二阶声波方程非分裂式CPML实施新方法

方修政^{1,2}, 钮凤林^{1,2*}

1. 中国石油大学石油油气资源与勘探国家重点实验室和非常规油气科学技术研究院, 北京 102249;

2. Department of Earth, Environmental and Planetary Sciences, Rice University, Houston, Texas 77005, USA

* 通讯作者, E-mail: niu@rice.edu

收稿日期: 2021-01-12; 收修改稿日期: 2021-04-09; 接受日期: 2021-05-07; 网络版发表日期: 2021-06-17

国家自然科学基金项目(批准号: 41630209)资助

摘要 完全匹配层(PML)是处理波动方程数值模拟中模型边界反射问题的常用方法, 在时间域有限差分(FD)波场数值模拟中得到了广泛的应用. 早期的PML技术存在对于近切入射和低频反射吸收效果较差的问题, 由此产生了复频移PML(CFS-PML)模型边界反射压制法, 其中基于递归卷积技术的复频移PML(CPML), 由于其算法在时间域的高效性, 被广泛应用于时间域一阶方程的数值模拟. 一阶波动方程CPML边界条件是非常成熟的方法, 但是二阶方程, CPML方法还需要进一步发展研究. 目前, 二阶方程的CPML处理方法需要引入辅助方程或者辅助变量, 导致计算量增加, 从而对数值模拟效率产生一定的影响. 本文提出了一种分区域两步法CPML实施策略, 简称为TS-CPML. TS-CPML通过对二阶CPML控制方程进行两步有限差分进行数值模拟, 从而避免计算引入辅助变量的新二阶偏微分方程或其他辅助方程, 具有计算效率高、编程易于实现等特点. 我们将该方法应用于二阶声波方程和TTI介质二阶拟声波方程组, 数值模拟显示, 在相同参数下, 由模型边界产生的反射波振幅约为传统二阶方程CPML方法的50%以上, 验证了TS-CPML技术的优越性.

关键词 PML, CPML, 边界条件, 有限差分方法, 二阶波动方程, 波场数值模拟

1 引言

复杂介质的地震波模拟是研究地球内部构造的一种有效方法. 有限差分方法(finite-difference, FD)具有实施简单和相对高效的计算效率, 成为了地震波场模拟的主要方法(例如, Alford等, 1974; Kelly等, 1976; Marfurt, 1984; Virieux, 1984, 1986; Levander, 1988; Graves, 1996; Saenger等, 2000; Liu和Sen, 2009; Wang

等, 2014). 由于波场的数值模拟计算只能限制在有限的模型区域内实施, 从而会导致由模型边界处产生反射波干扰数值模拟的精度, 因此需要引入有效的边界处理方法来压制边界反射波. 为了提高反射波压制的有效性和稳定性, 很多学者研究了许多不同的边界处理方法. 其中, Berenger(1994)提出的用于电磁波模拟的完全匹配层(perfectly matched layer, PML)方法被认为是一种最有效并且较稳定的吸收边界处理方法.

中文引用格式: 方修政, 钮凤林. 2021. 二阶声波方程非分裂式CPML实施新方法. 中国科学: 地球科学, 51(8): 1341–1354, doi: 10.1360/SSTe-2021-0012
英文引用格式: Fang X, Niu F. 2021. An unsplit complex frequency-shifted perfectly matched layer for second-order acoustic wave equations. Science China Earth Sciences, 64(6): 992–1004, <https://doi.org/10.1007/s11430-021-9784-7>

理论上, 对于任何入射角和频率的波场, PML方法都不会在连续介质的模型边界上引入任何边界反射, 因而PML方法被广泛应用于声波和弹性波在各向同性以及各向异性介质正反演中(Chew和Liu, 1996; Hastings等, 1996; Collino和Tsogka, 2001; Marcinkovich和Olsen, 2003; Festa和Nielsen, 2003; Wang和Tang, 2003; Basu和Chopra, 2004; Kreiss和Duru, 2013; Li等, 2018; Ma等, 2018, 2019a, 2019b). 然而, 离散化的数值模拟会降低PML的吸收效果, 特别是对于近切入射波场和低频波场(Festa和Vilotte, 2005; Komatitsch和Martin, 2007; Drossaert和Giannopoulos, 2007a, 2007b). 在基于传统PML方法空间拉伸概念的基础上, Kuzuoglu和Mittra(1996)提出了用于电磁波模拟的复频率移动PML方法(CFS-PML). 一些学者进一步拓展了CFS-PML方法, 将其应用于地震波场模拟, 发现同传统的PML方法相比, 对于近切入射波场以及低频反射波场CFS-PML方法具有明显的优越性(Berenger, 2002a, 2002b; Becache等, 2004; Festa等, 2005; Festa和Vilotte, 2005; Drossaert和Giannopoulos, 2007a, 2007b; Komatitsch和Martin, 2007; Martin等, 2008; Martin和Komatitsch, 2009).

为了能够有效的实现CFS-PML方法, Roden和Gedney(2000)引入了一种递归卷积技术(CPML)来解决不需要进行波场分裂的电磁波模拟. 这个方法受到了研究学者的广泛关注. 很多学者将非分裂式CPML方法应用到基于一阶波动方程的弹性波模拟(例如, Drossaert和Giannopoulos, 2007a, 2007b; Komatitsch和Martin, 2007)、黏弹性和孔隙弹性波场等各种波场的数值模拟(Martin等, 2008; Martin和Komatitsch, 2009; Chen等, 2014). 一些学者在PML/CPML方法的基础上, 通过引入辅助微分方程来避免卷积计算引入的复杂度(Ramadan, 2003; Martin等, 2010; Zhang和Shen, 2010; Zhang等, 2014).

对于二阶方程组, 非分裂式PML/CPML有两种实现方式. 第一种方式是将二阶方程改写为一阶方程组, 用基于辅助微分方程的PML(ADEs PML)方法(Martin等, 2010; Zhang和Shen, 2010)或者CPML方法实施. 严格来说这种方式是一阶方程的PML实施方法. 第二种方式是引入辅助变量或者辅助方程改写二阶PML方程使之可以进行有限差分数值模拟. 例如, 基于辅助微分方程方法实施改写的二阶声波PML方程(Appelö和

Kreiss, 2007; Gao等, 2015)和二阶弹性波PML方程(Li和Matar, 2010; Duru和Kreiss, 2012; Ma等, 2019b), 这类方法通过引入偏微分方程来取代卷积算子的运算. 另一类是不需要引入偏微分方程的CPML实施方法, 例如, 基于CPML方法改写的二阶声波方程(Pasalic和McGarry, 2010)和二阶弹性波方程(Ma等, 2018, 2019a). 这种二阶方程非分裂PML/CPML实施方式, 不论是基于辅助微分方程方法还是基于递归卷积技术, 都需要引入辅助方程或者辅助变量对原始的PML控制方程进行改写, 并在一定程度上复杂化了二阶方程的PML实施.

本文提出了一种新的二阶声波方程非分裂CPML的实现方法. 区别于传统方法, 这个新方法不需要引入辅助微分方程或辅助变量来改写二阶方程系统. 我们通过在原坐标下空间导数的计算上引入一个矫正项, 可以直接计算出延展坐标下的空间导数. 进而, 对于二阶方程, 我们只需要简单的对一阶空间导数计算两次就可以实现. 我们给这个方法取名为Two-Step CPML, 简称为TS-CPML.

2 理论方法

2.1 PML原理简介

完全匹配层方法(PML)主要原理是, 在数值模拟区域的边界区域加上一定厚度的吸收衰减层(PML区域), 再通过匹配一个PML区域的波动方程, 使得传播到边界区域的波场被吸收衰减. 如图1a所示: 在 $x < a$ 的数值模拟区域产生的波场传播到PML区域($a < x < b$)会被吸收衰减. 假设一个入射角度为 θ , 频率为 ω 的二维平面波 $u(\theta, \omega)$ 以传播速度 v 从界面($x=a$)传播到PML区域. 这个声波微分方程在频率域可以写为

$$\nabla^2 \hat{u} + k^2 \hat{u} = 0, \quad (1)$$

式中, $\hat{u}$ 代表频率域的压力波场, 波数 $k=\omega/v$, 并且 $k_x=k\cos\theta$, $k_z=k\sin\theta$. 这个声波方程的平面波解:

$$\hat{u} = e^{-j(k_x x + k_z z)}, \quad (2)$$

式中, j 为虚数单位. PML方法的主要理论是在数值模拟区域产生的波场不会在边界($x=a$)产生反射, 并且波场能量在PML区域指数衰减. Collino和Tsogka(2001)在PML区域引入了一个新复数坐标系 $\tilde{x}$:

图 1 计算区域和PML区域示意图

(a) 计算区域平面波入射到PML区域; (b) PML区域参数设置示意图; (c) 计算区域A和PML区域B-D的二阶空间导数计算示意图

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \tilde{s}_x = 1 + \frac{d_x}{j\omega}, \\ \tilde{x} = x - \frac{j}{\omega} \int_0^x d_x dx, \end{cases} \quad (3)$$

式中, d_x 为 x 方向的衰减函数. 这样在频率域中新坐标系下的空间导数和原坐标系下的空间导数有一个简单的映射关系:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{\tilde{s}_x} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4)$$

通过这个简单的映射关系, PML模型实现了实数空间和虚数空间的转换, 更多的细节可以参考Collino和Tsogka(2001)、Komatitsch和Martin(2007). 把式(3)代入式(2), 在PML区域的平面波场可以表示为

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\text{pml}} &= (e^{-jk_x \tilde{x}}) e^{-jk_z z} \\ &= \left(e^{-jk_x x} e^{-\frac{k_x}{\omega} \int_0^x d_x dx} \right) e^{-jk_z z} \\ &= \hat{u} e^{-\frac{k_x}{\omega} \int_0^x d_x dx}, a < x < b. \end{aligned} \quad (5)$$

可以发现, 在PML区域, 波场以指数 $\exp\left(-\frac{k_x}{\omega} \int_0^x d_x dx\right)$ 衰减, 由于 $k_x = k \cos \theta$, 因此波场衰减效

果会和波场的入射角度有关, 通常垂直入射吸收效果最好, 随着入射角度 θ 的增加, 吸收效果逐渐下降. 当波场沿切向方向入射, 入射角 θ 接近 90° , k_x 会接近 0, 很明显这时传统的PML方法对波场的吸收效果会变得很差.

2.2 CPML原理简介

传统PML和CFS-PML方法的根本区别在于对拉伸函数 $\tilde{s}_x$ 的定义不同. 区别于方程(3)中定义的传统PML方法的拉伸函数 $\tilde{s}_x = 1 + \frac{d_x}{j\omega}$, CFS-PML的复频率移动拉伸函数定义为

$$\tilde{s}_x = \kappa_x + \frac{d_x}{a_x + j\omega}, \quad (6)$$

式中, a_x 为 x 方向复频率移动参数, κ_x 为 x 方向拉伸参数, d_x 为 x 方向衰减函数. 很明显, 如果我们设定 $\kappa_x = 1$ 并且 $a_x = 0$, 方程(6)会变得和传统PML方法下定义的拉伸函数完全一致. 图1b给出了二维(2D)矩形模拟区域, CFS-PML的复频率移动拉伸函数中的组成参数在模拟计算区域和PML区域的设置示意图.

式(4)给出了频率域中拉伸坐标系下的空间导数和原坐标系下的空间导数之间的映射关系. 在时间域中拉伸坐标下的空间导数, 可以写为拉伸函数的倒数 $\frac{1}{\tilde{s}_x}$ 的反傅里叶变换与原坐标下的空间导数的卷积:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = F^{-1} \left\{ \frac{1}{\tilde{s}_x} \right\} * \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{s_x} * \frac{\partial}{\partial x}. \quad (7)$$

式中, F^{-1} 表示反傅里叶变换. 上式是一种有效实现CFS-PML的方法. 这种通过卷积的方式实现空间导数在不同坐标系下的转换是CPML方法名字的由来.

这个在拉伸延展坐标下的空间导数可以进一步写为(Komatitsch和Martin, 2007; Pasalic和McGarry, 2010):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{\kappa_x} \frac{\partial}{\partial x} + \psi'_x, \\ \psi'_x = \zeta_x(t) * \frac{\partial}{\partial x}, \\ \zeta_x(t) = -\frac{d_x}{\kappa_x^2} H(t) e^{-\left(\frac{d_x}{\kappa_x} + a_x\right)t}, \end{cases} \quad (8)$$

式中, $H(t)$ 为单位阶跃函数, ψ'_x 为时域卷积项, 其可以通过递归的方式求取. 数值模拟是离散点的计算, 离散时间点处的卷积项 $\psi_x^{n\Delta t}$ 可以表示为

$$\begin{cases} \psi_x^{n\Delta t} = b_x \psi_x^{(n-1)\Delta t} + c_x \frac{\partial u^{n\Delta t}}{\partial x}, \\ b_x = e^{-\left(\frac{d_x}{\kappa_x} + a_x\right)\Delta t}, \\ c_x = \frac{d_x}{d_x \kappa_x + a_x \kappa_x^2} (b_x - 1), \end{cases} \quad (9)$$

式中, n 表示离散的时间点. 这样, 在每一个时间点的卷积项 $\psi_x^{n\Delta t}$, 可以由上一个时间点的值和当前时间点的空间导数计算得到.

2.3 二阶声波方程的TS-CPML实施方法

传统的PML/CPML边界条件下的二阶声波方程(2D)可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{z}} \right) \\ &= \frac{1}{s_x} * \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{s_x} * \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{s_z} * \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{s_z} * \frac{\partial u}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

式中, u 为波场, v 是速度参数(波场传播速度). 在数值模拟计算中, 上式中的双重卷积算子难以在时间域的有限差分中直接实现. 如前文所述, 非分裂式PML/CPML的实现方法, 均是通过引入辅助变量或者辅助方程, 重新改写CPML控制方程(10)来避免卷积算子. 本文提出了一种新的CPML实现方法可以对式(10)直接进行有限差分数值模拟, 避免了对二阶CPML控制方程重新改写. 利用公式(8)和公式(9), PML区域波场 u 在离散时刻点 $t=n\Delta t$ 可以表示为

$$\frac{\partial u^{n\Delta t}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial u^{n\Delta t}}{\partial x} + \psi_x^{n\Delta t} (u^{n\Delta t}). \quad (11)$$

这里我们设置 $\kappa_x=1$. 公式(11)表明, 拉伸延展坐标下, 离散时间点上的波场空间导数等于原坐标下波场空间导数和一个卷积项的求和. 这个卷积项可以理解对于原坐标下波场空间导数的矫正项. 在每一个离散时间点上, 这个矫正项可以通过公式(9)进行求解.

为了后续叙述的简便, 这里, 我们引入 x 方向的前一阶导数算子 D_x^+ , 向后一阶导数算子 D_x^- :

$$\begin{cases} D_x^+ u(i, k) = \sum_{m=1}^M c_m [u(i\Delta x + m\Delta x, k\Delta z) - u(i\Delta x - (m-1)\Delta x, k\Delta z)] / \Delta x, \\ D_x^- u(i, k) = \sum_{m=1}^M c_m [u(i\Delta x + (m-1)\Delta x, k\Delta z) - u(i\Delta x - m\Delta x, k\Delta z)] / \Delta x, \end{cases} \quad (12)$$

式中, i 、 k 分别代表 x 方向和 z 方向的离散变量, $u(i, k)$ 表示离散波场变量 $u(i\Delta x, k\Delta z)$, Δx 、 Δz 分别代表 x 方向和 z 方向的空间采样间隔. $c_m(m=1, 2, 3, \dots)$ 为一阶交错网格差分系数(Kindelan等, 1990; Liu, 2014). 例如, 四阶空间精度, $M=2$, 有限差分系数分别为 $c_1=9/8$ 和 $c_2=-1/24$.

利用公式(11)计算拉伸坐标下波场的一阶空间偏导数时, 首先利用向前导数算子计算半网格点处波场的一阶空间偏导数:

$$\left. \frac{\partial u^{n\Delta t}}{\partial \tilde{x}} \right|_{(i\Delta x+1/2\Delta x, k\Delta z)} = D_x^+ u^n(i, k) = u_x^n(i+1/2, k), \quad (13)$$

式中, u_x 表示波场 u 在 x 方向的一阶空间偏导数. 然后把矫正项(卷积项)和原坐标下的一阶空间偏导数相加, 就可以得到拉伸坐标系下波场的一阶空间偏导数:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u^{n\Delta t}}{\partial \tilde{x}} \right|_{(i\Delta x+1/2\Delta x, k\Delta z)} &= u_x^n(i+1/2, k) \\ &= u_x^n(i+1/2, k) + b_x(i+1/2, k) \\ &\quad \cdot \psi_x^{n-1}(u_x^{n-1}(i+1/2, k)) \\ &\quad + c_x(i+1/2, k) u_x^n(i+1/2, k). \end{aligned} \quad (14)$$

由公式(14)得到了拉伸坐标下的波场一阶偏导数 $u_x^n(i+1/2, k)$ 后, 采用向后导数算子对半网格点上的二阶偏导数波场进行计算, 可以得到拉伸坐标系下整网格点上的二阶偏导数:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u_x^n}{\partial \tilde{x}} \right|_{(i\Delta x, k\Delta z)} = D_x^- u_x^n(i+1/2, k) \\ = \sum_{m=1}^M \frac{c_m [u_x^n(i-1/2+m, k) - u_x^n(i+1/2-m, k)]}{\Delta x} \\ = u_{xx}^n(i, k), \\ \left. \frac{\partial u_x^n}{\partial \tilde{x}} \right|_{(i\Delta x, k\Delta z)} = u_{xx}^n(i, k) \\ = u_{xx}^n(i, k) + b_x(i, k) \psi_{xx}^{n-1}(u_{xx}^{n-1}(i, k)) \\ + c_x(i, k) u_{xx}^n(i, k). \end{cases} \quad (15)$$

这里我们采用向后导数算子来计算原坐标系下的空间导数. 需要指出的是, 我们这里提出的算法可以被应用到任意高阶有限差分的计算上.

对于顶层为自由表面边界的情况(图1c), 我们可以简单的把图1b模型顶上的PML区域拿掉, 然后直接计算在数值模拟计算区域和PML区域波场的二阶偏导数:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ = \frac{1}{\Delta x^2} \left(C_0 u(i, k) + \sum_{l=1}^L C_l (u(i+l, k) + u(i-l, k)) \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ = \frac{1}{\Delta z^2} \left(C_0 u(i, k) + \sum_{l=1}^L C_l (u(i, k+l) + u(i, k-l)) \right), \end{cases} \quad (16a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} \right) = D_{\tilde{x}}^- D_{\tilde{x}}^+ u(i, k), \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{z}} \right) = D_{\tilde{z}}^- D_{\tilde{z}}^+ u(i, k), \end{cases} \quad (16b)$$

式中, C_l 表示高阶精度中心差分系数. $D_{\tilde{x}}^- D_{\tilde{x}}^+ u(i, k)$ 和 $D_{\tilde{z}}^- D_{\tilde{z}}^+ u(i, k)$ 分别为有限差分离散计算 PML 区域 x 方向和 z 方向的二阶偏导数 $u_{\tilde{x}\tilde{x}}(i\Delta x, k\Delta z)$ 和 $u_{\tilde{z}\tilde{z}}(i\Delta x, k\Delta z)$. 数值模拟计算区域 B, 采用空间 2L 阶精度常规网格有限差分方法:

$$\begin{aligned} u^{n+1}(i, k) &= 2u^n(i, k) - u^{n-1}(i, k) \\ &+ \frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \left(C_0 u^n(i, k) + \sum_{l=1}^L C_l (u^n(i+l, k) + u^n(i-l, k)) \right) \\ &+ \frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta z^2} \left(C_0 u^n(i, k) + \sum_{l=1}^L C_l (u^n(i, k+l) + u^n(i, k-l)) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

在平行界面 PML 区域 A 和区域 D, 有限差分离散格式为

$$\begin{aligned} u^{n+1}(i, k) &= 2u^n(i, k) - u^{n-1}(i, k) + v^2 \Delta t^2 D_{\tilde{x}}^- D_{\tilde{x}}^+ u^n(i, k) \\ &+ \frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta z^2} \left(C_0 u^n(i, k) + \sum_{l=1}^L C_l (u^n(i, k+l) + u^n(i, k-l)) \right), \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} u^{n+1}(i, k) &= 2u^n(i, k) - u^{n-1}(i, k) + v^2 \Delta t^2 D_{\tilde{z}}^- D_{\tilde{z}}^+ u^n(i, k) \\ &+ \frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \left(C_0 u^n(i, k) + \sum_{l=1}^L C_l (u^n(i+l, k) + u^n(i-l, k)) \right). \end{aligned} \quad (18b)$$

在拐角 PML 区域 C, 有限差分离散格式为

$$\begin{aligned} u^{n+1}(i, k) &= 2u^n(i, k) - u^{n-1}(i, k) \\ &+ v^2 \Delta t^2 (D_{\tilde{x}}^- D_{\tilde{x}}^+ u^n(i, k) + D_{\tilde{z}}^- D_{\tilde{z}}^+ u^n(i, k)). \end{aligned} \quad (19)$$

和传统的二阶声波方程 CPML 实施方法(网络版附录 A, <http://earthcn.scichina.com>)对比, 分区域两步 CPML 方法(TS-CPML)引入的变量少, 同时不需要计算卷积项的偏导数(表 1).

2.4 二阶 TTI 介质拟声波方程的 TS-CPML 实施方法

Fletcher 等(2009)给出了 TTI 各向异性介质中二阶拟声波方程组. 我们直接引入 CPML 到二维拟声波方程组中可以得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v_{px}^2 H_p p + \alpha v_{pz}^2 H_q q + v_{sz}^2 H_1 (p - \alpha q), \\ \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{v_{pn}^2}{\alpha} H_p p + v_{pz}^2 H_q q - v_{sz}^2 H_2 \left(\frac{1}{\alpha} p - \alpha q \right), \end{cases} \quad (20)$$

其中,

$$\begin{cases} H_1 = \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} + \sin 2\theta \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}}, \\ H_2 = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} - H_1. \end{cases} \quad (21)$$

式中, p 和 q 分别代表压力波场和辅助波场, v_{px} 和 v_{sz} 代表各向异性对称面轴向的纵波速度和伪横波速度, $v_{pn} = v_{pz} \sqrt{1+2\delta}$ 代表纵波的动校正速度, $v_{px} = v_{pz} \sqrt{1+2\varepsilon}$ 代表纵波在垂直各向异性对称轴方向上的速度, δ 和 ε 是 Thomsen 各向异性介质参数(Thomsen, 1986). α 是非零常数, θ 是各向异性对称轴与垂直方向的角度. 公式(21)包含了关于 x 方向或者 z 方向的空间二阶偏导数以及 x 和 z 方向混合的二阶交叉导数, 可以采用 TS-CPML 方法很方便的计算这些二阶偏导数. 值得注意的是, 二阶交叉导数的计算也都是在半网格点上, 我们需要将其插值到整数网格点上. 例如 $\frac{\partial^2 p}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}}$,

表 1 二阶声波方程传统 CPML 和 TS-CPML 方法对比

方法	卷积项变量	卷积项变量额外运算
TS-CPML	$\psi_x(u), \psi_z(u), \psi_x\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}\right), \psi_z\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{z}}\right)$	无
传统 CPML	$\psi_x(u), \psi_z(u), \psi_x\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}\right), \psi_z\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{z}}\right),$ $\psi_x(\psi_x(u)), \psi_z(\psi_z(u))$	$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \psi_x(u), \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \psi_z(u)$

我们用公式(13)~(15), 先计算出 z 方向半网格点处一阶偏导数 $p_z \left(i\Delta x, k\Delta z + \frac{\Delta z}{2} \right)$ 的值, 然后插值到整数网格点上:

$$p_z(i\Delta x, k\Delta z) = \frac{1}{2} \left(p_z \left(i\Delta x, k\Delta z + \frac{\Delta z}{2} \right) + p_z \left(i\Delta x, k\Delta z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right). \quad (22)$$

根据TS-CPML原理, 可以计算出 x 方向半网格点处二阶偏导数 $p_{\bar{x}\bar{z}} \left(i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}, k\Delta z \right)$ 的值, 然后插值到整数网格点上:

$$p_{\bar{x}\bar{z}}(i\Delta x, k\Delta z) = \frac{1}{2} \left(p_{\bar{x}\bar{z}} \left(i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}, k\Delta z \right) + p_{\bar{x}\bar{z}} \left(i\Delta x - \frac{\Delta x}{2}, k\Delta z \right) \right). \quad (23)$$

表2给出了TTI介质拟声波方程组传统的CPML实施方法(网络版附录B)和TS-CPML方法对比。

3 数值模拟测试分析

如前文所示, TS-CPML方法可以被直接用于数值计算各向同性和TTI各向异性介质中的二阶声波方程。为了验证TS-CPML方法的精度和吸收效果, 我们针对不同类型的二维模型, 开展了多个数值模拟实验。在下面二维数值模拟实例中, 计算与PML区域我们均采用了时间上二阶精度, 空间上六阶精度有限差分方法, 在没有特别指出的情况下, 这些试验采用的空间采样间隔是 $\Delta x = \Delta z = 50\text{m}$, 时间采样间隔是 $\Delta t = 5\text{ms}$ 。

3.1 二维各向同性介质模型

第一个数值模拟实例, 速度模型为 3000m s^{-1} 均匀各向同性介质(图2a)。模型尺寸为 $10\text{km} \times 10\text{km}$ 。主频 f_0 为5Hz的雷克子波(Ricker)作为震源放置在模型的中心, 时移时间为 $t_0 = 1.5/f_0 = 0.3\text{s}$ 。记录时间是10s, 对应2000个时间采样。

CPML拉伸函数中三个参数可以表示为(Martin和Komatitsch, 2009):

$$\begin{cases} d_{x_i} = d_0 (x_i / L)^m, & x_i = x, z; \\ \kappa_{x_i} = 1 + (\kappa_0 - 1) (x_i / L)^2, & x_i = x, z; \\ a_{x_i} = a_0 (1 - x_i / L), & x_i = x, z, \end{cases} \quad (24)$$

式中, d_{x_i} 为衰减函数, 其中 x_i 表示沿 x_i 方向由PML区域内侧(模拟计算区域和PML区域的分界面)到外侧(模型的外边界)的距离。 L 为PML区域的厚度, m 可以设置为 $m=2$ 。根据Collino和Tsogka(2001), 衰减函数 $d_0 = 3v_p \log((1 + R_c) / (2L))$, R_c 为理论反射系数, v_p 是声波波速; κ_{x_i} 为 x_i 方向的拉伸参数。本文中我们设置 $\kappa_0 = 1$ (Komatitsch和Martin, 2007), $a_0 = 2\pi f_0$, f_0 为震源的主频。

为了测试边界条件的吸收效果, 我们需要定义一个误差衡量标准。我们把相同模型四周进行扩展, 使用标准有限差分数值模拟得到一个边界没有任何反射的波场作为参考波场 $u_{ref}^{NA}(i\Delta x, k\Delta z)$ 。这个模型要足够大, 足以保证在10s以内没有任何边界反射会回到计算区域。在我们的试验中, 我们使用了一个16倍于测试模

表2 TTI介质二阶拟声波方程组传统CPML和TS-CPML方法对比

方法	卷积项变量	卷积项变量额外计算
TS-CPML	$\psi_x(p), \psi_z(p), \psi_x \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right), \psi_z \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right), \psi_x \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right), \psi_z \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right),$ $\psi_x(q), \psi_z(q), \psi_x \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right), \psi_z \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right), \psi_x \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right), \psi_z \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)$	无
传统CPML	$\psi_x(p), \psi_z(p), \psi_x \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right), \psi_z \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right), \psi_x \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right), \psi_z \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right),$ $\psi_x(q), \psi_z(q), \psi_x \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right), \psi_z \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right), \psi_x \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right), \psi_z \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right),$ $\psi_x(\psi_x(p)), \psi_z(\psi_z(p)),$ $\psi_x(\psi_x(q)), \psi_z(\psi_z(q))$	$\frac{\partial}{\partial x}(\psi_x(p)), \frac{\partial}{\partial z}(\psi_z(p)),$ $\frac{\partial}{\partial x}(\psi_x(q)), \frac{\partial}{\partial z}(\psi_z(q)),$ $\frac{\partial}{\partial x}(\psi_z(p)), \frac{\partial}{\partial x}(\psi_z(q))$

图2 速度模型和LRC结果

(a)为 3000m s^{-1} 二维均匀速度模型, 大小为 $10\text{km} \times 10\text{km}$. 细虚线表示计算区域和PML区域的界面. 粗的水平虚线表示201个检波器的位置(深度为 2km), 记录的波场值用于计算局部反射系数(LRC), 如图(b)和图(c)所示. (b)为一阶声波方程分裂式PML(蓝色虚线)、一阶声波方程CPML(黑色实线)和二阶声波方程TS-CPML(红色虚线)模拟计算得到的LRC曲线. 数值模拟中PML区域的厚度为10网格层厚. (c)为二阶声波方程TS-CPML边界条件, 计算得到的不同PML厚度的LRC结果. 10、20和30网格层的PML厚度分别用红色虚线、绿色虚线和棕色虚线显示

型($200\Delta x \times 200\Delta z$)的大模型($800\Delta x \times 800\Delta z$)来计算参考波场. 在每次TS-CPML和其他PML/CPML的测试中, 我们定义了一个局部反射系数(LRC)来衡量边界条件的吸收效果:

$$\text{LRC}(i, k) = \max \left(20 \log_{10} \left(\frac{|u_{ref}^{n\Delta t}(i\Delta x, k\Delta z) - u_{sim}^{n\Delta t}(i\Delta x, k\Delta z)|}{\max |u_{ref}^{n\Delta t}(i\Delta x, k\Delta z)|} \right) \right), \quad (25)$$

式中, $u_{ref}^{n\Delta t}(i\Delta x, k\Delta z)$ 表示没有任何边界反射波的参考波场, $u_{sim}^{n\Delta t}(i\Delta x, k\Delta z)$ 表示不同吸收边界条件下模拟的波场. LRC(i, k)的值直接反应出各种不同边界条件方法对反射波的压制效果. 局部反射系数值越小, 表示边界条件的吸收效果越好.

我们用模拟A来标记标准二阶声波方程有限差分数值模拟, 模拟B来标记交错网格一阶声波方程分裂式PML边界条件数值模拟, 模拟C来标记交错网格一阶声波方程CPML边界条件数值模拟, 模拟D来标记本文提出的二阶声波方程TS-CPML边界条件数值模拟. 在B~D的模拟试验中, 采用10个网格点厚度的PML/CPML吸收层. 为了定量分析和比较B~D的吸收效果, 我们放置一组检波器位于 $40\Delta z$ 深度来记录波场计算局部反射系数(图2a). 图2b中可以看出两种非分裂式CPML吸收效果要优于分裂式PML, 并且二阶声波方程的TS-CPML和一阶声波方程的CPML具有几乎一致的吸收效果. 图2c给出了不同层厚PML的吸收效果(分别为10、20和30层厚). 可以看到增加PML层厚会进一步降低反射波场振幅从而提高边界反射波吸收效果. 例如30层厚(大约2.5个主波长)的PML区域, 二阶

声波方程TS-CPML的LRC可以达到 -60dB , 也就是说边界条件吸收之后, 剩余的边界反射波振幅大约为直达波最大振幅的0.1%.

图3a给出了不同边界条件下, A~D数值模拟的波场快照. 每个边界条件下给出了1.5、2.0、2.5和3.0s四个时刻的波场快照. 其中边界没有处理的模拟A波场快照, 边界反射波很明显(图3a的第一行). 而采用边界吸收条件的模拟B~D波场快照, 边界反射波都得到了很好的压制(图3a的第二三四行). 图3b给出了检波器位置为($50\Delta x, 50\Delta z$)(图3a中的黑色倒三角)处不同边界条件的地震记录. 其中黑色实线代表参考地震记录A, 蓝色虚线是一阶声波方程分裂式PML边界条件模拟的地震记录B, 绿色虚-点线是一阶声波方程CPML边界条件模拟的地震记录C, 红色点线是二阶声波方程TS-CPML边界条件模拟的地震记录D. 从局部放大图可以看出, 分裂式PML边界条件模拟B中, 边界反射波的振幅较大; 一阶声波方程CPML边界条件模拟C和二阶声波TS-CPML边界条件模拟得到的地震记录模拟D, 边界反射波振幅基本一致. 这和LRC误差衡量标准下的结论是一致的. 图3c显示了不同厚度的PML区域(10、20和30层网格厚的PML区域)的地震记录和参考地震记录之间的差值. 增加CPML层厚度可以减小误差. 和图2c联合对比可以看出, 10网格厚的PML区域可以将边界反射降低到~1%, 如果想要达到误差小于0.1%的精度, 需要一个30网格层厚(大约2.5个主波长)的PML区域.

前面对比分析了二阶声波方程TS-CPML和一阶声波方程边界条件的吸收效果, 我们发现二阶声波方程TS-CPML和一阶声波方程CPML具有基本相同的吸

图3 不同边界条件的波场快照和地震记录

(a)为1.5、2.0、2.5和3.0秒的波场快照, 自上而下边界条件分别为无处理、分裂式PML、CPML和TS-CPML边界条件。细虚线表示计算域和PML域之间的分界面。倒三角形表示图(b)中地震道的记录位置。(b)为在检波点(2.5km, 2.5km)记录的一阶声波方程分裂式PML边界条件(蓝色虚线)、一阶声波方程CPML边界条件(绿色虚-点线)和二阶声波方程TS-CPML边界条件(红色点线)数值模拟得到的地震道。为便于比较, 参考地震记录也以黑色实线显示。插图显示了放大的地震记录图。(c)为不同厚度的PML区域(10层、20层和30层网格厚的PML区域), 二阶声波方程TS-CPML边界条件数值模拟得到的地震道以及和参考地震记录之间的误差曲线

收效果. 下面我们来对比分析二阶声波方程TS-CPML和传统二阶声波方程CPML边界条件的吸收效果和计算效率. 这里传统二阶声波方程CPML边界条件的实现我们是采用Pasalic和McGarry(2010)提出的方法, 卷积项变量可以离散在整网格和半网格上, 文中的传统二阶声波方程CPML中卷积项变量均在整网格点上离散, 更多的细节在网络版附录A中详细给出. 卷积项变量离散在半网格点上, 可以进一步提高PML的吸收效果. 在这个试验中, 速度模型和数值模拟参数均和前面一致, 模型上界面采用自由表面边界条件(图4a). 一组检波器位于地下50m处用于记录波场, 计算局部反射系数. 图4b给出了10层厚的二阶声波方程传统CPML(蓝色虚线)和TS-CPML(红色点线)的LRC结果. 可以看出TS-CPML吸收效果要优于传统的CPML. TS-CPML试验中的反射波振幅比传统CPML试验中的反射波振幅要小2~3倍. 需要指出的是, 这里我们比较的都是吸收边界条件在二阶声波方程上的实现. 这与前面的图2和图3不同, 在图2和图3的试验中, 我们比较的是吸收边界条件在一阶声波方程上的实现.

图4c给出了四个时刻(1.5、2.0、2.5和4.5s)的波场快照. 除了模型顶部的自由边界反射, 模型其他三个边

界的反射都非常弱. 图4d给出了检波器位置为 $(20\Delta x, \Delta z)$ 处参考地震记录, 传统的CPML和TS-CPML边界条件数值模拟的地震记录. 其中黑色实线代表参考地震记录, 蓝色虚线是传统CPML边界条件模拟的地震记录, 红色点线是TS-CPML边界条件模拟的地震记录. 可以看到三个记录都几乎完全一致, 这说明传统的CPML和TS-CPML对反射波的压制都非常有效. 局部放大图给出了传统的CPML边界条件和TS-CPML边界条件的地震记录与参考记录之间的误差曲线对比, 其中蓝色虚线是传统CPML边界条件的误差曲线, 红色点线是TS-CPML边界条件的误差曲线. 从局部误差放大图可以看出传统的CPML边界条件的边界反射波的最大振幅大约为TS-CPML边界条件反射波最大振幅的两倍, 分别大约为他们各自的直达波振幅的~1%和~0.5%.

我们对比了这两种方法的计算效率, 计算机硬件参数为: Linux系统, 单个CPU, intel e5-2680 v3 处理器(12核), 内存128G. 数值模拟的时间离散点数为2000, TS-CPML和传统CPML耗时分别为0.67和0.72s(表3). 从耗时对比和卷积项变量额外计算对比(表1)可以看出, 传统的CPML方法相比较于TS-CPML方法, 需要在PML区域的每个网格点上多进行两次差分计算.

图4 二阶声波方程CPML和TS-CPML方法对比

(a)与图3(a)相同的二维均匀速度模型, 除了顶部为自由界面. 粗水平虚线表示201个检波器位于自由面以下0.05km深度处的位置, 其记录的波场用于计算LRC. (b)为10层厚的传统CPML边界条件(蓝色虚线)和10层厚的TS-CPML边界条件(红色虚线)计算得到的LRC曲线. (c)为传统CPML边界条件和TS-CPML边界条件模拟记录的1.5、2.0、2.5和4.5s四个时刻波场快照, 细虚线表示计算区域和PML区域之间的分界, 两个4.5s快照中标记的倒黑色实心三角形表示(d)中地震道的记录位置. (d)为CPML边界条件(蓝色虚线)和TS-CPML边界条件(红色虚线)数值模拟记录的地震道, 参考地震记录以黑色实线显示, 插图显示了两种边界条件得到记录和参考记录之间的误差曲线

表 3 数值模拟耗时对比

方法	声波	TTI介质拟声波
TS-CPML	0.67s	485s
CPML	0.72s	493s

3.2 非均匀二维盐丘速度模型

为了测试TS-CPML在复杂非均匀介质中的吸收效果,我们选取了2D SEG/EAGE 盐丘模型作为速度模型参数(图5). 盐丘速度模型大小为32.45km×7.5km. 空间采样间隔为50m, 时间采样间隔5ms. 震源为5Hz的雷克子波放置于(15km, 1km)处, 时移时间为0.3s. 模

图 5 二维SEG/EAGE盐丘速度模型

模型大小为32.45km×7.5km, 顶部为自由表面边界

型上界面采用自由表面边界条件, 两侧和底界面采用10层厚的PML区域. 图6a给出了地下一个网格深度(50m)的二维地震记录剖面, 分别为TS-CPML边界条

图 6 二维SEG/EAGE盐丘速度模型的TS-CPML吸收效果测试

(a)0.05km深度10层厚的TS-CPML边界条件数值模拟地震记录剖面和参考地震记录剖面. (b)上行为图(a)地震记录剖面上水平位置1.5km处TS-CPML边界条件单道地震记录(红色点线)和相对应的参考地震记录(黑色实线), 底行显示它们之间的误差曲线. (c)与(b)所示相同, 但位置为水平位置15km

图7 截取于二维BP-TTI模型的部分(顶部为自由表面边界)

模型大小为4.5km×4.5km. 细虚线为计算区域和PML区域的分界面. 各向同性速度和三个Thomsen各向异性参数分别显示在图(a)~(d)中

件数值模拟的地震记录和参考地震记录. 剖面上没有明显的边界反射波和低频噪音. 图6b和6c是地震记录剖面上分别取水平位置为1.5和15km处的单道地震记录以及相对应的误差曲线. 可以看出, 10层厚的TS-CPML边界条件数值模拟的地震记录和无边界反射的参考地震记录吻合十分好, 最大误差小于1%, 表明TS-CPML边界条件可以很好的应用于非均匀介质.

3.3 各向异性BP-TTI速度模型

为了进一步验证TS-CPML在各向异性介质中的吸收效果, 我们通过数值模拟测试了TTI各向异性介质中传统CPML(更多细节参照网络版附录B)和TS-CPML的吸收效率和计算效率. TS-CPML的具体实现由方程(20)给出. 我们截取了二维BP-TTI模型的部分作为本次数值模拟实验的模型参数(图7). 模型的大小为4.5km×4.5km, 空间网格间距是5m, 离散网格点数为900×900, 时间采样间隔为0.5ms. 模型两侧和底部是30层厚的PML区域, 顶部是自由表面边界. 主频为25Hz的Ricker子波放置在(2.5km, 0.025km)处作为激发震源.

图8a为地下一个网格深度(5m)记录得到的地震记

录剖面, 分别为TS-CPML边界条件数值模拟的地震记录、常规CPML数值模拟的地震记录和参考地震记录. 剖面上没有明显的边界反射等干扰波. 图8b和8c分别给出了地震记录剖面上水平位置为0.25km处的单道地震记录以及误差曲线. 从误差曲线图可以看出, TS-CPML边界条件数值模拟的地震记录和无边界反射的参考地震记录之间的绝对值最大误差约为传统CPML数值模拟的绝对值最大误差的一半. 由于模拟参数和PML参数设置一样, 因此TS-CPML相对于传统的CPML在TTI介质中具有更好的吸收效果. 我们在这里也进行了计算耗时对比测试, 计算机硬件参数和上文所述一样. 数值模拟的时间离散点数为10000, TS-CPML和传统CPML耗时分别为485s和493s(表3).

为了进一步测试TS-CPML的稳定性, 我们增加了一个70000个时间离散点数值模拟试验, 模拟了35s的波场传播. 图8d给出了用整个区域内所有网格点的能量总和来衡量边界条件是否稳定的测试结果. 从图中可以看出, 波场能量刚开始很稳定, 在进入波场传播至PML区域后开始衰减. 在全长35s的数值模拟过程中, 应用于复杂TTI各向异性盐丘模型的TS-CPML边界条件数值模拟没有出现数值不稳定现象.

图8 各向异性BP-TTI速度模型的TS-CPML吸收效果测试

(a)数值模拟得到合成地震记录剖面(地下5m深)。分别为采用TS-CPML边界条件、常规CPML边界条件数值模拟得到的地震记录和无边界面反射参考地震记录。(b)为图(a)水平位置0.25km处常规CPML边界条件单道地震记录(蓝色虚线)、TS-CPML边界条件单道地震记录(红色虚线)与参考单道记录(黑色实线)。(c)为传统CPML边界条件和TS-CPML边界条件单道地震记录与参考记录之间误差曲线。(d)为TS-CPML边界条件数值模拟,时长为35s的归一化能量衰减曲线

4 结论

文中提出了一种新的TS-CPML边界条件方法来实现时间域数值模拟二阶声波方程。该方法可以有效地应用于各向同性和TTI各向异性二阶声波方程,并且不需要重新改写二阶CPML方程组以及改写方程所引入的辅助变量或者辅助方程,同时编程易于实现。数值试验表明,该方法对二阶波动方程的吸收效率和计算效率均优于传统的CPML方法。

致谢 感谢中国石油大学赵杨教授和姚刚教授对本研究工作和论文的宝贵修改意见。感谢责任编辑与两位评审专家对完善本文提出的建设性意见和建议。

参考文献

- Alford R, Kelly K, Boore D M. 1974. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, 39: 834–842
- Appelö D, Kreiss G. 2007. Application of a perfectly matched layer to the nonlinear wave equation. *Wave Motion*, 44: 531–548

- Berenger J P. 1994. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J Comput Phys*, 114: 185–200
- Berenger J P. 2002a. Application of the CFS PML to the absorption of evanescent waves in waveguides. *IEEE Microw Wireless Compon Lett*, 12: 218–220
- Berenger J P. 2002b. Numerical reflection from FDTD-PMLs: A comparison of the split PML with the unsplit and CFS PMLs. *IEEE Trans Antennas Propagat*, 50: 258–265
- Basu U, Chopra A K. 2004. Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains. *Int J Numer Meth Eng*, 59: 1039–1074
- Becache E, Petropoulos P G, Gedney S D. 2004. On the long-time behavior of unsplit perfectly matched layers. *IEEE Trans Antennas Propagat*, 52: 1335–1342
- Chen H, Zhou H, Li Y. 2014. Application of unsplit convolutional perfectly matched layer for scalar arbitrarily wide-angle wave equation. *Geophysics*, 79: T313–T321
- Chew W, Liu Q. 1996. Perfectly matched layers for elastodynamics: A new absorbing boundary condition. *J Comput Acoust*, 4: 341–359
- Collino F, Tsogka C. 2001. Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 66: 294–307
- Duru K, Kreiss G. 2012. A well-posed and discretely stable perfectly matched layer for elastic wave equations in second order formulation. *Commun Comput Phys*, 11: 1643–1672
- Drossaert F H, Giannopoulos A. 2007a. A nonsplit complex frequency-shifted PML based on recursive integration for FDTD modeling of elastic waves. *Geophysics*, 72: T9–T17
- Drossaert F H, Giannopoulos A. 2007b. Complex frequency shifted convolution PML for FDTD modelling of elastic waves. *Wave Motion*, 44: 593–604
- Festa G, Nielsen S. 2003. PML absorbing boundaries. *Bull Seismol Soc Am*, 93: 891–903
- Festa G, Vilotte J P. 2005. The newmark scheme as velocity-stress time-staggering: An efficient PML implementation for spectral element simulations of elastodynamics. *Geophys J Int*, 161: 789–812
- Festa G, Delavaud E, Vilotte J P. 2005. Interaction between surface waves and absorbing boundaries for wave propagation in geological basins: 2D numerical simulations. *Geophys Res Lett*, 32: L20306
- Fletcher R P, Du X, Fowler P J. 2009. Reverse time migration in tilted transversely isotropic (TTI) media. *Geophysics*, 74: WCA179–WCA187
- Gao Y, Zhang J, Yao Z. 2015. Unsplit complex frequency shifted perfectly matched layer for second-order wave equation using auxiliary differential equations. *J Acoust Soc Am*, 138: EL551–EL557
- Graves R W. 1996. Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences. *Bull Seismol Soc Amer*, 86: 1091–1106
- Hastings F D, Schneider J B, Broschat S L. 1996. Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *J Acoust Soc Am*, 100: 3061–3069
- Kelly K, Ward R, Treitel S, Alford R. 1976. Synthetic seismograms: A finite-difference approach. *Geophysics*, 41: 2–27
- Kindelan M, Kamel A, Sguazzero P. 1990. On the construction and efficiency of staggered numerical differentiators for the wave equation. *Geophysics*, 55: 107–110
- Kuzuoglu M, Mittra R. 1996. Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers. *IEEE Microw Guid Wave Lett*, 6: 447–449
- Komatitsch D, Martin R. 2007. An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation. *Geophysics*, 72: SM155–SM167
- Kreiss G, Duru K. 2013. Discrete stability of perfectly matched layers for anisotropic wave equations in first and second order formulation. *Bit Numer Math*, 53: 641–663
- Levander A R. 1988. Fourth-order finite-difference *P-SV* seismograms. *Geophysics*, 53: 1425–1436
- Li Y, Matar O B. 2010. Convolutional perfectly matched layer for elastic second-order wave equation. *J Acoust Soc Am*, 127: 1318–1327
- Li S Z, Sun C Y, Tian L, Peng P P, Qiu Y. 2018. Unsplit complex frequency shifted PML implementation in mess-free discretization. In: 80th Annual International Conference and Exhibition, EAGE, Extended Abstracts
- Liu Y, Sen M K. 2009. A new time-space domain high-order finite-difference method for the acoustic wave equation. *J Comput Phys*, 228: 8779–8806
- Liu Y. 2014. Optimal staggered-grid finite-difference schemes based on least-squares for wave equation modelling. *Geophys J Int*, 197: 1033–1047
- Marcinkovich C, Olsen K. 2003. On the implementation of perfectly matched layers in a three-dimensional fourth-order velocity-stress finite difference scheme. *J Geophys Res*, 108: 2276–2292
- Marfurt K J. 1984. Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations. *Geophysics*, 49: 533–549
- Martin R, Komatitsch D, Ezziani A. 2008. An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for seismic wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, 73: T51–T61
- Martin R, Komatitsch D. 2009. An unsplit convolutional perfectly matched layer technique improved at grazing incidence for the

- viscoelastic wave equation. *Geophys J Int*, 179: 333–344
- Martin R, Komatitsch D, Gedney S D, Bruthiaux E. 2010. A high-order time and space formulation of the unsplit perfectly matched layer for the seismic wave equation using auxiliary differential equations (ADEPML). *CMES*, 56: 17–42
- Ma X, Yang D, Huang X, Zhou Y. 2018. Nonsplit complex-frequency shifted perfectly matched layer combined with symplectic methods for solving second-order seismic wave equations—Part 1: Method. *Geophysics*, 83: T301–T311
- Ma X, Yang D, He X, Huang X, Song J. 2019a. Nonsplit complex-frequency-shifted perfectly matched layer combined with symplectic methods for solving second-order seismic wave equations — Part 2: Wavefield simulations. *Geophysics*, 84: T167–T179
- Ma X, Li Y, Song J. 2019b. A stable auxiliary differential equation perfectly matched layer condition combined with low-dispersive symplectic methods for solving second-order elastic wave equations. *Geophysics*, 84: T193–T206
- Pasalic D, McGarry R. 2010. Convolutional perfectly matched layer for isotropic and anisotropic acoustic wave equations. In: 80th Annual International Meeting. SEG, Expanded Abstracts. 2925–2929
- Ramadan O. 2003. Auxiliary differential equation formulation: An efficient implementation of the perfectly matched layer. *IEEE Microw Wireless Compon Lett*, 13: 69–71
- Roden J A, Gedney S D. 2000. Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media. *Microw Opt Technol Lett*, 27: 334–339
- Saenger E H, Gold N, Shapiro S A. 2000. Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid. *Wave Motion*, 31: 77–92
- Thomsen L. 1986. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, 51: 1954–1966
- Virieux J. 1984. *SH*-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 49: 1933–1942
- Virieux J. 1986. *P-SV* wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51: 889–901
- Wang T, Tang X. 2003. Finite-difference modeling of elastic wave propagation: A nonsplitting perfectly matched layer approach. *Geophysics*, 68: 1749–1755
- Wang Y, Liang W, Nashed Z, Li X, Liang G, Yang C. 2014. Seismic modeling by optimizing regularized staggered-grid finite-difference operators using a time-space-domain dispersion-relationship-preserving method. *Geophysics*, 79: T277–T285
- Zhang W, Shen Y. 2010. Unsplit complex frequency-shifted PML implementation using auxiliary differential equations for seismic wave modeling. *Geophysics*, 75: T141–T154
- Zhang Z, Zhang W, Chen X. 2014. Complex frequency-shifted multi-axial perfectly matched layer for elastic wave modelling on curvilinear grids. *Geophys J Int*, 198: 140–153

(责任编辑: 杨顶辉)