha_0 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{G}$, 都存在依赖于 α_0 的 $f \in \mathcal{A}$, 使得对于任意 $t \neq 0$, 都有

$$\alpha_0 + tf \in \mathcal{G};$$

(2) 如果 $\alpha_{0,1}, \alpha_{0,2} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{G}$ 并且 f_1 和 f_2 按上一步给出, 则若有 $\alpha_{0,1} + t_1 f_1 = \alpha_{0,2} + t_2 f_2$, 则一定有

$$\alpha_{0,1} = \alpha_{0,2}, \quad f_1 = f_2, \quad t_1 = t_2.$$

定理 3.1(1) 表明任意球对称标量场坍缩的裸奇点解在 BV 拓扑下是不稳定的, 而定理 3.1(2) 进一步表明一切产生裸奇点的初值集 $\mathcal{S} \setminus \mathcal{G}$ 在 $\mathcal{A}$ 中具有余维 1 或以上. BV 拓扑是合适的拓扑, 这是因为 Christodoulou^[14] 证明了 BV 解的局部适定性, 以及当初值 α 的全变差很小时, 解是整体存在的. 最近, An 和 Tan^[3] 在球对称带电标量场 (考虑 Einstein-Maxwell- 标量场方程组, 其中 Maxwell- 标量场本身是耦合的, 标量场是复值函数, 电磁场以标量场作为源) 的坍缩中, 在 BV 拓扑下证明了猜想 3.1.

3.2 非球对称情形的尝试以及应用

鉴于 Christodoulou 在球对称情形的成功, 人们很自然希望考虑非球对称的情形. 这里遇到的第一个困难是, 在非球对称情形证明一个黑洞最终会在引力坍缩中形成, 撇开裸奇点的问题不谈, 这本身就是个极端困难的问题. 这是因为根据定义, 黑洞本身就需要预先知道时空的大范围结构, 相当于说黑洞的存在就等价于宇宙监督假设成立. 于是, Christodoulou^[17] 根据他在球对称情形证明的过程, 提出了一个宇宙监督假设的局部版本, 称为陷俘面 (trapped surface) 猜测.

猜想 3.3 (陷俘面猜测) 一般情形下, 由渐近平坦的 Cauchy 初值 $(\Sigma, \bar{g}, \bar{k}, \Phi)$ 演化出的 Einstein 方程的最大 Cauchy 发展 $(\mathcal{M}, g)$ 满足如下性质: 设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的终态不可分过去集 (terminal indecomposable past set), 且 $\mathcal{P} \cap \Sigma$ 在 Σ 中的闭包 $\mathcal{K}$ 是紧的. 则对任意 Σ 中包含 $\mathcal{K}$ 的开集 $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ 的依赖域中都含有一个陷俘面.

与 Cauchy 初值相交于一个闭包为紧集的集合的终态不可分过去集, 直观上指的是奇点的因果过去, 即存在指向未来的因果曲线终止于奇点的那些点的集合. 由于奇点并非时空中的点, 因此其定义必须采取一些迂回的策略 (详细定义可参见文献 [37]). 可以证明 (参见文献 [48]), 从陷俘面出发的因果曲线不能到达远处的观测者, 于是可以认为陷俘面从局部上刻画了黑洞, 这个概念的引入正是 Penrose 奇点定理成功的关键. 值得指出的是, 如何从陷俘面猜测回到宇宙监督假设, 在球对称标量场坍缩的情形由 Christodoulou^[12] 的工作保证; 而 Dafermos^[19] 的一个结果指出对那些坍缩过程不会在中心轴以外首先产生奇点的球对称物质场 (包括标量场在内) 的坍缩, 单个陷俘面的存在足以表明对应的时空不存在裸奇点. 事实上, 陷俘面猜测中 $\mathcal{D}$ 的任意性保证了奇点甚至不是 “局部裸” 的, 对于单纯的裸奇点的不稳定性而言, 直观上只需要单个陷俘面.

如同宇宙监督假设 3.1, 陷俘面猜测的证明仍然需要首先得到奇点判别的最优刻画, 但在此之前, 仍然可以对一个或者一族特定的裸奇点解研究它们的不稳定性. 下面我们陈述一个针对特定裸奇点解关于单个陷俘面形成的不稳定性猜测.

猜想 3.4 (裸奇点不稳定性的局部版本) 对任意的裸奇点解 $(\mathcal{M}, g)$, 存在其一个 Cauchy 初值 $(\Sigma, \bar{g}, \bar{k}, \Phi)$, 以及一系列 Cauchy 初值 $(\Sigma_i, \bar{g}_i, \bar{k}_i, \Phi_i)$, 使得 $(\Sigma, \bar{g}, \bar{k}, \Phi)$ 的最大 Cauchy 发展 $(\mathcal{M}_i, g_i)$ 含有一个陷俘面, 并且在适当的意义下,

$$(\Sigma_i, \bar{g}_i, \bar{k}_i, \Phi_i) \rightarrow (\Sigma, \bar{g}, \bar{k}, \Phi), \quad i \rightarrow \infty.$$

下面在介绍非球对称情形的进展前, 简要回顾 Christodoulou 在球对称情形定理 3.1 的证明. 总体来说, 这个证明分为如下 3 步:

第 1 步 奇点出现的判别准则;

第 2 步 陷俘面或黑洞的形成准则;

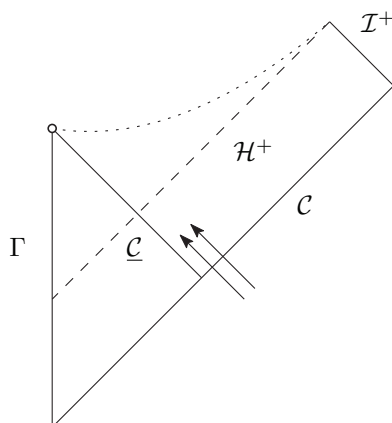
第 3 步 不稳定性机制.

第 1 步, Christodoulou^[14] 证明了球对称 Einstein- 标量场的解, 出现的第一个奇点一定位于时空的中心轴 (商空间的边界) 上, 并且当从奇点的过去趋于奇点时, $\mu = \frac{2m}{r}$ 将不趋于零. 这里 r 是球对称轨道的面积半径, m 是对应的 Hawking 质量. 此外, Christodoulou 还证明了初值的 BV 范数充分小时, 解不会出现奇点. 第 2 步, Christodoulou^[13] 证明了, 如果在某个中心轴出发的外向光锥上存在两个球面, 使得它们之间的 Hawking 质量的差充分大, 准确地, 存在 $c_0, c_1 > 0$ 使得当 $\delta = \frac{r_2 - r_1}{r_1} \leq c_0$ 时成立

$$\frac{m_2 - m_1}{r_2} \geq c_1 \delta \log \left(\frac{1}{\delta} \right),$$

其中 r_1, r_2 和 m_1, m_2 分别是两个球面 S_1 和 S_2 的面积半径和质量, 那么在未来某处就会形成陷俘面, 并且时空终结于黑洞. 第 3 步, Christodoulou^[16] 证明了, 一旦奇点出现, 那么对初始光锥在奇点的过去光锥 $\mathcal{C}$ 的未来部分添加 (或不添加) 一个 BV 拓扑下的微扰 (见图 2), 则该奇点形成之前就会使得某个外向光锥上第 2 步中的准则成立, 从而陷俘面和黑洞形成并将奇点隐藏在内部. 这几步是环环相扣的, 例如, 第 3 步中的不稳定性机制, 靠的是奇点造成的所谓蓝移效应, 这种效应使得初始光锥上微小的扰动都会在接近奇点时放大, 于是就会满足第 2 步中的黑洞形成的准则. 如果第 1 步中证明的判别准则不是最优, 那么造成的蓝移效应也会更弱, 这可能会导致最后一步中的不稳定性机制失效. 这里面也要求第 2 步的准则尽可能地最优, 才能够刚好与最后一步的蓝移效应匹配. 要在非球对称情形证明宇宙监督假设, 一个看似合理的方式是将上述每一步都推广到非球对称情形. 第 1 步就是如何判别 Einstein 场方程的解出现奇点, 有界 L^2 曲率猜想的证明^[30] 似乎提供了这方面的思路, 但如何能与最后一步匹配, 仍然是一个很困难的问题; 第 2 步的推广是陷俘面的形成, 在非球对称情形 Christodoulou^[18] 创造性地给出了第一个结果并开启了 Einstein 方程在大初值有限时间存在性上的研究, 随后有很多重要的推广 (参见文献 [2, 27, 29, 33, 34]), 其中文献 [2] 给出了一个关于伸缩不变范数的陷俘面形成的准则.

下面介绍一些对第 3 步在非球对称情形的推广. 回顾 Christodoulou^[16] 的证明, 他的证明使用了反证法, 其思路是通过反证假设时空处处都不满足第 2 步中给出的准则, 然后通过估计来推导出矛盾. 这在非球对称情形显然无法适用, 因为反证法给出的界 (通常只能是单个不等式) 并不足以在非球对称情形控制所有的几何和物理量. 为此, Liu 和 Li^[38] 给出了第 3 步的一个新的证明, 这个证明的优势在于, 我们不需要反证法, 而是直接给出时空中几何和物理量的先验估计 (这个估计无论最终有无黑洞形成都满足), 再通过这些先验估计来证明一个关于初值的微扰就足以使得第 2 步中的准则在足够靠近奇点时满足. 随后, 通过进一步使用这个证明中的思想, 将第 3 步中的论证在非球对称情形部分

图 2 $\mathcal{H}^+$ 是裸奇点解经过微扰后产生的事件视界

地实现, Li 和 Liu^[32] 证明了如下定理³⁾.

定理 3.2 考虑一个 Einstein- 标量场方程的双特征初值问题, 初值分别在从一个球面出发的内向光锥 $\underline{C}$ 和外向光锥 C 上给定. 假设内向光锥 $\underline{C}$ 上的初始数据是球对称的, 并且沿着 $\underline{C}$ 当 $r \rightarrow 0$ 时满足 Christodoulou 关于奇点的判别准则:

$$\mu = \frac{2m}{r} \rightarrow 0.$$

在外向光锥 C 上的初始数据允许是非球对称的, 由光锥的共形几何 $\hat{g}$ 与标量场 ϕ 决定. 则存在一族初值 $\hat{g}_t$ (不妨令标量场保持不动), 使得当 $t \rightarrow 0$ 时在 $C_v^1 H_\partial^N$ 拓扑⁴⁾下, $\hat{g}_t \rightarrow \hat{g}$, 其中 $\hat{g}$ 是光锥的每个截面都是标准球面的几何, 并且 $(\hat{g}_t, \phi)$ 以及内向光锥 $\underline{C}$ 上的初值所决定的最大 Cauchy 发展含有一个陷俘面⁵⁾.

基于这个定理, 可以选定一个球对称 Einstein- 标量场方程的裸奇点解 (包括连续自相似的裸奇点解^[15], 或者离散自相似的裸奇点解^[6], 或者别的尚未知道的, 因为这些解的奇点的过去光锥上总满足 $\mu = \frac{2m}{r} \rightarrow 0$), 则定理的一个结论是可以对其施加来自于引力场的微扰 (即光锥上的共形几何的微扰), 使得时空产生一个陷俘面. 因此, 可以说, 球对称标量场坍缩的裸奇点在引力场的微扰下关于陷俘面的形成是不稳定的. 在技术上, 这个定理指出了文献 [16] 中球对称的标量场微扰确实可以某种程度上推广到非球对称的情形. 如果作为“背景时空”的球对称 Einstein- 标量场方程的裸奇点解恰好是 Christodoulou 构造的连续自相似解, 则 An^[1] 最新的定理证明了在 $H^{\frac{3}{2}}$ 的微扰下的不稳定性, 并且指出上述不稳定性陷俘面可以是高度各向异性的, 并且不仅仅是陷俘面, 而且还找到了从奇点出发的类空的表观视界. 事实上, 对于包括连续自相似解的一大类裸奇点解, 这个不稳定性可以做到 $C_v^{1,\alpha} H_\partial^N$, 我们将在未来的工作中进一步讨论.

定理 3.2 的证明的关键在于要找到一个适当的蓝移量来使得能量能够在接近奇点的时候不断放大, 而这个量由从奇点出发的过去光锥上的几何决定. 在奇点附近选取一个双类光坐标 (v, u) , 并记

$$2\Omega^2 = -g(\partial_v, \partial_u),$$

3) 这里是一个简化版本, 事实上时空中可以产生一系列趋于奇点的陷俘面, 并且完整版本的定理对全体微扰的空间作出一定的刻画, 这里不展开讨论.

4) 这里指在沿着光锥生成类光测地线方向是 C^1 的, 而在球面方向可以是任意高阶的 Sobolev 范数.

5) 如图 2 所示, 此时 C 上的初值允许是非球对称的, 而此时时空最终会形成一个陷俘面, 但还不清楚最终是否会形成事件视界.

通过直接计算可知 (参见文献 [37]), $\mathcal{C}$ 上

$$\mu = \frac{2m}{r} \rightarrow 0$$

能推导出

$$\Omega|_{\mathcal{C}} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0.$$

基于在文献 [32] 中建立的先验估计, 可知在时空中当 $\frac{v}{u}$ 充分小时, 也总有当 $r \rightarrow 0$ 时 $\Omega \rightarrow 0$. 而时空中的波动方程具有如下的形式:

$$\partial_u(\partial_v \Phi) = \Delta \Phi + \text{l.o.t.},$$

其中 Δ 是 v 和 u 等值面所交得到的 2 维球面上的 Laplace 算子. 于是基于文献 [32] 所建立的先验估计, $\partial_v \Phi$ 接近于一个常数. 然而, 能量的大小则是由 $\Omega^{-2} \partial_v \Phi$ 所给出的, 其中 $\Omega^{-2} \partial_v$ 是外向类光测地线生成元的切向量. 这就给出了能量放大的机制. 文献 [32] 中选取的可以给出能量放大机制的量 Ω 与 Christodoulou^[16] 的有所不同, 似乎更容易在非球对称情形使用, An^[1] 所采取的也是同样的机制. 我们可以期待, 相同的方法能用于证明文献 [43] 中构造的真空裸奇点解的不稳定性.

最后, 我们简要讨论球对称理想流体的不稳定性. 在尘埃的裸奇点解中, 由于只要初始的密度分布满足 $\rho''(0) < 0$, 再对物质外部的分布有一些额外的要求, 则时空将会出现裸奇点. 显然, $\rho''(0) < 0$ 是一个开的条件, 因此, 球对称尘埃坍缩的裸奇点在 C^2 微扰下是稳定的. 这更进一步指出尘埃可能不是一个合适的描述真实坍缩的模型. 另外, 对于连续自相似的理想流体裸奇点^[23, 41], 我们则不清楚如何建立其数学上的不稳定性. 但基于定理 3.2 的证明, 我们很自然会去看这些裸奇点解的奇点出发的过去光锥的几何性质. 我们惊喜地发现, 对于那些连续自相似或者渐近连续自相似的裸奇点解, 它们的奇点出发的过去光锥上都与球对称标量场的裸奇点解满足 $\Omega|_{\mathcal{C}} \rightarrow 0$. 于是, 即使目前并不知道是否可以通过微扰流体变量本身 (流体密度的分布、速度场等) 来使得裸奇点隐藏在黑洞内, 但是, 在即将完成的工作中, 我们可以通过微扰引力场本身来使得裸奇点可以隐藏起来, 证明这些球对称的理想流体坍缩的裸奇点解作为 Einstein-Euler 方程的解是不稳定的. 这个工作的其中一个难点是, 要在启动不稳定性机制的同时照顾到流体本身不要出现爆破. 基于这个工作, 也许可以将一个由某种物质场的坍缩形成的裸奇点解, 置于完整的 Einstein 方程中, 通过微扰引力场的方式, 来启动不稳定性机制. 在 Einstein-标量场方程的情形, Li 和 Liu^[32] 找到了引力场启动的不稳定性的机制, 这种机制其实与标量场本身所启动的不稳定性机制是类似的; 但是在 Einstein-Euler 方程的情形, 引力场启动的不稳定性机制对于这个方程本身是全新的, 因为目前并不知道如何通过微扰流体本身来形成陷俘面或者黑洞 (这本身也是一个有趣和重要的课题).

3.3 进一步的问题

上文提到的, 目前已知的微扰裸奇点解产生陷俘面或黑洞的机制, 即使是基于光滑的离散自相似裸奇点解, 都不能是光滑的, 这看上去是自相似性的一种限制: Einstein-标量场方程与真空 Einstein 方程的非平凡自相似解都不能是光滑的, 而引力场与标量场启动的不稳定性机制也用到方程本身的自相似对称性. 如果考虑临界坍缩解, 由于这个解本身就是通过微调初值的参数得到的, 则这个解自然就是不稳定的. 物理学家还通过数值计算指出, 在光滑初值空间中形成裸奇点的初值子空间是恰好余 1 维的 (其上的线性微扰恰好有一个不稳定模式), 这也与 Christodoulou 在 BV 空间的结论有所不同. 临界坍缩解通过调整其参数所给出的不稳定性与目前已知的机制至少有两点不同: 其一, 这个微扰是光

滑的; 其二, 这个微扰可以导致奇点的消失 (将参数往更小的方向调整), 形成整体解, 而不是形成陷俘面或黑洞.

这两点差异背后的数学原理值得认真探索. 目前数学上使用的不光滑的微扰, 都是支撑在奇点出发的过去光锥 $\mathcal{C}$ 的未来 (称之为外部微扰). 根据真空裸奇点构造的工作 [43] 中的基于能量估计的想法, 人们反而预期对那些连续自相似的 (不光滑的) 裸奇点解在足够光滑的外部微扰下是稳定的. 而由于标量场和对应的时空几何满足有限传播, 所以也不能指望外部微扰会导致奇点消失. 因此, 上述两点差异只能通过构造合适的“内部微扰”实现, 即微扰不限于支撑在奇点出发的过去光锥 $\mathcal{C}$ 的未来. Singh^[45, 46] 研究了基于球对称标量场的连续自相似裸奇点进行内部微扰, 发现这些裸奇点仍然具有一定的稳定性. 于是, 一个合理的期待是, 对于连续自相似的裸奇点而言, 任何导致奇点消失或形成黑洞的微扰都必须是不光滑的. 最后, 对临界坍缩的 (离散自相似的、光滑的) 或者其他类型的光滑裸奇点, 如何能够在数学上找到数值计算所预言的微扰 (一侧会导致奇点消失, 一侧会形成黑洞), 看来必须首先对临界坍缩解的构造有一定的理解之后才可以做到.

致谢 感谢审稿人对本文提出的宝贵意见. 特别感谢其中一位审稿人指出谷超豪先生和胡和生先生在球对称非均匀尘埃球坍缩问题中作出的重要贡献.

参考文献

- 1 An X. Naked singularity censoring with anisotropic apparent horizon. arXiv:2401.02003, 2024
- 2 An X, Luk J. Trapped surfaces in vacuum arising dynamically from mild incoming radiation. Adv Theor Math Phys, 2017, 21: 1–120
- 3 An X, Tan H K. A proof of weak cosmic censorship conjecture for the spherically symmetric Einstein-Maxwell-charged scalar field system. arXiv:2402.16250, 2024
- 4 An X, Zhang X. Examples of naked singularity formation in higher-dimensional Einstein-Vacuum spacetimes. Ann Henri Poincaré, 2018, 19: 619–651
- 5 Cahill M E, Taub A H. Spherically symmetric similarity solutions of the Einstein field equations for a perfect fluid. Comm Math Phys, 1971, 21: 1–40
- 6 Choptuik M W. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. Phys Rev Lett, 1993, 70: 9–12
- 7 Choptuik M W. Critical behavior in scalar field collapse. In: Deterministic Chaos in General Relativity, vol. 155. New York: Plenum Press, 1994
- 8 Choquet-Bruhat Y. Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Acta Math, 1952, 88: 141–225
- 9 Choquet-Bruhat Y. General Relativity and the Einstein Equations. Oxford: Oxford Univ Press, 2009
- 10 Choquet-Bruhat Y, Geroch R P. Global aspects of the Cauchy problem in general relativity. Comm Math Phys, 1969, 14: 329–335
- 11 Christodoulou D. Violation of cosmic censorship in the gravitational collapse of a dust cloud. Comm Math Phys, 1984, 93: 171–195
- 12 Christodoulou D. A mathematical theory of gravitational collapse. Comm Math Phys, 1987, 109: 613–647
- 13 Christodoulou D. The formation of black holes and singularities in spherically symmetric gravitational collapse. Comm Pure Appl Math, 1991, 44: 339–373
- 14 Christodoulou D. Bounded variation solutions of the spherically symmetric Einstein-scalar field equations. Comm Pure Appl Math, 1993, 46: 1131–1220
- 15 Christodoulou D. Examples of naked singularity formation in the gravitational collapse of a scalar field. Ann of Math (2), 1994, 140: 607–653
- 16 Christodoulou D. The instability of naked singularities in the gravitational collapse of a scalar field. Ann of Math (2), 1999, 149: 183–217
- 17 Christodoulou D. On the global initial value problem and the issue of singularities. Classical Quantum Gravity, 1999, 16: A23–A35
- 18 Christodoulou D. The Formation of Black Holes in General Relativity. Monographs in Mathematics. Zürich: Eur

- Math Soc, 2009
- 19 Dafermos M. Spherically symmetric spacetimes with a trapped surface. *Classical Quantum Gravity*, 2005, 22: 2221–2232
 - 20 Evans C R, Coleman J S. Critical phenomena and self-similarity in the gravitational collapse of radiation fluid. *Phys Rev Lett*, 1994, 72: 1782–1785
 - 21 Gu C H. Gravitation collapse of spherical symmetry with non-uniform density (in Chinese). *J Fudan Univ (Natural Sci)*, 1973, 3: 73–78 [谷超豪. 非均匀的球对称引力坍缩问题. *复旦学报 (自然科学版)*, 1973, 3: 73–78]
 - 22 Gundlach C, Martín-García J M. Critical phenomena in gravitational collapse. *Living Rev Relat*, 2007, 10: 5
 - 23 Guo Y, Hadzic M, Jang J. Naked singularities in the Einstein-Euler system. *Ann PDE*, 2023, 9: 4
 - 24 Hawking S W, Ellis G F. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1973
 - 25 Hu H S. Exact solution of the spherically symmetric gravitational field equations (in Chinese). *Fudan J Univ (Natural Sci)*, 1974, 1: 92–98 [胡和生. 球对称引力场方程的严格解. *复旦学报 (自然科学版)*, 1974, 1: 92–98]
 - 26 Joshi P S, Dwivedi I H. Naked singularities in spherically symmetric inhomogeneous Tolman-Bondi dust cloud collapse. *Phys Rev D*, 1993, 47: 5357–5369
 - 27 Klainerman S, Luk J, Rodnianski I. A fully anisotropic mechanism for formation of trapped surfaces in vacuum. *Invent Math*, 2014, 198: 1–26
 - 28 Klainerman S, Nicolò F. *The Evolution Problem in General Relativity*. Progress in Mathematical Physics, vol. 25. Boston: Birkhäuser, 2003
 - 29 Klainerman S, Rodnianski I. On the formation of trapped surfaces. *Acta Math*, 2012, 208: 211–333
 - 30 Klainerman S, Rodnianski I, Szeftel J. The bounded L^2 curvature conjecture. *Invent Math*, 2015, 202: 91–216
 - 31 Koike T, Hara T, Adachi S. Critical behavior in gravitational collapse of a perfect fluid. *Phys Rev D*, 1999, 59: 104008
 - 32 Li J, Liu J. Instability of spherical naked singularities of a scalar field under gravitational perturbations. *J Differential Geom*, 2022, 120: 97–197
 - 33 Li J, Mei H. A construction of collapsing spacetimes in vacuum. *Comm Math Phys*, 2020, 378: 1343–1389
 - 34 Li J, Yu P. Construction of Cauchy data of vacuum Einstein field equations evolving to black holes. *Ann of Math (2)*, 2015, 181: 699–768
 - 35 Li J, Zhu X P. Local existence in retarded time under a weak decay on complete null cones. *Sci China Math*, 2016, 59: 85–106
 - 36 Li J, Zhu X P. On the local extension of the future null infinity. *J Differential Geom*, 2018, 110: 73–133
 - 37 Liang C B, Zhou B. *Differential Geometry and General Relativity, Volume 2 of 3, 2nd ed (in Chinese)*. Beijing: Science Press, 2009 [梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论 (中册 • 第二版). 北京: 科学出版社, 2009]
 - 38 Liu J, Li J. A robust proof of the instability of naked singularities of a scalar field in spherical symmetry. *Comm Math Phys*, 2018, 363: 561–578
 - 39 Luk J. Singularities in general relativity. In: *Proceedings of International Congress of Mathematicians 2022*. Berlin: EMS Press, 2023, 4210–4241
 - 40 Oppenheimer J R, Snyder H. On continued gravitational contraction. *Phys Rev*, 1939, 56: 455–459
 - 41 Ori A, Piran T. Naked singularities and other features of self-similar general-relativistic gravitational collapse. *Phys Rev D*, 1990, 42: 1068–1090
 - 42 Penrose R. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Noovo Cimento*, 1969, 1: 252–276
 - 43 Rodnianski I, Shlapentokh-Rothman Y. Naked singularities for the Einstein vacuum equations: The exterior solution. *Ann of Math (2)*, 2023, 198: 231–391
 - 44 Shlapentokh-Rothman Y. Naked singularities for the Einstein vacuum equations: The interior solution. *arXiv:2204.09891*, 2022
 - 45 Singh J. A construction of approximately self-similar naked singularities for the spherically symmetric Einstein-scalar field system. *arXiv:2210.11325*, 2022
 - 46 Singh J. High regularity waves on self-similar naked singularity interiors: Decay and the role of blue-shift. *arXiv:2402.00062*, 2024
 - 47 Singh T P, Joshi P S. The final fate of spherical inhomogeneous dust collapse. *Classical Quantum Gravity*, 1996, 13: 559–571
 - 48 Wald R. *General Relativity*. Chicago: Univ Chicago Press, 1984
 - 49 Yodzis P, Seifert H J, Müller zum Hagen H. On the occurrence of naked singularities in general relativity. *Comm Math Phys*, 1973, 34: 135–148

Mathematical developments on the naked singularities

Junbin Li

Abstract In general relativity, naked singularities are spacetime singularities that are not hidden inside a black hole. Penrose (1969) proposed that naked singularities should not appear in gravitational collapse, which is called the cosmic censorship hypothesis. However, people found examples of naked singularities formation in gravitational collapse by numerical computations and mathematical proofs, and then conjectured that naked singularities should be unstable. In this paper, we review some recent mathematical developments on the instability of naked singularities in general relativity.

Keywords general relativity, Einstein equation, cosmic censorship hypothesis, naked singularity, trapped surface

MSC(2020) 35Q75, 83C57, 83C75

doi: 10.1360/SSM-2024-0087