奇异态: 从复杂网络到时空斑图

郑志刚^{1,2*}, 翟云^{1,2*}

1. 华侨大学系统科学研究所, 厦门 361021;

2. 华侨大学信息科学与工程学院, 厦门 361021

*联系人, 郑志刚, E-mail: zgzheng@hqu.edu.cn; 翟云, E-mail: physics@hqu.edu.cn

收稿日期: 2019-04-15; 接受日期: 2019-05-10; 网络出版日期: 2019-10-11

国家自然科学基金(编号: 11875135)和泉州市科技计划(编号: 2018C085R)资助项目

摘要 复杂网络的相关探索近年来飞速发展, 围绕复杂网络的动力学密切联系着物理、生物、电子工程甚至是经济学等众多不同学科中大量不同的现象, 其中一些共性行为如同步、相干振荡、传播扩散等集体涌现是交叉研究的热点. 一种被称为奇异态(Chimera State)的行为近十年来引起业界的广泛兴趣, 它刻画复杂系统虽由相同单元组成, 但单元会处于多种完全不同的相干与非相干态在空间的共存行为. 本文简要介绍了有关奇异态研究的现象与理论, 讨论了基于Kuramoto平均场自治理论与Ott-Antonson序参量动力学理论的统计和宏观描述, 集中讨论了在复杂网络上的奇异态及其稳定性, 并对近年来相关的奇异态斑图研究和实验应用等进行了简述.

关键词 复杂网络, 奇异态, 同步, 涌现

PACS: 05.45.Xt, 89.75.Kd, 89.75.-k, 05.45.-a

1 引言

自然界和人类社会中广泛存在的复杂系统可抽象为各种各样的复杂网络描述. 复杂网络的研究极大地促进了对复杂系统的研究和发展, 已经成为当今复杂系统或复杂性科学研究中最受关注和最具挑战性的科学前沿领域之一^[1-5]. 1998–1999年是复杂网络研究的重要时间节点, 人们突破了传统图论特别是随机图论的局限性束缚, 由应用数学家Watts和Strogatz^[6]提出了小世界网络, 由物理学家Barabasi和Albert^[7]提出了无标度网络, 这两项重要发现是网络科学研究的突破性进展和里程碑, 激起了国际上复杂网络的研究热潮,

标志着复杂网络研究真正进入了一个新时代. 网络科学与数学、物理科学、信息科学、生命科学、系统科学、社会科学等众多学科广泛交叉, 是复杂性与非线性科学发展到一定阶段的必然产物, 它不仅为人们提供了认识真实世界复杂性全新的科学视角, 而且已成为改造客观世界的新方法和有力武器^[8-10].

复杂网络上的动力学由于密切联系着大量来自不同学科背景的系统非平庸的动态行为而成为研究复杂网络最重要的使命, 在复杂网络研究热潮兴起之初就成为令人瞩目的焦点. 在复杂系统中, 大量具有简单动力学的单元耦合后涌现出的集体行为比单元动力学行为更为复杂且丰富, 人们发现了从同步、部分同

引用格式: 郑志刚, 翟云. 奇异态: 从复杂网络到时空斑图. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 010505

Zheng Z G, Zhai Y. Chimera state: From complex networks to spatiotemporal patterns (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2020, 50: 010505, doi: 10.1360/SSPMA-2019-0132

步、网络斑图到传播动力学等不同层次的诸多行为, 其中同步现象是具有普遍且重要意义的代表性集体行为, 得到了充分的研究^[11-15].

近年来, 一种对称性破缺的时空斑图涌现行为引起了大量关注. 人们发现, 在非局域耦合的全同振子空间会有两种不同状态共存, 即空间部分区域的振子保持相干态(Coherence), 而其余振子处于非相干态(Incoherence), 这种十分奇特而有趣的集体行为被称为奇异态(Chimera State)^[16,17]. Chimera是古希腊一种狮身、羊头等与蛇尾合体的神兽, 如图1(a)所示. 我国古代也有诸如龙、凤、麒麟等大量由不同动物组成的合体图腾. 生物学上也有“Chimera现象”, 称为嵌合体, 是指由不同基因型的细胞所构成的生物体, 可自发产生或人工产生. 1907年, 德国植物学家和遗传学家Winkler将其比喻为希腊神话中的“神兽”. 在复杂系统中, 奇异态是一种在全同单元构成的系统在空间中出现两种完全不同的态共存的行为, 即空间中一部分表现为相干态而其余部分为非相干态.

图 1 (网络版彩图) (a) 一个典型的古希腊多种兽合体的Chimera神兽; (b) 对方程(1)进行数值计算观察到的相位处于有序态和无序态共存的一种奇异态, 横轴 x 为空间位置

Figure 1 (Color online) (a) A type of ancient Greek chimera, which is a combination of parts from different beasts. (b) The chimera state that is computed by simulating eq. (1) reveals the coexistence of coherent and incoherent groups.

人们所发现的上述动力学奇异态行为非常类似于生物学上海豚与其他海洋哺乳动物具有的一类半脑睡眠现象. 物理上一个较早类似奇异态的研究是Ott课题组^[18]在研究耦合非线性Duffing振子的时空斑图时发现的, 他们称其为“相似域空间结构”. 2002年, 奇异态现象由Kuramoto和Battogtokh^[19]在非局域耦合的全同相振子系统中发现. 2004年, Abrams与Strogatz^[20]将其命名为Chimera State. 奇异态是一种特征显著的集体动力学行为, 它与Kuramoto模型中存在的部分同步不同, 后者是在一定耦合强度下自然频率不同的振子发生部分锁相, 而前者是参数和耦合方式完全相同的所有振子在空间自发出现的泾渭分明的部分相干与部分不相干共存行为, 如图1所示.

2 奇异态的涌现理论

人们近年来对复杂系统的奇异态问题在众多不同模型上进行了理论和数值计算分析. 时空系统一般采取空间离散的模型来处理. 考虑到非局域耦合, 除了传统的加上与空间距离有关的权重因子方法以外, 复杂网络作为空间离散化是一种自然的处理, 且代表了很多实际情形. 格点上的动力学则一般采取极限环振子或可激发单元.

在理论上, 对奇异态研究可以开展解析分析最简单的模型是由相振子描述的耦合极限环振子系统. 考虑如下的空间一维Ginzburg-Landau相振子系统:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \omega - \int_{-\pi}^{\pi} G(\Delta x) \sin(\delta \phi + \alpha) dx', \quad (1)$$

其中, $\phi(x, t)$ 是 t 时刻位于空间 x 处的振子相位, ω 为振子的自然频率, $\Delta x = x' - x$, $\delta \phi = \phi(x, t) - \phi(x', t)$. 方程右边的积分为空间耦合项, α 为相移(阻挫). 不失一般性可令 $\omega = 0$, 相移 $0 < \alpha < \pi/2$. 非负函数 $G(x) \geq 0$ 称为耦合核函数, 它反映空间不同位置振子之间的非局域相互作用, 该函数通常设为归一化且随 $|x|$ 增加而衰减的偶函数:

$$\int_0^{\infty} G(x) dx = 1, \quad G(-x) = G(x). \quad (2)$$

满足该性质的函数可以多种多样. Kuramoto等人^[19]研究了如下的指数型函数:

$$G(x) = 2\kappa e^{-\kappa|x|}, \quad \kappa > 0, \quad (3)$$

Abrams和Strogatz^[20,21]则选用了如下的余弦型核函数:

$$G(x) = [1 + A \cos x] / 2\pi, \quad A < 1. \quad (4)$$

Wolfrum课题组^[22]选用了如下的分段函数:

$$G(x) = \begin{cases} 1 / 2\pi\gamma, & |x| \leq \pi\gamma, \\ 0, & |x| > \pi\gamma, \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\gamma \in [0, 1]$. 在相位空间讨论相振子运动中, 人们通常选取转动坐标系进行讨论. 设处于相干态振子集合的共同平均频率为 Ω , 可引入 $\theta(t) = \phi(t) - \Omega t$, 在此坐标系中, 处于相干态的振子处于无转动状态, 而处于非相干态的振子则表现出非均匀的漂移.

类似于Kuramoto模型的讨论, 可引入处于空间 x 处的复序参量^[23]

$$Z(x, t) \equiv R(x, t) e^{i\theta(x, t)} = \int G(x - x') e^{i\theta(x', t)} dx'. \quad (6)$$

可以看到, 若所有振子处于完全同步态, 则 $Z(x, t) = e^{i\theta(t)} \int G(x - x') dx' = e^{i\theta(t)}$, 模 $R(x, t) \equiv |Z(x, t)| = 1$. 若只有空间部分振子同步, 则序参量的模 $R(x, t) \equiv |Z(x, t)| < 1$. 以下我们讨论两套推广到有关奇异态的理论, 一套是Kuramoto等人于2002年推广的自治方程理论, 另一套是2008年由Ott和Antonsen发展的序参量方法.

2.1 Kuramoto-Battogtokh (KB)自治理论

Kuramoto-Battogtokh (KB)理论是在早期Kuramoto的同步自治方程理论基础上发展起来的, 其基本思想是利用序参量定义(6), 将 R 设为待定参数, 形式求出右边含有 R 的积分, 进而得到 R 的等式. 以下作一讨论^[19]. 利用引入的序参量(6), 并令 $\Delta = \omega - \Omega$, 振子系统的动力学方程(1)可以重新写为

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = \Delta - R(x) \sin[\theta(x, t) - \Theta(x) + \alpha]. \quad (7)$$

当 $R(x) \geq |\Delta|$ 时, 处于 x 的振子在 $t \rightarrow \infty$ 时的运动会逐渐趋于满足等式

$$\Delta = R(x) \sin[\theta^*(x) - \Theta(x) + \alpha] \quad (8)$$

的稳定不动点, 由此可以得到

$$\begin{aligned} & \int G(x - x') e^{i\theta^*(x')} dx' \\ &= e^{-i\alpha} \int dx' G(x - x') e^{i\theta(x')} \frac{\sqrt{R^2(x') - \Delta^2} + i\Delta}{R(x')}. \end{aligned} \quad (9)$$

该积分对所有满足 $R(x) \geq |\Delta|$ 的 x 空间区域进行.

满足条件 $R(x) < |\Delta|$ 的那些振子则处于非同步态, 它们满足不变分布^[24,25]

$$\rho(\theta) = \frac{\sqrt{\Delta^2 - R^2}}{2\pi[\Delta - R \sin(\theta - \Theta + \alpha)]}. \quad (10)$$

以下计算处于漂移态的振子对序参量的贡献. 对(6)式中的项 $e^{i\theta(x')}$ 可近似用统计平均来代替, 即

$$e^{i\theta(x')} \approx \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \rho(\theta) d\theta.$$

由此利用(8)式可以得到

$$e^{i\theta(x')} \approx \frac{i}{R} e^{-i(\alpha - \theta)} \left[\Delta - \sqrt{\Delta^2 - R^2} \right]. \quad (11)$$

将其代入(6)与(9)式可得

$$\begin{aligned} Z(x) &= \int G(x - x') e^{i\theta(x')} dx' \\ &= i e^{-i\alpha} \int dx' G(x - x') e^{i\theta(x')} \frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 - R^2(x')}}{R(x')}. \end{aligned} \quad (12)$$

上述积分区域为满足 $R(x') < |\Delta|$ 的区间. 将(9)与(12)式合并, 考虑到 $\sqrt{R^2 - \Delta^2} + i\Delta = i \left[\Delta - \sqrt{\Delta^2 - R^2} \right]$, 并令 $\beta = \pi/2 - \alpha$, 可以得到如下的自治方程:

$$R(x) e^{i\theta(x)} = e^{i\beta} \int dx' G(x - x') e^{i\theta(x')} H(x'), \quad (13a)$$

这里函数

$$H(x) = \left[\Delta - \sqrt{\Delta^2 - R^2(x)} \right] / R(x). \quad (13b)$$

利用自治方程(13), 在泛函空间我们可以通过迭代的方式得到未知的 $R(x)$, $\Theta(x)$ 与 Δ . 由于自治方程在变换 $\Theta(x) \rightarrow \Theta(x) + \Theta_0$ 下具有不变性, 因此可设

$$\Theta(0) = 0. \quad (13c)$$

该式与复方程(13a)和(13b)构成的方程组可以确定 $R(x)$, $\Theta(x)$ 与 Δ .

图2给出了利用核函数(4)计算得到的典型振子状态空间分布^[20]. 从图2(a)和(b)的瞬时相位空间分布可以看到, 靠近 $x = \pm\pi$ 附近的振子处于同步的相干态, 而中间的振子处于非同步的非相干态. 图2(c)和(d)是利用自治方程方法给出的 $R(x)$ 与 $\Theta(x)$, 其中图2(c)的水平线为参数 Δ , 可以看到在 $R(x) \geq |\Delta|$ 的部分(即水平线与 $R(x)$ 曲线的交点以上区域)很好地对应于图2(a)与(b)中的处于相干态的振子, 理论给出的界面位置与数值结

图 2 (网络版彩图)利用核函数(4)式计算得到的典型振子状态空间分布. (a)和(b) 振子在某一时刻的相位和相速度分布, 靠近 $x = \pm\pi$ 附近的振子处于同步的相干态, 而中间的振子处于非相干态; (c)和(d) 利用自洽方程方法给出的 $R(x)$ 与 $\Theta(x)$, 其中图 (c)的水平线为参数 Δ , 可以看到在 $R(x) \geq |\Delta|$ 的部分对应于图(a)和(b)中处于相干态的振子, 理论给出了准确的结果. 改编自文献 [16]

Figure 2 (Color online) The typical chimera state shown by distributions of oscillators with the kernel function eq. (4). (a) A snapshot of the instantaneous phases of oscillators. (b) A snapshot of the instantaneous velocities of oscillators. (c) The modulus $R(x)$ of the complex order parameter and the real number Δ computed from eq. (16) in terms of the self-consistency scheme, where $R(x) \geq |\Delta|$ corresponds to the coherent domain. (d) The argument $\Theta(x)$ of the oscillators obtained from eq. (16). The coincidence between theory and numerical results can be clearly found. Adapted figure with permission from ref. [16].

果完全一致.

2.2 Ott-Antonsen (OA)降维理论

需要说明的是, 上述的KB自洽方法只适用于研究处于稳态下的奇异态, 即序参量不随时间变化. 实际上, 人们已观察到了非稳态的奇异态. 对于非稳态的情形, 我们需要研究序参量的含时动力学行为. Ott与Antonsen^[26]提出了一种被称为Ott-Antonsen (OA)拟设的降维方法, 将多振子空间动力学的讨论降维到低维序参量空间进行, 得到了序参量的动力学方程, 因而可以用来研究序参量的含时行为. 这种方法也可用于奇异态的研究, 特别是可处理非定态的情形. Abrams和Strogatz^[20,21]首先将此方法应用于由两个子网络构成的系统的奇异态讨论中, 其后Laing^[23]应用OA拟设推导出序参量的动力学方程. 以下我们来做一讨论.

考虑满足动力学方程(1)的大量振子, 设这些振子分布函数为 $f(x, \phi, t)$, 它满足连续性方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi}(vf) = 0, \quad (14)$$

其中的相速度为

$$v(x, t) = \omega - \int dx' G(x - x') \int_{-\pi}^{\pi} d\phi' \sin(\phi - \phi' + \alpha) f(x', \phi', t). \quad (15)$$

利用分布函数, 复序参量 $Z(x, t)$ 可表示为

$$Z(x, t) \equiv R(x, t) e^{i\Phi(x, t)} = \int dx' G(x - x') \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{i\phi(x')} f(x', \phi', t). \quad (16)$$

利用表达式(16), 相速度 $v(x, t)$ 可表为

$$v(x, t) = \omega - \frac{1}{2i} \left[Z^*(x, t) e^{i(\phi + \alpha)} - Z(x, t) e^{-i(\phi + \alpha)} \right]. \quad (17)$$

考虑到相位变量的 2π 周期性, 可将分布函数表为如下的傅里叶级数形式:

$$f(x, \phi, t) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n(x, t) e^{in\phi} + \text{c.c.}) \right], \quad (18)$$

其中, c.c. 表示复共轭. 利用OA拟设^[26], (18)式右边的系数 h_n 相互之间不独立, 它们满足如下的幂律关系:

$$h_n(x, t) = h^n(x, t), \quad (19)$$

这里 $h(x, t) = h_1(x, t)$. 将(19)式代入(18)式可得

$$f(x, \phi, t) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} h^n(x, t) e^{in\phi} + \text{c.c.} \right]. \quad (20)$$

将其代入连续性方程(14)式, 并比较两边 $e^{i\phi}$ 的系数可得

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -i\omega h + \frac{1}{2} \left(Z^* e^{i\alpha} - Z e^{-i\alpha} h^2 \right). \quad (21)$$

利用(20)式也可将序参量重新表达为

$$Z(x, t) = \int dx' G(x - x') h^*(x', t). \quad (22)$$

利用(21)和(22)式可得到序参量的演化动力学行为. 由于OA拟设中的 h_n 都不独立, 因此原本高维的多振子相位空间 $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ 中的讨论可以降维到复序参量二维空间中. 在长时间后, 位于 x 处振子的相位分布为

$$f(\phi) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^n(x) e^{in\phi}. \quad (23)$$

当 $|h(x, t)| < 1$ 时, 由上述求和并做归一化可得

$$f(\phi) = \frac{1 - |h|^2}{2\pi \left[-2|h| \cos(\phi - \arg h) + |h|^2 \right]}, \quad (24)$$

此处 $\arg$ 代表复函数 h 的幅角. 上述函数为Poisson核函数. 分布(24)式的中心位于 $\arg h$ 处, $|h|$ 描述分布的非均匀性. 图3给出了 $f(\phi)$ 分布的几种情况, 其中图3(a)为 $|h|=0$ 的情形, 可看到 $f(\phi)$ 为均匀分布; 图3(b)为 $0 < |h| < 1$ 的情形. 当 $|h|=1$ 时, 分布(24)式分子分母均趋于零, 求极限可得 $f(\phi)$ 简并为 δ 函数: $f(\phi) = \delta(\phi - \arg h)$, $|h|=1$, 如图3(c)所示. 此种情形对应于所有振子的锁相.

系数 $h(x, t)$ 也可以看作是在空间 x 处 $e^{i\phi}$ 的统计平均, 即 $h(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi f(x, \phi, t) e^{i\phi}$. 与(16)式定义的序参量 $Z(x, t)$ 相比, $h(x, t)$ 没有对空间的积分, 即没有考虑非局域效应. 因此 $h(x, t)$ 量度的是空间 x 处附近的同步相干性, 是一种局域序参量. 若对某一 x 处有 $|h(x, t)| = 1$, 则在 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ($\varepsilon \ll 1$)范围内的振子会处于锁相(相干态), 而当 $|h(x, t)| < 1$ 时, 则在 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ 范围内的振子处于非相干态.

考虑到序参量方程(21)在空间平移与相位变换 $h(x, t) \rightarrow h(x + \delta x) e^{i\varphi}$ 下具有不变性, 可以寻求如下的旋转波解:

$$h(x, t) = a(x) e^{-i\Omega t}, \quad (25)$$

其中 Ω 是所有振子的集体转动频率, $a(x)$ 为序参量的空

图3 (网络版彩图)处于 x 处的振子相位分布(泊松核函数) $f(\phi)$ 的几种情况. (a) $|h|=0$, $f(\phi)$ 为均匀分布; (b) $0 < |h| < 1$; (c) $|h|=1$, $f(\phi)$ 简并为 δ 函数. 改编自文献[16]

Figure 3 (Color online) The Poisson kernel function of oscillators $f(\phi)$ for (a) $|h|=0$ (a homogeneous distribution), (b) $0 < |h| < 1$ (typical Poisson form) and (c) $|h|=1$ (δ function). Adapted figure with permission from ref. [16].

间位形分布. $|a(x)|=1$ 与 $|a(x)|<1$ 分别对应于耦合振子系统在空间的相干与非相干态区域. 将(25)式带入(21)式可得

$$-i(\omega - \Omega) + \frac{1}{2} \left[\bar{Z}^*(x) e^{i\alpha} - \bar{Z}(x) e^{-i\alpha} a^2(x) \right] = 0, \quad (26)$$

其中

$$\bar{Z}(x) = \int dx' G(x - x') a^*(x'). \quad (27)$$

由(26)式可得到

$$a(x) = \begin{cases} \left[-i\Delta \sqrt{-\Delta^2 + |\bar{Z}(x)|^2} \right] / [\bar{Z}(x) e^{-i\alpha}], & \text{if } |\bar{Z}(x)| \geq |\Delta|, \\ \left[-i\Delta + i\sqrt{\Delta^2 - |\bar{Z}(x)|^2} \right] / [\bar{Z}(x) e^{-i\alpha}], & \text{if } |\bar{Z}(x)| < |\Delta|, \end{cases} \quad (28)$$

其中 $\Delta = \omega - \Omega$. 引入 $\beta = \pi/2 - \alpha$, 将(28)式带入(27)式并利用 $\bar{Z}(x) = \bar{R}(x) e^{i\bar{\theta}(x)}$, 可以得到

$$\bar{R}(x) e^{i\bar{\theta}(x)} = e^{i\varphi} \int dx' G(x - x') e^{i\bar{\theta}(x')} H(x'), \quad (29a)$$

其中

$$H(x') = \frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 - \bar{R}^2(x')}}{\bar{R}(x')}. \quad (29b)$$

(29)式与自洽方法得到的方程(13)完全一致, 这说明只要系统达到稳定定态, OA方法与KB自洽方程的方法得到的结果是一致的. 而上述的OA降维方法更具一般性, 可以用于讨论含时奇异态的情形.

3 复杂网络上的奇异态及鲁棒性

3.1 复杂网络上的奇异态

自Strogatz和Watts关于小世界网络上的动力学与同步开创性研究以来, 复杂网络上的动力学就一直是研究的热点. 研究表明, 振子之间连接的拓扑结构对整体动力学的涌现有很大的影响. 在发现奇异态的最初几年里, 人们的焦点集中于规则格点结构. 在规则格点上, 人们发现, 相干结构和非相干结构通常是各自相连的, 两种态之间有着清晰的边界. 一个很重要的问题就是, 如果振子之间的拓扑链接是复杂网络, 特别是典型的小世界或无标度链接情况下, 我们是否能够观察到奇异态的存在? 若有的话, 网络上的奇异态是什么样?

需要指出的是, 网络上的奇异态研究更多地集中于与神经动力学密切相关的可激发网络^[27-36], 这主要是因为神经网络以及相关应用研究很长时间以来已有相当积累. 可激发单元动力学可以采用Hodgkin-Huxley, FitzHugh-Nagumo, Integrate-and-fire等典型的模型来描述. 可激发网络的奇异态研究多关注于耦合的各种不同机制带来的效应, 这是由于神经网络的拓扑特征本来就是相对清楚的, 而可激发单元之间的耦合函数是一个非常重要的因素. 一方面, 可激发单元之间的耦合以化学或电耦合为主, 这也是研究工作中涉及最多的情形, 而近年来人们还研究了与磁相关的耦合, 发现了一些新的效应; 另一方面, 不同的耦合机制本身就有的局域的, 有的是全局的. 人们还经常考虑神经元耦合的时滞效应.

Zhu等人^[37]首次真正研究了复杂网络上的奇异态, 特别是关注于典型网络拓扑特征对奇异态的影响. 考虑如下网络上的耦合相振子系统:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N G_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha), \quad (30)$$

这里不失一般性仍然取 $\omega = 0$, 相移 $\alpha \in (0, \pi/2)$ 且略小于 $\pi/2$. G_{ij} 为耦合函数, 它依赖于振子 i, j 之间的最短

路径长度 d_{ij} , 这里采用如下的指数函数:

$$G_{ij} = A \exp(-\kappa d_{ij}), \quad (31)$$

其中 κ 为耦合衰减系数. 当 $\kappa = 0$ 时, 上述系统回到有阻挫($\alpha \neq 0$)的Kuramoto模型.

不同于规则网格或者连续空间, 复杂网络一般不存在空间概念, 在复杂网络上辨别奇异态需要非平庸的定义. 在规则网络格点上, 奇异态的相干与非相干区域是相连的, 二者之间有清晰的边界. 网络上则不存在这样的界面, 要观察到相干集团, 需要对节点振子进行重新排序. 这里我们按振子平均频率的升序来排列相应指标, 即 $i \geq j$, 如果 $|\langle \omega_i \rangle| \geq |\langle \omega_j \rangle|$. 在相同频率时, 取最大度节点指标为 $i=1$, 其他节点按离最大度节点的距离由大到小排列, 相同距离的节点振子则再按格点度由大到小排列. 定义振子 i 的平均频率

$$\langle \omega_i \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{\theta}_i(t) dt, \quad (32)$$

及相速度平均涨落

$$\sigma_i^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\dot{\theta}_i - \langle \omega_i \rangle)^2 dt. \quad (33)$$

图4给出了对于Erdos-Renyi随机网(ERN)(图4(a)-(c))和无标度网络(SFN)(图4(d)-(f))两种网络结构在振子数 $N=1024$, 相移 $\alpha = \pi/2 - 0.1$, $A = 1$, $\kappa = 0.1$ 时计算得到的振子瞬时相位、平均频率 $\langle \omega \rangle$ 和相速度涨落的排布, 其中序号按上述的定义来重新排布. 对于ERN, 节点度分布符合泊松分布 $P(k) = \langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle} / k!$, 这里 $\langle k \rangle$ 为平均度. 对SFN, 取Albert-Barabasi类型的幂律分布 $P(k) \propto k^{-\mu}$, 其中 μ 为幂律指数. 对两种网络, 平均度均取为 $\langle k \rangle = 4$. 可以明显看到, 对于ERN和SFN, 在采用新序号后, 网络上的振子均分为相干(同步)和非相干(非同步)两个集团, 其中处于相干态的一部分振子几乎同相演化(图4(a)), 平均频率相等(图4(b)), 且涨落很小(图4(c)); 存在一个界面 i_0 , 在 $i = i_0$ 处振子分为两个集团, $i > i_0$ 部分的振子相互之间不同步, 相位呈现混乱分布, 且涨落很大. 这是典型的奇异态斑图. 这种有序和无序共存的斑图在原始网络上由于混杂排布而难以观察到, 而在新序号下可以清晰地展示出来, 也揭示出振子之间相互影响的规律.

有趣的是, 尽管ERN与SFN在网络拓扑特征上有

图 4 (a)–(c) ER随机网络上振子的瞬时相位、平均频率、相速度涨落分布. (d)–(f) 无标度网络上振子的瞬时相位、平均频率、相速度涨落分布. 网络的平均度为 $\langle k \rangle = 4$. 改编自文献[37]

Figure 4 (a)–(c) The snapshots of the phase profile of oscillators, the effective averaged frequencies of oscillators, the fluctuation of the instantaneous frequency of oscillators σ respectively for ERNs. (d)–(f) The snapshots of the phase profile of oscillators, the effective averaged frequencies of oscillators, the fluctuation of the instantaneous frequency of oscillators σ respectively for SFNs. The average degree of networks are $\langle k \rangle = 4$. Adapted figure with permission from ref. [37].

很大的差异, 由图4给出的奇异态却表现出相似的特征. 其次, 研究表明, 奇异态是系统唯一的动力学态, 与初始条件无关. 这跟以往讨论的规则网络上与整体同步态等共存的奇异态形成鲜明对比, 规则网络中的奇异态并不唯一, 且只占有部分测度. 这与网络中节点拓扑结构的分布性密切相关. 再次, 随机网与无标度网络表现的奇异态还是有不同之处的, 对前者, 网络中所有振子都有相同的概率进入到相干集团, 而无标度网络中大度的节点更易处于相干集团.

图5给出了奇异态对相关基本参数如网络的平均度 $\langle k \rangle$ 、非局域耦合衰减系数 κ 、全局耦合强度 A 的依赖关系. 对此, 可定义奇异态的测度为

$$P = N_s / N, \quad (34)$$

其中 N_s , N 分别为处于相干集团的振子数和系统的总振子数. 由图5(a)可见, 奇异态对两类网络的依赖性特征基本相同. 在平均度 $\langle k \rangle$ 较小时, 随 $\langle k \rangle$ 的增加, 奇异态出现, 测度 P 增加且很快饱和; 当 $\langle k \rangle$ 很大时, $P \rightarrow 1$ (整体同步), 但增长缓慢. 图5(b)表明, 非局域耦合衰减系数 κ 的增加会使得耦合局域性增强, 不利于奇异态的出现, κ 很大时, $P \rightarrow 0$, 系统的奇异态会消失.

图 5 (网络版彩图)处于相干态的振子比例 P 与网络平均度 $\langle k \rangle$ (a)、非局域耦合衰减系数 κ (b)、全局耦合强度 A (c)的依赖关系, 其中空心方块和空心圆分别为ER随机网络和AB无标度网络的结果. 改编自文献[37]

Figure 5 (Color online) The dependence of the size of the coherent group P on the average degree $\langle k \rangle$ (a), the strength of the nonlocal coupling κ (b), and the global coupling strength A (c) for ERNs (square) and SFNs (circle), respectively. Adapted figure with permission from ref. [37].

由图5(c)可以看出, 整体耦合强度 A 只要不是特别小, 它对奇异态的测度几乎没有影响.

3.2 奇异态对网络结构随机扰动的鲁棒性

奇异态在特定的条件和参数空间下是稳定的, 系统在扰动或不确定的情况下, 仍能维持它们的特征行为的特性称为鲁棒性. 当系统偏离奇异态存在条件或者系统存在噪声时, 奇异态是否仍能出现并维持稳定的时空斑图? 人们在实验中能够成功观察到奇异态的存在, 这本身就可以验证其对环境噪声具有一定的鲁棒性. 目前奇异态的相关计算研究和理论分析大部分基于规则的非局域耦合模型, 这种对称性破缺现象在规则的网络结构中是很普遍的, 系统网络结构的随机扰动会对奇异态产生怎样的影响是一个非常值得关注的问题, 探索奇异态对振子网络结构的鲁棒性能使我们更好地理解奇异态的性质及行为. Yao等人^[38]最近通过删除网络中一定比例的连边探讨了奇异态对网络

结构随机扰动的鲁棒性, 发现奇异态在统计概率意义上仍能维持其形态. 这意味着对于给定的删边概率 p , 在随机删边后产生的大量新网络中会剩下一定比例的网络构型仍可存在奇异态, 而其他构型则不能满足奇异态的存在条件. 这说明奇异态现象对网络结构随机删边的鲁棒性非常强, 即使网络有大量的边被移除, 奇异态仍能以有限大小的概率存在, 且奇异态存在概率随着删边概率的增加具有相变行为.

以下采用一维 N 个环状非局域耦合相振子为研究模型来说明上述结论, 其动力学方程可写成

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x_i, t) &= \omega - \frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^N c_{ij} G(x_i - x_j), \\ \sin[\phi(x_i, t) - \phi(x_j, t) + \alpha], \end{aligned} \quad (35)$$

其中 $\phi(x_i, t)$ 表示位于 t 时刻空间位置 x_i 处的振子的相位. 与方程(30)不同, 这里引入了空间位置 $x \in [-\pi, \pi]$, 系统采用周期边界条件. 不失一般性设 $\omega = 0$, 相移 α 略小于 $\pi/2$. 耦合函数 $G(x_i - x_j)$ 决定了位于不同空间位置的振子之间的非局域耦合, 这里采用式(4)的形式. $C = \{c_{ij}\}$ 为 $N \times N$ 邻接矩阵, 表示振子之间的网络链接拓扑. 若振子 i, j 之间有连接, 则 $c_{ij} = 1$, 否则 $c_{ij} = 0$.

为了研究奇异态对网络结构的随机扰动的鲁棒性, 我们随机删除振子之间的连边, 设删边概率为 p . 当 $p = 0$ 即无删边时, 系统处于全连接非局域耦合结构下, 在特定的初值条件下奇异态一定会出现, 如图6(a)和(b)所示, 其中(a)为典型的奇异态的瞬时相位 ϕ 的分

布, (b)为振子瞬时角速度 $v = \dot{\phi}$ 的分布. 当删边概率 p 从0逐渐增加时, 振子之间规则的耦合结构被破坏, 在某种程度上会影响奇异态的稳定性. 图6(c)和(d)为 $p = 0.8$ 时的相位 ϕ 和角速度 v 的瞬时分布图. 可以观察到, 由于删边概率 $p = 0.8$ 很大, 振子的同步区域(相干区域)消失, 意味着奇异态在一定程度上被破坏.

利用Kuramoto-Battogtokh自治方程可以对复杂网络奇异态问题进行理论分析. 对于复杂网络上即包含邻接矩阵 $\{c_{ij}\}$ 的振子系统, 可以类似引入如下的复数序参量 Z 来刻画系统的集体动力学行为:

$$Z(x_i) \equiv R(x_i) e^{i\theta(x_i)} = \frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^N c_{ij} G(x_i - x_j) e^{i\phi(x_j)}, \quad (36)$$

其中 $\theta = \phi - \Omega t$. 由自治理论可以得到如下的自治方程

$$\begin{aligned} R(x_i) e^{i\theta(x_i)} &= e^{i\psi} \frac{2\pi}{N}, \\ \sum_{j=1}^N c_{ij} G(x_i - x_j) e^{i\theta(x_j)} H(x_j), \end{aligned} \quad (37a)$$

这里

$$H(x_j) = \left[\Delta - \sqrt{\Delta^2 - R^2(x_j)} \right] / R(x_j). \quad (37b)$$

在自治方程中有三个未知量 $R(x)$, $\theta(x)$ 和 Δ , 可以通过数值迭代方法得到确定解. 方程(37)可以写成实部和虚部两个方程, 第三个方程由 $\theta(x)$ 的方程给出. 由于 $\theta(x) \rightarrow \theta(x) + \theta_0$ 变换下方程(37)的不变性, 因此可以任意设置 $\theta(x)$ 值, 通常设 $\theta(0) = 0$, 再加上(37)式的

图6 奇异态在不同删边概率 p 下的相位和角速度 $v = \dot{\phi}$ 的瞬时分布图. (a) $p=0$ 时的振子相位; (b) $p=0$ 时振子的角速度 v ; (c) $p=0.8$ 时的振子相位; (d) $p=0.8$ 时振子角速度 v . 这里参数 $N=256$, $\alpha=1.39$, $A=0.995$. 改编自文献[38]

Figure 6 Snapshots of the chimera state in the space for different link removal probabilities p . (a) The spatial distributions of the phase variable ϕ for the link removal probability $p=0$; (b) the phase velocity $v(x)$ obtained from direct numerical integration of eq. (1) for $p=0$; (c) the spatial distributions of ϕ for $p=0.8$; (d) the phase velocity $v(x)$ for $p=0.8$. Parameters are chosen as $N=256$, $\alpha=1.39$, $A=0.995$. Adapted figure with permission from ref. [38].

复方程(两个实方程)就可以数值解出自治方程中的三个未知量.

图7所示为序参量模 R 在不同的删边概率 p 下动力学方程的数值模拟结果和自治方程的计算结果. 数值模拟计算是指直接利用方程(35)对多振子系统的动力学进行模拟, 同时利用(36)式定义的序参量计算出 R , 记为 R_s , 并与利用自治方程(37)计算得到的序参量 R_t 加以对比. 从图7(a)和(c)中可以看出, 当 $p=0$ 时, R 呈光滑的类似余弦函数形状, 其中 $R_s > |\Delta|$ 部分对应于系统的同步区域, 而 $R_s < |\Delta|$ 部分对应系统的漂移区域. 当 $p=0.8$ 时, 系统的耦合结构对称性被破坏, 奇异态的同步区域消失, 序参量模 R 由光滑的曲线变为散点, 并且无法明显地区分同步区域与漂移区域.

当删边概率 p 为某个定值时, 一个无限大的网络会有无穷种可能的结构构型, 对于有限大尺寸的现实网络在随机删边后也存在大量的结构构型. 由于网络结构的随机性, 我们从统计的角度刻画奇异态的存在性. 当 $p > 0$ 时, 可以选取奇异态出现概率 $F(p)$ 作为统计量, 通过 $F(p)$ 与删边概率 p 的函数关系来探讨奇异态对网络结构随机扰动的鲁棒性.

在理论分析奇异态统计量 $F(p)$ 与删边概率 p 的函

数关系时, 可以通过计算自治方程(37)满足同步区域序参量模 R 与实数 Δ 的关系. 用以上规则观察奇异态的涌现, 逐渐增加删边概率 p . 对于给定的删边概率 p , 系统会存在大量的网络构型, 设每个 p 值可以构造 N_s 个随机删边的网络构型. 可以定义变量

$$e_v = |\min[v(x)]| / \varepsilon, \quad (38)$$

其中 $v(x)$ 是 x 位置振子的角速度, 通过对方程(35)数值求解可得; 其次, 每个振子与其近邻的 $2d$ 个(左右各 d 个)振子形成一个 $2d+1$ 集团, 在判断奇异态存在与否时, 要求存在大于1小于 N 个振子在这些振子所在的 $2d+1$ 的集团中, 任意两个振子之间的相位角速度差小于 e_v ; 同时, 在系统的动力学演化数值模拟过程中, 在除去暂态后, 观察同步区域的振子一段时间内(如数值工作中用最后1000步), 要求同步区域的振子在该期间一直保持同步状态, 即奇异态保持稳定. 当以上条件满足时, 则奇异态出现并保持稳定. 在此基础上进一步统计每一个网络构型的奇异态是否稳定, 以确定存在概率 $F(p)$.

图8给出了 $N_s = 1000$ 及两个不同 ε 值的结果. 由于在计算 $F(p)$ 过程中需要大量统计, 我们可以选择一些

图7 (网络版彩图)不同删边概率 p 下序参量模 R 及实数 Δ 的分布图. (a)和(b) 利用方程(35)模拟并直接利用序参量公式(36)计算的序参量 $R_s(x)$ 的分布, 红色为 Δ 值; (c)和(d) 利用理论推出的自治方程(37)计算的序参量 $R_t(x)$ 的分布图, 红色水平线为 Δ 值. 上方两幅图和下方两幅图分别对应于删边概率 $p=0$ 和 $p=0.8$. 其他参数为 $N=256$, $\alpha=1.39$, $A=0.995$. 改编自文献[38]

Figure 7 (Color online) The spatial distribution of the order parameter $R(x)$ and the real parameter Δ for different link removal probabilities p . (a) and (b) The order parameter $R_s(x)$ and the real parameter Δ obtained by simulating eq. (35) and computing through the definition (36) with the red line being the value of the parameter Δ ; (c) and (d) The same as (a) and (b) while obtained by solving the self-consistency eq. (37). The upper and lower two subfigures are results for $p=0$ and $p=0.8$, respectively. Other parameters are $N=256$, $\alpha=1.39$, $A=0.995$. Adapted figure with permission from ref. [38].

图 8 (网络版彩图) 奇异态存在概率 $F(p)$ 随删边概率 p 的变化曲线. 在数值和理论计算中, 对每个固定 p 均生成 1000 个随机网络构型, 其中空心圆是自洽方程的结果, 红色方形和蓝色三角形分别是参数 $\varepsilon=4$ 和 $\varepsilon=14$ 的数值模拟结果. 其余参数分别为: (a) $d=4$, $N=64$; (b) $d=8$, $N=128$; (c) $d=12$, $N=192$; (d) $d=16$, $N=256$. 改编自文献[38]

Figure 8 The probability of the emergence of chimera states $F(p)$ as a function of the link removal probability p . Theoretically and numerically, the probability F is obtained by randomly producing 1000 networks with different configurations but with the same link-removal probability p . Then the fraction of network configurations permitting chimera states can be obtained by checking the dynamics. In all figures the open circles stand for the result from the self-consistency equation, and the squares and blue triangles correspond to the numerical results for $\varepsilon=4$ and $\varepsilon=14$, respectively. Other parameters are chosen as (a) $d=4$, $N=64$; (b) $d=8$, $N=128$; (c) $d=12$, $N=192$; (d) $d=16$, $N=256$. Adapted figure with permission from ref. [38].

经验参数探测奇异态的存在性. 对不同尺寸大小的系统, 选取相应比例的 d 值. 在数值模拟中, ε 分别取 4 (方形) 和 14 (三角形), 因此动力学方程的数值模拟结果 $F(p)$ 具有一定的范围, 但是这种选择并不影响结论. 当 p 从 0 开始增加时, 可以看到 $F(p)$ 从 1 开始减小. 另外从计算结果可看出, 对于振子数目很大的系统, 即使 p 取较大的值如 $p > 0.2$, 仍会有大量的网络构型能够使得奇异态存在, 可得到 $F(p) > 0.8$. 该观察结果说明奇异态对网络结构的随机扰动具有一定的鲁棒性. 图 8 的灰色区域为 $F(p)$ 在两个参数下构成的区域. 在理论分析上, 我们对随机删边系统的自治方程进行统计计算, 理论预测 $F(p)$ 随 p 的变化曲线如图 8 中的空心圆连线所示, 设理论曲线位于数值结果范围的中心位置, 进一步说明了上述结论的准确性.

通过数值模拟以及极限条件下的 Ott-Antonsen 方法, Yao 等人^[38] 进一步研究了非局域耦合全同振子的

时空斑图. 对于不同删边概率 p , 可以发现一个非常有趣的现象: 无论奇异态是否存在, 系统均有类似呼吸子的时空演化. 与此同时, 系统振子被划分为两个区域: 强相干区域和弱相干区域. 尽管大量的网络边被移除, 奇异态已经不存在, 但这种奇特的呼吸子仍能保持其时空特性. 这也暗示着该呼吸子斑图在时空演化的过程中具有一定的普遍性和鲁棒性, 而奇异态是其强相干区域恰为同步态或锁相态的特殊形态.

4 奇异态时空斑图及其实验研究

以下介绍一下相关的研究拓展和实验研究. 从非线性动力学角度来看, 奇异态本质上是一类特殊的时空斑图. 在研究奇异态斑图动力学过程中, 人们主要是基于数值计算. 实际上, 奇异态的涌现研究模型不仅局限于 Kuramoto 相振子系统, 在 Landau-Stuart 与

Ginzburg-Landau系统^[39-41], 混沌映射、Rossler、Lorenz等振子系统^[42-45]中均能发现奇异态. Landau-Stuart和Ginzburg-Landau方程是物理学中研究各种集体动力学的典型的非线性动力学方程, 在弱耦合的作用下可以简化到Kuramoto相振子模型. 对于一些简单的模型, 我们可以利用第2节的相关理论来加以讨论. 对于一般的系统则需借助于数值计算. 另外, 可以通过实验来加以研究.

随着奇异态研究的逐渐深入, 满足其出现的耦合系统越来越普遍, 拓宽了奇异态的生存条件, 并且在实验上能更容易观察到奇异态. Omelchenko等人^[42]在讨论非局域耦合混沌映射系统在相干态过渡到非相干态的动力学过程中发现了类似奇异态的现象. 在二维平面的非局域耦合Rossler振子系统^[43]中, 也同样观察到了螺旋波奇异态. 在实际生活中, 半脑睡眠的现象与奇异态非常相似, 因此脑神经中是否存在奇异态是非常值得研究的. 在神经元的振子系统中, 如FHN振子系统、Hodgkin-Huxley系统等^[44,45]均发现了奇异态的存在. 这些研究工作说明了这种对称性破缺的现象在脑科学中是非常普遍的.

4.1 二维奇异态斑图

奇异态不仅可以在空间一维系统中观察到, 在二维平面^[46,47]、圆环面(torus)^[48,49]与三维球面^[50]上人们均发现了这种有趣的现象. Kuramoto等人^[51]研究了如下的二维相振子系统:

$$\dot{\phi}(\vec{r}, t) = \omega - \int_{\mathbb{R}^2} G(\vec{r}, \vec{r}') \sin[\phi(\vec{r}, t) - \phi(\vec{r}', t) + \alpha] d\vec{r}'. \quad (39)$$

对于系统(39)式, Kuramoto等人发现在二维晶格上存在一种特殊的螺旋波, 该波的核由相位随机的非相干振子组成, 而波核被相干振子形成的波臂所环绕, 如图9(a)和(b)所示, 其中图9(b)为螺旋波核心部分的放大. 对于这种二维晶格情况, 人们还发现了点状和条纹状奇异态. 当采取二维环面时, 人们仍然可以观察到奇异态, 如图9(c)和(d)所示, 其中图9(c)用环面来展示, 而图9(d)将其铺到平面来展示, 我们均可以很清楚地看到有序态和有序态(散点)的共存.

4.2 多团簇奇异态

以上研究的奇异态均为一个相干区域与一个非相干区域的共存, 而实际上随着条件的改变, 完全可能观

图9 (a)和(b) 二维晶格上的一种特殊螺旋波, 其核由非相干振子态组成, 而波核被相干振子形成的波臂所环绕; 其中图(b)为螺旋波核心部分的放大. (c)和(d) 在二维环面上的奇异态, 其中(c)用环面展示, (d)用平面展示, 散点区域为无序态, 而颜色均匀区域为有序态. 改编自文献[51]

Figure 9 (a) and (b) A chimera spiral wave on a two-dimensional lattice, where the kernel is composed of incoherent oscillators that are surrounded by arms composed of coherent oscillators; subfigure (b) is an enlargement of the kernel part of (a). (c) and (d) Chimera states on a two-dimensional torus. Panel (a) displays the torus pattern, and panel (d) displays a two-dimensional projection. The scattered regions correspond to incoherent parts, and the homogeneous regions are coherent parts. Adapted figure with permission from ref. [51].

察到多团簇奇异态即多相干区域与非相干区域共存态的涌现^[52-54]. Sethia等人^[52]发现相位耦合中引入时滞可以出现多团簇奇异态, 研究的模型方程为如下的时滞一维方程:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \omega - \int_{-L}^L G(x - x') \times \sin[\phi(x, t) - \phi(x', t - \tau_{x, x'}) + \alpha] dx', \quad (40)$$

其中 $\tau_{x, x'}$ 表示空间 x 和 x' 处振子之间的延迟时间. 在周期边界条件下, 如果耦合函数是时滞 τ 和空间距离 $|x - x'|$ 的指数衰减型函数, 则可以发现多团簇奇异态, 如图10所示, 可以看到四个相干、非相干区的结构, 相邻的相干区域振子之间的相位差为 π . 除了时滞可以引起多团簇效应以外, 其他因素如特殊的初始相位分布、不同的相移因子 α 及其特殊形式的非局域耦合函数 $G(x - x')$ 等均可产生多团簇奇异态, 应该说这是一种奇异态的高级分岔. 系统如何经历不同分岔产生多重奇异态的机制目前尚未有一般性的研究.

图 10 (网络版彩图)具有耦合时滞系统的多团簇奇异态. (a) 振子相位的时间演化, 横轴为空间位置, 纵轴为时间, 不同颜色表示不同值; (b) 某一时刻振子相位的空间分布, 可以看到多处地方相位的无序排布. 系统参数为 $\tau_{x,x}=1.0$, $\omega=1.1$, $\alpha=0.9$. 改编自文献[52]

Figure 10 (Color online) Multiple cluster chimera states with time-delay. (a) The space-time plot of the oscillator phases ϕ by evolving from a random set of initial phases. (b) A snapshot of the spatial distribution of the phase. The parameters are chosen as $\tau_{x,x}=1.0$, $\omega=1.1$ and $\alpha=0.9$. Adapted figure with permission from ref. [52].

4.3 奇异态的实验研究

奇异态问题近年来也得到了大量的相关实验研究^[55-63]. 奇异态的理论分析和数值模拟表明, 奇异态是可以存在的, 但是需要一些严格的条件, 如特定的初始值等, 这使得奇异态看上去对系统的扰动十分敏感, 因此实际生活中能否观察到奇异态的现象仍然是需要解决的问题. 2012年, 光学实验和化学实验两个成功的实验首次证明了奇异态确实能够在实际中观察到. 在光学实验中, 设计了能实现混沌映射的装置, 并成功地观察到之前理论模拟的现象, 如图11所示的一维(a)和二维(b)奇异态^[55]. 在化学实验中, 他们通过Belousov-Zhabotinsky反应的装置也实现了两个子系统的奇异态^[56,58].

以上两个实验均需要计算机控制反馈数据, 而近期一个机械实验^[59]只需要机械耦合就能实现奇异态. 在该实验中, 仅需要两个能在平面上自由移动的摇摆, 每个摇摆上放置N个全同的节拍器, 两个摇摆用一个弹簧连接, 这个机械实验装置满足了两个子系统涌现奇异态的要求, 即在同一个子系统里振子的耦合强度相同并且比与另一个系统振子的耦合强度大. 此外, 还有其他一些成功观察到奇异态的实验, 如二维平面的化学实验、电子实验、光电化学实验、量子点激光实验等.

5 总结

以上我们对近年来关于奇异态研究特别是与网络

图 11 (网络版彩图)对奇异态的光学实验观察, 实验中设计了能实现混沌映射的耦合映射格子(CML)装置, 并成功观察到理论模拟的现象. (a) 一维光学CML装置($N=256$ 个格点)情况下的状态分布图, 从左到右依次为相干态、奇异态和非相干态, 上排为数值模拟, 下排为实验结果. (b) 二维光学CML情况下(128×128 格点)的状态分布图, 从左到右依次为相干态、奇异态和非相干态, 上排为数值模拟, 下排为实验结果. 改编自文献[55]

Figure 11 (Color online) Chimera states observed in optical experiments. The experiment is designed by adopting the coupled map lattice (CML) with chaotic maps as node dynamics. (a) Optically experimental realizations of the one-dimensional CML (A)–(C) ($N=256$); (b) optically experimental realizations of the two-dimensional 128×128 CML (D)–(F) systems. For both (a) and (b), subfigures correspond to coherence, chimera, incoherence states from left to right, respectively. The upper the lower columns are numerical simulations and experimental results, respectively. Adapted figure with permission from ref. [55].

和时空斑图相关的进展做了较为系统的回顾. 奇异态和同步是系统的两个吸引域, 拥有各自的参数空间, 奇异态的稳定性和鲁棒性是非常重要且基本的问题^[64,65], 这也从应用上对我们提出了启示. 对奇异态有效的调控将是未来重要的研究方向之一, 对其研究有重要的应用意义. 对于网络结构扰动的作用, 在研究如何控制奇异态中, 可对振子的动力学采取扰动方式, 使得处于某参数空间或相空间的系统由同步态变到奇异态并能稳定保持.

上述研究奇异态的相关工作也给我们提供了一些新问题, 如奇异态的涌现的条件是什么, 是否在更宽松的条件下仍能发现奇异态? 奇异态涌现的普遍化会使得实验上更容易实现, 因此探索奇异态的存在条件具有非常重要的应用价值, 是一个很有意义的研究方向.

目前大量的关于奇异态的数值计算模拟均采用有限大小且节点耦合较规则的系统. 若在理论分析上能将奇异态的研究扩展到更一般的实际网络中, 如在电力网、基因网络等, 会大幅度提高奇异态的应用范围. 若能成功地在理论上解释奇异态与实际网络的拓扑结构联系, 将会使得这奇妙的动力学行为具有更好的应用前景^[66–72].

如前所述, 可激发网络特别是神经网络一直是奇异态涌现研究的重要热点领域^[73–77]. 奇异态的特殊性

是近年来研究耦合可激发单元集体动力学的一个奇特发现. 生物界中存在很多类似的现象, 如已发现的海洋哺乳动物的“半脑睡眠”等. 出现奇异态的生物机制以及奇异态具有什么样的生物意义将是在物理机制和意义探索之上更有价值的探索, 近一年多以来受到众多的关注.

奇异态在光学、化学、机械等实验中成功的实现也使得奇异态的研究更具有实际意义. 在奇异态发现最初, 若要实现全同振子的奇异态需要的条件十分严格, 包括振子之间的非局域耦合、相位迟滞以及特定的初值. 然而后续的研究中, 这些条件逐渐被放宽, 如相位迟滞可通过时间延迟替代, 非局域耦合的条件也并不是必要的. 因此, 寻求更为一般的奇异态实现条件无论在理论上还是在实际应用和调控方面都将有重要的意义和价值.

参考文献

- 1 Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev Mod Phys*, 2002, 74: 47–97
- 2 Newman M E J. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev*, 2003, 45: 167–256
- 3 Fang J Q, Wang X F, Zheng Z G, et al. New interdisciplinary science: Network science (in Chinese). *Prog Phys*, 2007, 27: 239–343; 361–460 [方锦清, 汪小帆, 郑志刚, 等. 一门崭新的交叉科学: 网络科学. *物理学进展*, 2007, 27: 239–343; 361–460]
- 4 He D R, Liu Z H, Wang B H. *Complex Systems and Networks* (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2009 [何大韧, 刘宗华, 汪秉宏. 复杂系统与复杂网络. 北京: 高等教育出版社, 2009]
- 5 Wang X F, Li X, Chen G R. *Complex Network Theory and Its Application* (in Chinese). Beijing: Tsinghua University Press, 2006 [汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用. 北京: 清华大学出版社, 2006]
- 6 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, 1998, 393: 440–442
- 7 Barabasi A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286: 509–512
- 8 Guo L, Xu X M. *Complex Network* (in Chinese). Shanghai: Shanghai Science and Technology Education Press, 2006 [郭雷, 许晓鸣. 复杂网络. 上海: 上海科技教育出版社, 2006]
- 9 Lu J A, Liu H, Chen J. *Synchronization in Complex Dynamical Networks* (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2016 [陆君安, 刘慧, 陈娟. 复杂动态网络的同步. 网络科学与工程丛书. 北京: 高等教育出版社, 2016]
- 10 Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys Rep*, 2006, 424: 175–308
- 11 Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. New York: Cambridge University Press, 2001
- 12 Strogatz S. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Penguin: Hyperion, 2003
- 13 Zheng Z G. *Spatiotemporal Dynamics and Cooperative Behavior of Coupled Nonlinear Systems* (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2004 [郑志刚. 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为. 北京: 高等教育出版社, 2004]
- 14 Zheng Z G. *Emergent Dynamics of Complex Systems: From Synchronization to Collective Transport* (in Chinese). Beijing: Science Press, 2019 [郑志刚. 复杂系统的涌现动力学: 从同步到集体输运. 北京: 科学出版社, 2019]
- 15 Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, et al. Synchronization in complex networks. *Phys Rep*, 2008, 469: 93–153, arXiv: 0805.2976
- 16 Yao N, Zheng Z. Chimera states in spatiotemporal systems: Theory and applications. *Int J Mod Phys B*, 2016, 30: 1630002
- 17 Rodrigues F A, Peron T K D, Ji P, et al. The Kuramoto model in complex networks. *Phys Rep*, 2016, 610: 1–98, arXiv: 1511.07139
- 18 Umberger D K, Grebogi C, Ott E, et al. Spatiotemporal dynamics in a dispersively coupled chain of nonlinear oscillators. *Phys Rev A*, 1989, 39:

4835–4842

- 19 Kuramoto Y, Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonl Phenom Complex Syst*, 2002, 5: 380–385. , arXiv: [cond-mat/0210694](#)
- 20 Abrams D M, Strogatz S H. Chimera states for coupled oscillators. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 174102
- 21 Abrams D M, Strogatz S H. Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators. *Int J Bifurc Chaos*, 2006, 16: 21–37
- 22 Sieber J, Omel'chenko O E, Wolfrum M. Controlling unstable chaos: Stabilizing chimera states by feedback. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 054102, arXiv: [1310.7560](#)
- 23 Laing C R. The dynamics of chimera states in heterogeneous Kuramoto networks. *Phys D-Nonlin Phenomen*, 2009, 238: 1569–1588
- 24 Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Berlin: Springer-Verlag, 1984
- 25 Acebrón J A, Bonilla L L, Pérez Vicente C J, et al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev Mod Phys*, 2005, 77: 137–185
- 26 Ott E, Antonsen T M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos*, 2008, 18: 037113, arXiv: [0806.0004](#)
- 27 Santos M S, Szezech J D, Borges F S, et al. Chimera-like states in a neuronal network model of the cat brain. *Chaos Solitons Fractals*, 2017, 101: 86–91, arXiv: [1609.01534](#)
- 28 Tsigkri-DeSmedt N D, Hizanidis J, Schöll E, et al. Chimeras in leaky integrate-and-fire neural networks: effects of reflecting connectivities. *Eur Phys J B*, 2017, 90: 139, arXiv: [1610.09415](#)
- 29 Majhi S, Perc M, Ghosh D. Chimera states in a multilayer network of coupled and uncoupled neurons. *Chaos*, 2017, 27: 073109, arXiv: [1707.05510](#)
- 30 Schmidt A, Kasimatis T, Hizanidis J, et al. Chimera patterns in two-dimensional networks of coupled neurons. *Phys Rev E*, 2017, 95: 032224, arXiv: [1701.00342](#)
- 31 Semenova N, Zakharova A, Anishchenko V, et al. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements. *Phys Rev Lett*, 2016, 117: 014102, arXiv: [1512.07036](#)
- 32 Hizanidis J, Kouvaris N E, Zamora-López G, et al. Chimera-like states in modular neural networks. *Sci Rep*, 2016, 6: 19845, arXiv: [1510.00286](#)
- 33 Bolotov M I, Osipov G V, Pikovsky A. Marginal chimera state at cross-frequency locking of pulse-coupled neural networks. *Phys Rev E*, 2016, 93: 032202, arXiv: [1512.02811](#)
- 34 Majhi S, Ghosh D. Alternating chimeras in networks of ephaptically coupled bursting neurons. *Chaos*, 2018, 28: 083113, arXiv: [1809.02442](#)
- 35 Kasimatis T, Hizanidis J, Provata A. Three-dimensional chimera patterns in networks of spiking neuron oscillators. *Phys Rev E*, 2018, 97: 052213, arXiv: [1801.05226](#)
- 36 Chouzeouris T, Omelchenko I, Zakharova A, et al. Chimera states in brain networks: Empirical neural vs. modular fractal connectivity. *Chaos*, 2018, 28: 045112, arXiv: [1710.08219](#)
- 37 Zhu Y, Zheng Z, Yang J. Chimera states on complex networks. *Phys Rev E*, 2014, 89: 022914
- 38 Yao N, Huang Z G, Lai Y C, et al. Robustness of chimera states in complex dynamical systems. *Sci Rep*, 2013, 3: 3522
- 39 Omel'chenko O E, Maistrenko Y L, Tass P A. Chimera states: the natural link between coherence and incoherence. *Phys Rev Lett*, 2008, 100: 044105
- 40 Sethia G C, Sen A. Chimera states: The existence criteria revisited. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 144101, arXiv: [1312.2682](#)
- 41 Zakharova A, Kapeller M, Schöll E. Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 154101, arXiv: [1402.0348](#)
- 42 Omelchenko I, Maistrenko Y, Hövel P, et al. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 234102, arXiv: [1102.4709](#)
- 43 Gu C, St-Yves G, Davidsen J. Spiral wave chimeras in complex oscillatory and chaotic systems. *Phys Rev Lett*, 2013, 111: 134101
- 44 Omelchenko I, Omel'chenko O E, Hövel P, et al. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: patched synchrony or multichimera states. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 224101, arXiv: [1212.3190](#)
- 45 Yeldesbay A, Pikovsky A, Rosenblum M. Chimeralike states in an ensemble of globally coupled oscillators. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 144103, arXiv: [1402.4328](#)
- 46 Shima S I, Kuramoto Y. Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators. *Phys Rev E*, 2004, 69: 036213
- 47 Martens E A, Laing C R, Strogatz S H. Solvable model of spiral wave chimeras. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 044101, arXiv: [0910.5389](#)

- 48 Omel'chenko O E, Wolfrum M, Yanchuk S, et al. Stationary patterns of coherence and incoherence in two-dimensional arrays of non-locally-coupled phase oscillators. *Phys Rev E*, 2012, 85: 036210
- 49 Panaggio M J, Abrams D M. Chimera states on a flat torus. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 094102, arXiv: 1211.2021
- 50 Panaggio M J, Abrams D M. Chimera states on the surface of a sphere. *Phys Rev E*, 2015, 91: 022909, arXiv: 1405.2047
- 51 Kuramoto Y, Shima S, Battogtokh D, et al. Mean-field theory revives in self-oscillatory fields with non-local coupling. *Prog Theor Phys Suppl*, 2006, 161: 127–143
- 52 Sethia G C, Sen A, Atay F M. Clustered chimera states in delay-coupled oscillator systems. *Phys Rev Lett*, 2008, 100: 144102, arXiv: 0803.3491
- 53 Zhu Y, Zheng Z G, Yang J Z. Four-cluster chimera state in non-locally coupled phase oscillator systems with an external potential. *Chin Phys B*, 2013, 22: 100505
- 54 Zhu Y, Zheng Z, Yang J. Reversed two-cluster chimera state in non-locally coupled oscillators with heterogeneous phase lags. *Europhys Lett*, 2013, 103: 10007
- 55 Hagerstrom A M, Murphy T E, Roy R, et al. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. *Nat Phys*, 2012, 8: 658–661
- 56 Tinsley M R, Nkomo S, Showalter K. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators. *Nat Phys*, 2012, 8: 662–665
- 57 Viktorov E A, Habruseva T, Hegarty S P, et al. Coherence and incoherence in an optical comb. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 224101
- 58 Nkomo S, Tinsley M R, Showalter K. Chimera states in populations of nonlocally coupled chemical oscillators. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 244102
- 59 Martens E A, Thutupalli S, Fourrière A, et al. Chimera states in mechanical oscillator networks. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2013, 110: 10563–10567, arXiv: 1301.7608
- 60 Röhm A, Böhm F, Lüdge K. Small chimera states without multistability in a globally delay-coupled network of four lasers. *Phys Rev E*, 2016, 94: 042204, arXiv: 1606.07685
- 61 Hart J D, Bansal K, Murphy T E, et al. Experimental observation of chimera and cluster states in a minimal globally coupled network. *Chaos*, 2016, 26: 094801, arXiv: 1512.01624
- 62 Bick C, Sebek M, Kiss I Z. Robust weak chimeras in oscillator networks with delayed linear and quadratic interactions. *Phys Rev Lett*, 2017, 119: 168301, arXiv: 1705.05812
- 63 Li X W, Bi R, Sun Y X, et al. Chimera states in Gaussian coupled map lattices. *Front Phys*, 2018, 13: 130502
- 64 Malchow A K, Omelchenko I, Schöll E, et al. Robustness of chimera states in nonlocally coupled networks of nonidentical logistic maps. *Phys Rev E*, 2018, 98: 012217
- 65 Sathiyadevi K, Chandrasekar V K, Senthilkumar D V. Stable amplitude chimera in a network of coupled Stuart-Landau oscillators. *Phys Rev E*, 2018, 98: 032301
- 66 Dai Q, Liu Q, Cheng H, et al. Chimera states in a bipartite network of phase oscillators. *Nonlin Dyn*, 2018, 92: 741–749
- 67 Wu Z M, Cheng H Y, Feng Y, et al. Chimera states in bipartite networks of FitzHugh-Nagumo oscillators. *Front Phys*, 2018, 13: 130503
- 68 Kasatkin D V, Yanchuk S, Schöll E, et al. Self-organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings. *Phys Rev E*, 2017, 96: 062211
- 69 Meena C, Murali K, Sinha S. Chimera states in star networks. *Int J Bifurc Chaos*, 2016, 26: 1630023, arXiv: 1509.01093
- 70 Ghosh S, Jalan S. Emergence of chimera in multiplex network. *Int J Bifurc Chaos*, 2016, 26: 1650120, arXiv: 1506.05284
- 71 Bercé V. Explosive synchronization in clustered scale-free networks: Revealing the existence of chimera state. *Eur Phys J Spec Top*, 2016, 225: 7–15
- 72 Panaggio M J, Abrams D M, Ashwin P, et al. Chimera states in networks of phase oscillators: The case of two small populations. *Phys Rev E*, 2016, 93: 012218, arXiv: 1508.02917
- 73 Tian C H, Zhang X Y, Wang Z H, et al. Diversity of chimera-like patterns from a model of 2D arrays of neurons with nonlocal coupling. *Front Phys*, 2017, 12: 128904, arXiv: 1701.05671
- 74 Xu F, Zhang J, Jin M, et al. Chimera states and synchronization behavior in multilayer memristive neural networks. *Nonlin Dyn*, 2018, 94: 775–783
- 75 Majhi S, Bera B K, Ghosh D, et al. Chimera states in neuronal networks: A review. *Phys Life Rev*, 2019, 28: 100–121
- 76 Wei Z, Parastesh F, Azarnoush H, et al. Nonstationary chimeras in a neuronal network. *Europhys Lett*, 2018, 123: 48003
- 77 Tian C, Cao L, Bi H, et al. Chimera states in neuronal networks with time delay and electromagnetic induction. *Nonlin Dyn*, 2018, 93: 1695–1704

Chimera state: From complex networks to spatiotemporal patterns

ZHENG ZhiGang^{1,2*} & ZHAI Yun^{1,2*}

¹ *Institute of Systems Science, Huaqiao University, Xiamen 361021, China;*

² *College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China*

There have been great progresses in recent decades on studies of complex networks. Dynamical processes on complex networks are closely related to numerous phenomena in physics, biology, engineering and even economics, where some common behaviors such as synchronization and collective propagations and diffusions have received persisting interest for interdisciplinary studies. The so-called chimera state, which describes a typical type of spatiotemporal pattern, has been extensively studied in the past ten years. The chimera states demonstrate striking inhomogeneous spatiotemporal patterns emerging in homogeneous systems through unexpected spontaneous symmetry breaking, where the consequent spatiotemporal patterns are composed of both coherence and incoherence domains, respectively characterized by the synchronized and desynchronized motions of oscillators. In this paper, we briefly give an introduction to the phenomena and theories related to studies of chimera states, and discuss the statistical and macroscopic description in terms of Kuramoto self-consistency theory and the Ott-Antonson ansatz. We focus on the emergence of chimera states on complex networks and their robustness. Recent studies on applications and experiments are also discussed.

complex networks, chimera states, synchronization, emergence

PACS: 05.45.Xt, 89.75.Kd, 89.75.-k, 05.45.-a

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0132](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0132)