



# 多状态网络可靠性与韧性评估方法综述

白光晗<sup>1,2</sup>, 张帅<sup>1,2</sup>, 张云安<sup>1,2</sup>, 方依宁<sup>1,2</sup>, 陶俊勇<sup>1,2\*</sup>

1. 国防科技大学智能科学学院, 长沙 410037;

2. 国防科技大学装备综合保障技术重点实验室, 长沙 410037

\* E-mail: taojunyong@nudt.edu.cn

收稿日期: 2023-03-03; 接受日期: 2023-06-20; 网络版发表日期: 2023-07-19

国家自然科学基金面上项目(批准号: 72271242)和湖南省自然科学基金优秀青年项目(编号: 2022JJ20046)资助

**摘要** 为了准确评估复杂系统的可靠性, 通常使用网络拓扑结构模型研究系统在各种情况下稳定运行的能力. 但现实世界中的许多网络不仅存在连通性要求, 还需要传输一定的流量以保证网络具有一定的吞吐量, 该网络被称为多状态网络. 多状态网络可靠性模型广泛应用于现实中的网络系统, 如制造、能源、交通、信息、物流和装备保障、指挥控制和无人集群等. 然而, 不断增长的系统规模与复杂程度, 导致求解多状态网络可靠度愈发困难. 因此, 寻求更加高效的方法来求解网络的可靠度成为迫切需要解决的难点问题. 本文主要对多状态网络可靠性求解算法进行综述, 总结了近年来其效率改善方面的研究进展. 通过有效降低多状态网络可靠性的评估复杂度, 大幅提高该方法的算法效率和可求解网络的规模, 为管理者在多状态网络的设计、建造、运行和维护过程中提供支撑, 确保多状态网络的稳定、可靠运行. 韧性是可靠性的延伸, 是衡量系统对抗扰动并从中恢复的能力, 能够反映系统毁伤及恢复的全过程. 本文进一步讨论了多状态网络韧性评估方法及其进展.

**关键词** 多状态网络, 可靠性, 韧性, 最小路集, 最小割集

## 1 引言

随着科学技术的持续发展, 网络系统的规模与复杂程度呈现爆发式增长, 这使得系统维持长周期、高寿命的可靠运行存在巨大挑战. 一旦系统中单个部件失效或无法保持网络在指定状态下运行, 就可能引发整个网络瘫痪, 进而诱发不可逆后果. 因此, 如何评估网络的可靠性并确保其稳定运行, 已成为一个备受关注的课题. 以电力运输和配送网络为例, 2003年8月14日的北美大断电中, 由于3条输电线路距离树枝太近引发的短路跳闸, 最终造成400条输电线路和261个发电

站的531个发电设备遭到毁坏, 影响了美国和加拿大近5千万人的工作和生活<sup>[1]</sup>. 在北美大断电发生后的一个多月, 意大利也发生了大面积断电, 两条400千伏的高压电线因暴雨中断, 最终导致6400兆瓦的电力供应短缺<sup>[2]</sup>. 此外, 2008年1月中下旬, 我国南方遭遇50年一遇的冰灾, 导致南方多个省份和地区输变电路大范围断线倒塔, 进而引发了大面积停电, 严重影响了人民的生产和生命财产安全. 而2012年的印度大断电是史上规模最大的一次, 共有6亿多人的生产生活受到了影响<sup>[3]</sup>.

为了准确评估复杂系统的可靠性, 研究人员通常

引用格式: 白光晗, 张帅, 张云安, 等. 多状态网络可靠性与韧性评估方法综述. 中国科学: 技术科学, 2023, 53: 1284-1301

Bai G H, Zhang S, Zhang Y A, et al. Survey of multistate network reliability and resilience evaluation methods (in Chinese). Sci Sin Tech, 2023, 53: 1284-1301, doi: 10.1360/SST-2023-0093

使用网络拓扑结构模型研究系统在各种情况下稳定运行的能力. 网络可靠性分类如图1所示, 传统的二态网络模型假设: 网络中节点或边仅存在运行和失效两种状态, 其可靠性描述为网络在规定时间内和规定条件下保持正常运行的能力, 由网络实现连通功能的概率来度量. 然而, 在实际应用中, 许多网络中节点或边表示具有一定物理意义(如距离、流量和时间等)的组件, 这些组件存在多状态特性, 所以此类网络的可靠性不仅需要保证网络连通, 还要求其能够以一定的性能水平运行<sup>[4]</sup>, 此类网络称为多状态网络. 例如, 考虑一个机械系统, 其中节点表示机械组件, 边表示组件间的运行关系. 二态网络模型中的边只存在两种状态, 如“连接”或“断开”. 然而, 这种简化的模型无法充分描述机械系统中组件间的多状态特征、连接的动态性及复杂的相互作用. 相比之下, 多状态网络模型引入了边的多种状态, 以更全面地描述组件间的不同连接情况. 在机械系统中, 边的状态可能包括“连接”、“松动”、“过载”、“摩擦”或“断开”等. 该模型能够更准确地描述机械系统中组件间的连接状态, 并能够捕捉到组件之间的多种相互作用模式, 如力的传递、能量转移与信息交互等<sup>[5]</sup>. 另外, 以制造系统为对象时, 每条边都可被视为一台机器, 每个节点可表示机器后的检测站. 由于缺陷、故障和维护等因素的存在, 制造系统中每台机器(边)的生产能力或所能处理的产品流并不是固定的, 而应该是多状态且随机的. 因此, 制造系统被建模为多状态网络更加合理<sup>[6]</sup>. 综上, 多状态网络模型为研究者们提供了一种更加有效的工具, 以更好地理解和优化系统的行为和性能. 本文重点关注多状态网络中最为普遍的多状态流网络, 即网络中的部件能够传输一定流量, 且整个网络具备一定的吞吐量.

多状态网络的可靠性评估主要依据某种性能指标. 本文重点讨论给定需求的前提下(从源节点到汇聚节点的流量需求, 通常用 $d$ 表示), 网络能够把 $d$ 单位的网络流从源点 $s$ 传输到汇点 $t$ 的概率, 即多状态网络的可靠度 $R(d)$ , 也被称为ST可靠度. ST可靠度在许多领域得到了广泛应用, 包括机械制造系统<sup>[6,7]</sup>、交通运输系统<sup>[8,9]</sup>、油气生产与运输系统<sup>[10]</sup>、电力配送系统<sup>[11]</sup>、物流供应链系统<sup>[12]</sup>和维修保障网络<sup>[13]</sup>等. 比如, 在机械工程领域, Lin和Chang<sup>[6]</sup>将存在返工行为的制造系统建模为多状态网络, 假设每台机器(节点)由于故障或维修可处于多种状态. 随后, 他们又利用模糊

数学针对服装制造系统构建模糊多状态网络进行可靠性分析, 帮助管理者了解系统的需求满足情况<sup>[7]</sup>. 针对高铁列车CRH3转向架构件, Kou等人<sup>[8]</sup>以组件为边、力的传递关系为节点构建多状态网络模型, 探究该构件在特定运行条件下的可靠性, 为转向架系统设计与运维提供指导. Lin等人<sup>[9]</sup>将高速动车组系统抽象为多层多状态网络, 以最小维修单元和三类连接构成不同层的节点和边, 并提出了一种高速动车组多状态网络可靠性评估算法. 在输配电网络中, 输电线为组件, 源节点与汇节点分别代表发电厂与电力消费者, 需求是消费者所需电量, 每个组件的状态由通过输电线发送的功率量表示. 该网络的多状态特征主要体现于: 由于线路损耗导致发热、输电线下垂遭受损坏或长期磨损与不同维护策略的影响, 每个组件可能处于多种性能状态. 与之类似的问题特征增加了网络可靠性分析的难度.

为了确保网络的稳定与可靠运行, 多状态网络可靠性已成为评估网络设计、建造、运行和维护能力的重要指标. 因此, 网络管理者已将其纳入到网络管理流程中. 在网络设计阶段(图2), 基于网络部件的历史失效数据, 管理者在满足成本和时间等限制条件下针对每一个可行的设计方案计算其对应需求下的可靠度, 并从中选出可靠度最高的设计方案.

然而, 不断增长的系统规模与复杂程度, 导致求解

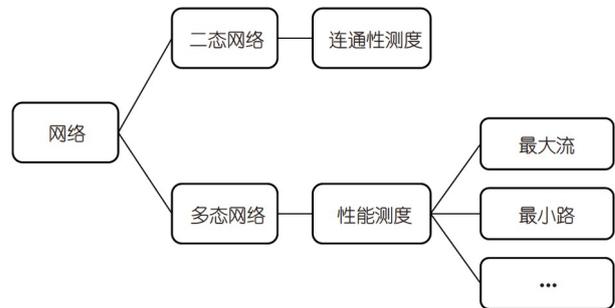


图1 网络可靠性分类  
Figure 1 Network reliability classification.



图2 多状态网络优化设计流程示意图  
Figure 2 Schematic diagram of multi-state network optimization design process.

多状态网络可靠度愈发困难. 理论上求解多状态网络可靠度是“NP-hard”问题<sup>[14]</sup>, 随着网络规模的增加, 其时间呈指数增长. 因此, 寻找能够实现高效求解多状态网络可靠度的算法, 成为当前该领域迫切需要解决的难点问题. 特别在最近十几年, 基于最小路集/割集向量( $d$ -MP/ $d$ -MC)的多状态网络可靠度间接求解方法受到研究者的广泛关注. 一系列针对间接求解法的算法被陆续开发, 使可求解的多状态网络规模有了一定程度上的提升.

除了评估多状态网络可靠性是该领域研究的重点与热点, 在复杂环境中通常要求多状态网络在保持自身可靠、稳定运行的同时, 能够有效抵御干扰并在遭到毁伤后迅速恢复, 将多状态网络可靠性拓展到多状态网络韧性, 也具有重要的理论意义. 韧性是可靠性的延伸, 是衡量系统对抗扰动并从中恢复的能力, 能够反映系统毁伤及恢复的全过程. 近年来, 韧性研究已涉及诸如生态系统网络、基础设施网络、指控系统网络与无人集群系统网络等多个领域. 将韧性作为评价指标纳入多状态网络的设计、建造、运行和维护中, 能够为复杂环境下多状态网络的优化设计和运维管理等提供决策辅助和技术支持, 确保网络持续稳定运行.

本文主要对当前多状态网络可靠性评估算法及其效率提升方面的研究进展进行了总结. 此外, 介绍了多状态网络韧性评估方法及最新进展. 具体安排如下: 第2节对多状态网络可靠性基本概念进行了详细介绍. 第3节主要回顾了计算多状态网络可靠度的各种精确方法, 其中包括直接法与间接法. 第4节综述了包括可靠度边界技术及蒙特卡洛模拟方法在内的多状态网络可靠度近似算法. 第5节介绍了多状态网络韧性及其评估方法. 第6节对多状态网络可靠性与韧性评估方法进行了总结和展望.

## 2 多状态网络可靠性基本概念

本节主要对多状态网络可靠性的基本概念进行介绍, 其中包括状态分布、结构函数、计算复杂性、算法复杂性分析、数据结构与搜索算法等. 特别是讨论了多状态网络的状态分布、计算问题的复杂性分类及其与网络可靠性问题的关系.

### 2.1 假设

为进一步对多状态网络可靠性与韧性评估相关问题进行描述, 并适当简化其建模与分析难度, 本文作了如下一些基本假设.

(1) 多状态网络是相干系统, 即任何一个组件状态的改善都不会使整个网络发生退化<sup>[15]</sup>.

(2) 除源节点和汇节点外的所有节点都满足流守恒定律<sup>[16]</sup>.

(3) 每个组件的容量是一个非负的整数值随机变量, 按照给定的概率分布, 取0到其最大容量的整数值, 且各组件的容量状态在统计上是相互独立的<sup>[17]</sup>.

(4) 网络中没有自环<sup>[18]</sup>.

(5) 网络所有节点都完好, 当节点易发生故障时, 参考文献<sup>[19]</sup>可用于将其转换为完好节点网络.

图3是一个典型的有向两端桥连网络, 该网络由4个节点和6个链接(组件)组成, 节点是完全可靠的, 6条边用 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 表示, 能在不同性能状态下工作, 节点1是源节点, 节点4是汇节点.

### 2.2 状态分布

在多状态网络中, 组件和网络在不同的能力(状态)下工作, “状态分布”用来描述其工作概率. 假设一个组件或网络的最大容量为 $M$ , 共有 $M+1$ 个状态, 用向量 $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_M)$ 表示该组件或网络的状态分布<sup>[20]</sup>. 例如, 表1列出了网络中每个组件的状态分布(如图3所示), 组件 $a_1$ 可处于4种状态, 范围从0到3, 处于0, 1, 2和3状态下工作的概率分别为0.05, 0.1, 0.25和0.6, 其余组件与之类似.

### 2.3 最小路/割集向量

二态网络可靠性评估的一般方法是使用最小路(minimal path, MP)集或最小割(minimal cut, MC)集. 最小路集是连接源节点和汇节点的最小组件集<sup>[20]</sup>. 若最小路集包含的全部组件都正常工作则网络成功运行. 例如, 图3网络中有4个MP:  $MP_1 = \{a_1, a_2\}$ ;  $MP_2 = \{a_5, a_6\}$ ;  $MP_3 = \{a_1, a_3, a_6\}$ ;  $MP_4 = \{a_2, a_4, a_5\}$ .

二态网络的最小割集是指在网络中存在的最小组件集合, 当该集合中的全部组件同时发生故障或失效时, 网络将无法继续正常运行或导致网络瘫痪<sup>[20]</sup>. 例如, 图3中包含4个MC:

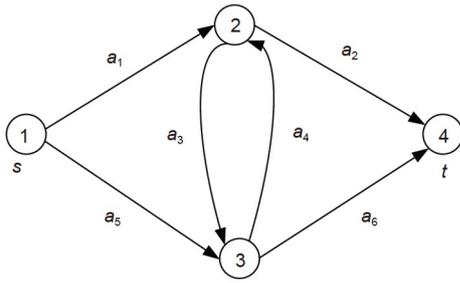


图3 两端桥连网络<sup>[18]</sup>  
Figure 3 Two-terminal bridge network [18].

表1 示例网络组件状态分布  
Table 1 State distribution of components in example network

状态	0	1	2	3
$a_1$	0.05	0.10	0.25	0.60
$a_2$	0.10	0.30	0.60	-
$a_3$	0.10	0.90	-	-
$a_4$	0.10	0.90	-	-
$a_5$	0.10	0.90	-	-
$a_6$	0.10	0.30	0.60	-

$MC_1 = \{a_1, a_5\}; MC_2 = \{a_2, a_6\};$   
 $MC_3 = \{a_1, a_4, a_6\}; MC_4 = \{a_2, a_3, a_5\}.$

多状态网络的可靠性评估可以基于最小路(割)向量来进行.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示组件的状态向量, 其中组件*i*处于状态 $x_i$ . 组件状态向量 $\mathbf{x}$ 为满足系统需求*d*的最小路向量的前提是: 若 $\phi(\mathbf{x}) \geq d$ 且对于任何 $\mathbf{y} < \mathbf{x}$ 有 $\phi(\mathbf{y}) < d$ ,  $\phi(\cdot)$ 是系统结构函数, 其中 $\mathbf{y} < \mathbf{x}$ 意味着对于所有*i*来说都有 $y_i \leq x_i$ , 且至少存在一个组件*k*, 有 $y_k < x_k$ . 此最小路向量也被称为*d*-MP. 例如, 对于图3中的网络, 当需求*d* = 3时有以下3个*d*-MP:

$3-MP_1 = (3, 2, 1, 0, 0, 1); 3-MP_2 = (2, 2, 0, 0, 1, 1);$   
 $3-MP_3 = (2, 1, 1, 0, 1, 2).$

多状态网络中组件状态向量 $\mathbf{x}$ 为系统需求*d*的最小割向量满足: 若 $\phi(\mathbf{x}) < d$ , 并且对于任何 $\mathbf{y} > \mathbf{x}$ 都有 $\phi(\mathbf{y}) \geq d$ , 其中 $\mathbf{y} > \mathbf{x}$ 意味着对于所有*i*来说都有 $y_i \geq x_i$ , 且至少存在一个组件*k*, 使得 $y_k > x_k$ . 这样的最小割向量也被称为*d*-MC.

## 2.4 结构函数

“结构函数”用来识别组件状态和系统状态之间的映射关系. 令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示组件状态向量, 其中组件*i*处于状态 $x_i$ .  $\phi(\mathbf{x})$ 表示系统状态为组件状态的函数. 设 $MC_1, MC_2, \dots, MC_q$ 为两端网络中所有最小割集的集合, 多状态网络的结构函数 $\phi(\mathbf{x})$ 定义为<sup>[20]</sup>

$$\phi(\mathbf{x}) = \min(|MC_1|, |MC_2|, \dots, |MC_q|), \quad (1)$$

其中,  $|MC_i|$ 是包含在这个最小割集中全部组件的状态之和. 例如, 令 $c_1, c_2, \dots, c_6$ 分别表示图3网络中6个组件的运行状态, 则该网络的结构函数如下:

$$\phi(\mathbf{x}) = \min(c_1 + c_5, c_2 + c_6, c_1 + c_4 + c_6, c_2 + c_3 + c_5). \quad (2)$$

假设 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 分别为3, 2, 1, 0, 0, 1, 则网络状态如下:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \min(c_1 + c_5, c_2 + c_6, c_1 + c_4 + c_6, c_2 + c_3 + c_5) \\ &= \min(3 + 0, 2 + 1, 3 + 0 + 1, 2 + 1 + 0) \\ &= \min(3, 3, 4, 3) = 3. \end{aligned}$$

在已知结构函数和需求*d*的情况下, 多状态网络的可靠度为

$$\begin{aligned} \Pr[\phi(\mathbf{x}) \geq d] \\ = \Pr[\min(|MC_1|, |MC_2|, \dots, |MC_q|) \geq d]. \end{aligned} \quad (3)$$

这进一步使得

$$\begin{aligned} \Pr[\phi(\mathbf{x}) \geq d] \\ = \Pr(|MC_1| \geq d, |MC_2| \geq d, \dots, |MC_q| \geq d). \end{aligned} \quad (4)$$

图3中多状态网络对于需求*d*的可靠性如下:

$$\begin{aligned} \Pr[\phi(\mathbf{x}) \geq d] &= \Pr(c_1 + c_5 \geq d, c_2 + c_6 \geq d, \\ & c_1 + c_4 + c_6 \geq d, c_2 + c_3 + c_5 \geq d). \end{aligned} \quad (5)$$

## 2.5 复杂度分析

### 2.5.1 复杂度分类

算法效率分析一般存在两个标准, 即时间复杂度和空间复杂度. 时间复杂度往往比空间复杂度更受重视, 因为其主要评估算法的计算时间增长率与问题规模的关系. 本文讨论复杂度时, 主要指时间复杂度.

根据现有最佳算法的时间复杂度总结如下几类问题: P问题(polynomial time problem, 所有能基于多项式

时间算法求解得到结果的问题, 多项式时间算法是指计算时间增长率为问题规模的多项式函数的算法)、NP问题(non-deterministic polynomial time problem, 所有不能确定能否在多项式时间内求得问题的解, 但是能使用多项式时间算法验证解是否正确的问题)、NP-完全问题(NP-complete problem, 若一个问题是NP问题且所有其他NP问题都可以使用多项式时间算法归约到它, 则该问题是NP-完全问题)和NP-难问题(NP-hard problem, 所有NP问题都可以使用多项式时间算法归约到某个问题, 则称该问题为NP-难问题, 且未规定该问题必须为NP问题, 所以NP-完全问题包含在NP-难问题中)<sup>[21]</sup>. 网络可靠性评估本质上是一个计数问题<sup>[14]</sup>. 类似于NP问题的计数问题被称为#P问题(#P problem), 但#P问题与NP问题有所不同, 因为它关注的是解的数量, 而不仅仅是解的正确性验证. NP-完全问题的计数版本被称为#P-完全问题(#P-complete problem). 上述问题之间的关系如图4所示.

二态网络可靠性评估是一个NP-难问题<sup>[14]</sup>, 由于多状态网络是二态网络的推广, 多状态网络的可靠性评估也是一个NP-难问题, 所以为实用网络开发更有效的算法的研究至关重要. 许多研究都提出了有效的算法来评估多状态网络的精确可靠度.

### 2.5.2 算法复杂度分析

算法是用于解决问题的计算机化程序, 其研究的主要目的是设计程序使问题能够用较少的计算资源得到解决. 衡量与比较算法效率的一个直观方法是在具有不同规模(组件数量)和结构的真实网络上测试其性能. 通常使用以下标准衡量: CPU时间、算术运算的数

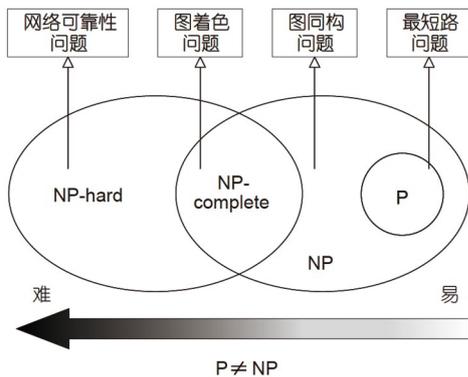


图4 各类问题集的欧拉图及举例  
Figure 4 Euler diagrams and examples for each type of problem set.

量和递归调用的数量. 虽然结果可能会因实例的不同而有所偏差, 但分析算法效率时其仍然有效.

另一种方法是对算法的复杂性进行数学分析, 通常使用时间复杂度和空间复杂度来分别衡量CPU时间和内存. 这两种复杂度都可以表示为问题的一个或几个参数的函数, 如组件的数量、每个组件的状态数量或MP的数量. 基于时间复杂度和空间复杂度对二者随着问题参数的增加而增长的速率进行讨论, 数学符号 $O$ 用来表示算法复杂性的增长率, 其描述了问题参数增长率的渐进上界.

## 2.6 多状态网络可靠性基础

### 2.6.1 网络数据结构

在为网络可靠性分析开发高效的算法前, 需要考虑使用何种数据结构表示网络. 网络的数据结构被用来搜索所有的MP, 这是评估多状态网络可靠性的第一步, 它包含了所有组件及其相邻组件的信息. 一个网络由一组节点与无向或有向弧组成. 描述网络的一种数据结构是“邻接矩阵<sup>[22]</sup>”, 该矩阵表明每对节点间的直接关系, 若节点间没有直接连接, 邻接矩阵对应位置为0, 反之为1, 图3中网络的邻接矩阵如下.

节点	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	0	0	0

表示网络的另一种通用数据结构是“邻接表”或“链接列表<sup>[22]</sup>”. 邻接表中的对象为同一类对象, 对于表中的每个元素, 它包含列表中前一个元素的索引, 列表中下一个元素的索引与数据. 考虑图3中的网络,  $L(0) = (1, 2)$ 表示源节点有两个出链接 $c_1$ 和 $c_2$ ,  $L(1) = (3, 4)$ 表示边1指向一个具有两个出链接 $c_3$ 和 $c_4$ 的节点, 并用-1来表示汇节点, 该网络相对应的邻接表如下:

$$L = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (5, 6), (-1), (3, 4), (-1)\}.$$

当用作数据结构时, 邻接矩阵与邻接表互为替代方案. 令 $|V|$ 和 $|E|$ 分别表示节点与链接的数量. 邻接矩阵用来描述网络的优势包括<sup>[23]</sup>: 1) 邻接矩阵以矩阵形式展示节点间的连接关系, 易于理解与可视化, 每个节

点对应矩阵的一行和一系列, 矩阵元素表示节点之间的连接状态, 因此可以直观地了解节点间的关系; 2) 使用邻接矩阵可以在 $O(1)$ 时间内检查两个节点之间是否存在连接, 且为网络添加(删除)一条边也可以在 $O(1)$ 时间内完成; 3) 对于稠密图而言, 邻接矩阵的存储空间利用率高, 其所需存储空间为节点数量的平方 $O(|V|^2)$ , 可有效存储大型网络。

而邻接表具备的优势包括<sup>[23]</sup>: 1) 相对于邻接矩阵, 邻接表在存储稀疏图时更为节省空间, 邻接表使用链表或数组表示每个节点, 每个节点存储其直接邻居的信息, 不需要为不存在的连接分配额外的空间, 其所需存储空间为 $O(|E|)$ ; 2) 邻接表适用于各种图的表示, 包括有向图和无向图, 它可以轻松处理变化的网络结构, 因为每个节点只需存储其实际的邻居节点。

### 2.6.2 搜索算法

在多状态网络中搜索MP和 $d$ -MP类比为约束满足问题, 其目的是寻找满足若干约束的结果, 约束通常表示为数学方程式和不等式。搜索算法是解决约束满足问题的一类算法<sup>[24]</sup>, 主要包含两种策略, 即深度优先搜索和广度优先搜索。深度优先搜索(depth-first-search, DFS)从根节点开始, 尽可能地深入探索。广度优先搜索(breadth-first-search, BFS)从根节点开始, 在移动到下一级邻居前, 首先探索所有的邻居节点。令 $|V'|$ 和 $|E'|$ 分别表示搜索树中的节点数和链接数, 则深度优先搜索和宽度优先搜索都需要 $O(|V'|+|E'|)$ 的时间来遍历整个树结构<sup>[24]</sup>。另外, 存在多种启发式方法增强这两种策略, 回溯法与深度优先搜索结合可用于解决约束满足问题, 以实现逐步建立候选解的深度优先搜索机制, 并在确定候选解无效时, 立即放弃该部分候选解。

关于以上两种算法的优缺点及其适应场景如下: DFS占用存储空间较少, 且实现相对简单, 通常可以使用递归或堆栈数据结构来实现。然而, 针对存在环路的网络, 若不考虑避免重复访问机制, DFS可能会导致算法陷入死循环, 同时也并不保证能找到最短路径或最优解。当需要寻找网络的连通分量或MPs和遍历网络中所有节点时, DFS有一定的适用性。相对而言, BFS可以保证在无权网络中找到源节点到汇节点的最短路径, 且由于使用队列来存储节点, 每个节点只访问一

次, 因此不会陷入无限循环。但BFS需要存储每个节点以及与之相关联的边, 因此在处理大规模网络时可能会占用较多内存空间, 并且当网络的深度非常大时, BFS的搜索过程可能会变得非常缓慢。BFS适用于寻找源汇节点间的最短路径和辅助了解具有连通性的网络拓扑结构。

## 3 多状态网络可靠度精确算法

1965年, Frank和Hakimi<sup>[25]</sup>在电力工程领域中最先提出随机流网络的可靠性问题, 并给出了一种基于最大流量理论<sup>[16]</sup>和特征函数的评估方法, 还指出其主要困难为计算问题, 尤其是组件状态分布为连续情况。随着实际网络规模和复杂度的不断增长, 多状态网络可靠度的求解问题日益凸显, 学者们开始专注于研究提高多状态网络可靠度求解效率的算法。

1972年的运筹学领域中, Doulliez和Jamoulle<sup>[26]</sup>研究了一个运输网络, 其中每个组件的性能被假定为独立的离散随机变量, 同时提出了一种基于分解原则的有效评估方法, 后续被正式称为状态空间分解(state space decomposition, SSD)方法, 并被改进用于大量多状态网络的可靠性评估方法中。

1975年, 从图论角度, Ford<sup>[27]</sup>正式提出了两端随机流网络问题, 并以 $K$ -Lattices的方式获得其可靠性, 而 $K$ -Lattices由每个MC集合逐一生成, 总数量随着MC的数量呈指数级增长, 同时还需要结合 $K$ -Lattices来获得不交的lattices以简化概率计算。

在可靠性工程领域, 早期关于多状态网络的研究主要在多态系统角度上讨论。20世纪70年代, El-Newehi等人<sup>[28]</sup>、Barlow与Wu<sup>[29]</sup>和Griffith<sup>[30]</sup>研究了包括结构功能、最小路/割向量和一致性在内的主要概念。正如Barlow与Wu所指出的, 随机流网络可以被看作是一个多态系统, 其中链路性能对应于组件状态, 在多态系统和随机流动网络间建立起了桥梁。因此, 多状态网络可靠性这一术语被正式引入。学者开始专注于开发有效的方法与算法, 以往研究大致可分为两类方法, 即直接法和间接法。

### 3.1 直接法

直接法将多状态网络结构和组件状态分布作为输入, 并直接评估其可靠度, 而不依赖于网络中的MP( $d$ -

MP)或MC( $d$ -MC). 其中, SSD方法由Doulliez和Jammouille<sup>[26]</sup>首次提出, 并由Alexopoulos<sup>[31]</sup>纠正了一些错误. 图5展示了SSD方法的示意图, 首先, 使用如Ford-Fulkerson流增广方法<sup>[27]</sup>等最大流算法寻找满足需求水平 $d$ 的组件状态向量, 该向量用于将状态空间分解为一组可接受的状态, 一组不可接受的状态, 以及不相交的未指定状态集. 随后, 每组未指定的状态被递归地分解, 直到不存在任何未指定的状态组, 该过程主要基于由最大流算法得到的不同的组件状态向量. 最后, 根据所有可接受状态集的概率之和计算可靠度. SSD方法经过不断改进, 已成为求解多状态网络可靠度的经典算法, 其优点在于简单直接, 并且在网络需求接近网络的最大流时的效率很高. 此外, 当精确评估需要花费太多计算精力时, 该方法可用于近似计算多状态网络可靠度但是此方法需执行状态分解的次数随着网络规模呈指数增长, 且每一次进行分解都需要执行最大流算法和等同于网络部件数目的分解, 耗时巨大. 此外, 为了保存一系列不确定状态集合也需要消耗很大的存储空间.

除SSD方法外, 还存在其他一些精确和实用的多状态网络可靠度直接算法. 例如, Rueger<sup>[32]</sup>提出了一种构建分支树来计算多状态网络可靠度的直接算法, 其中, 树节点为可靠性表达式中的不交项, 计算过程中不需要获取网络的MP或MC. Jane和Yuan<sup>[33]</sup>通过添加分支条件改进了该算法, 一定程度上(1%~36%)减少了算法的总CPU时间. 随后, Jane和Laih<sup>[34]</sup>提出了一种与

SSD方法相类似的状态空间分解直接算法, 并验证了所提出的方法与枚举法相比更为有效. Niu和Shao<sup>[35]</sup>考虑了一种计算网络两端可靠性的定界算法, 无需预先枚举所有的MP或MC, 可根据预定值 $\epsilon$ 提高近似质量, 该算法在运行完成时可以提供精确结果. 此外, Yeh<sup>[36]</sup>提出了一种计算全部需求水平下网络可靠性的直接多态二元加法树(BAT)算法, 并验证了其有效性. 尽管这些直接算法无需获取网络的MC或MP的先验信息, 但由于NP-难问题的特性, 无法简单地得出这些方法更加有效的结论.

### 3.2 间接法

20世纪90年代前, 直接法被认为是计算多状态网络可靠度最有效的方法<sup>[37]</sup>. 然而, 在1993年和1995年, Jane等人<sup>[34,38]</sup>指出, 多状态网络可靠度评估实际上可以用最小路集向量( $d$ -MP)或最小割集向量( $d$ -MC)间接求解. 因此, 给定网络配置和组件状态分布, 问题可以分两阶段解决: (1) 生成所有的 $d$ -MP或 $d$ -MC; (2) 通过计算组件状态向量大于(小于)或等于至少一个 $d$ -MP( $d$ -MC)向量的并集概率求得可靠度, 所以该方法也被称作间接法. 鉴于 $d$ -MP和 $d$ -MC对偶, 本文重点讨论使用搜索 $d$ -MP和使用 $d$ -MP评估联合概率的相关研究. 图6展示了使用 $d$ -MP的间接方法的框架. 同时, 关于使用 $d$ -MC的方法可参考文献<sup>[38~41]</sup>. 其中, Yeh等人<sup>[39]</sup>提出了一种生成 $d$ -MC的新方法, 通过添加额外属性来验证候选 $d$ -MC, 进一步提高了生成网络中所有 $d$ -MC

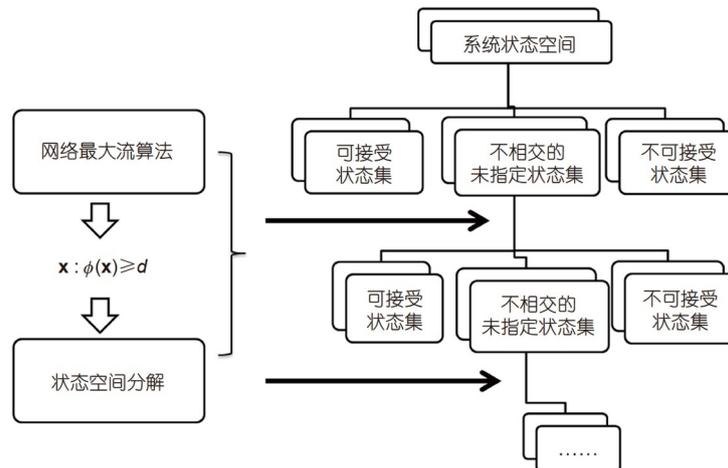


图5 评估多状态网络可靠性的SSD方法  
Figure 5 SSD method for evaluation of multi-state network reliability.

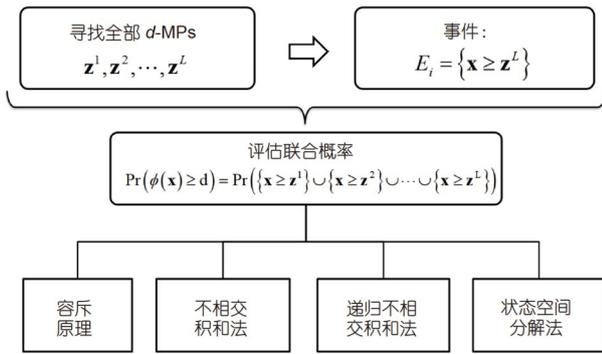


图6 评估多态网络可靠性的间接法

Figure 6 Indirect methods for evaluation of multi-state network reliability.

的效率. Niu等人<sup>[17]</sup>为了提高求解 $d$ -MC的效率, 提出了一种确定弧的最小容量的新方法, 给出了两个判断标准来检测重复的 $d$ -MC. 同时, 他们又开发了一种新技术用于确定真实 $d$ -MC, 并给出了一种新方法正确和有效地检测重复的 $d$ -MC, 该方法为重复 $d$ -MC的潜在原因提供了本质解释<sup>[40]</sup>. 同样在 $d$ -MC求解问题上, 给出了新的结果来改进该方法的解, 并提出了一种寻找 $d$ -MC的算法, 对该算法的时间复杂度进行了讨论, 与已有的方法进行比较, 验证了该算法的优越性<sup>[41]</sup>.

间接法的优点在于: (1) 借鉴基于MP或MC的二态网络可靠性评估经典算法思想, 将问题分解为两个求解阶段, 降低了算法复杂度; (2) 每个阶段都可以借鉴并利用已有的两状态网络可靠度求解算法, 有良好的继承性且易于实现; (3) 在求解一系列经典的多状态网络可靠度中, 该方法与直接法相比大大缩短计算时间. 此外, 当所求网络规模过于庞大, 无法获得可靠度精确解时, 还可通过计算部分 $d$ -MP或 $d$ -MC求解可靠度上下界.

### 3.2.1 搜索多状态网络最小路集向量

#### (1) 搜索单源单汇多状态网络最小路集向量

最小路集向量( $d$ -MP)在两状态网络的可靠性评估中起着重要作用. 单源单汇网络中只包含一个源点 $s$ 和一个汇点 $t$ , 如图3中的桥网络所示. 大部分搜索单源单汇网络中全部 $d$ -MP的研究主要以网络的MP作为先验, 所以事先获取网络中全部的MP主要包括以下三种类型的搜索算法: 基于符号表达的算法<sup>[18,42]</sup>, 基于增广的算法<sup>[43,44]</sup>, 和基于直接搜索的算法<sup>[19,45-47]</sup>. 基于符号表

达的算法将路集表示为符号形式, 并基于布尔代数或其他代数运算符生成MP. 基于通用生成函数法(universal generating function method, UGFM), Yeh<sup>[18]</sup>定义了一个广义的组合算子来寻找所有的MP. Rai和Aggarwal<sup>[42]</sup>提出了一种基于符号表达式的算法, 使用路集多项式和布尔函数寻找所有的MP. 基于增广的搜索算法是一种用于搜索MP的启发式算法, 从原始网络的节点开始, 然后陆续添加链接直至产生新的MP, 当所有的链接都被包括在内时即找到了全部MP. 基于增广的搜索算法由Al-Ghanim<sup>[43]</sup>首先提出. Yeh<sup>[44]</sup>进一步改进了其算法, 消除了产生重复MP的机会. 基于直接搜索的算法实现了DFS机制来寻找所有MP, 同时使用简单的数据结构, 如邻接矩阵和邻接表来表示网络. 基于图论与对偶原理, Shen<sup>[45]</sup>提出了一种DFS算法, 使用邻接矩阵搜索所有的MP, Kobayashi和Yamamoto<sup>[46]</sup>进一步改进了Shen的算法, 加入了基于节点水平集的额外过程. Colbourn<sup>[19]</sup>提出了一种DFS算法, 其时间复杂度为 $O(|E| \cdot \pi)$ , 其中 $|E|$ 表示链接的数量,  $\pi$ 表示MP的总数量. Chen和Lin<sup>[47]</sup>提出了另一种基于直接搜索的算法, 在回溯概念的基础上搜索所有MP. Bai等人<sup>[48]</sup>改进了该算法的效率: 1) 使用由节点索引的链路结构, 适用于有向、无向与混合形式的网络; 2) 加入了额外的回溯条件, 提出的算法随着网络规模的增长而变得更具优势. 同时, 他们进一步发现可以利用网络相对位置信息避免访问不必要节点, 改进了回溯条件, 降低了实现每次回溯的时间复杂度, 且提出了一种并行搜索机制, 加快了搜索速度<sup>[49]</sup>. 需要注意的是, 搜索网络中全部MC是一个NP-完全的问题, 但在现有的最佳算法下, 搜索所有的MP仍然是一个NP-难问题<sup>[37]</sup>. 然而, 从理论上讲, 这是一个还没有被证明的开放性问题.

鉴于已经被搜索到的全部MP, Lin等人<sup>[50]</sup>提出了一个基于MP的公式, 其包含三个约束条件, 使用隐式枚举法获得候选 $d$ -MP, 这些约束条件分别是: 1) 所有MP上的流量之和等于 $d$ ; 2) 每个MP上的总流量小于或等于该MP的最大容量, 即该MP中包含所有组件的最大容量的最小值; 3) 通过每个组件的总流量小于或等于其最大容量. 在生成候选 $d$ -MP后, 每个候选 $d$ -MP通过递归比较进行验证, 并获得某 $d$ 值下的所有 $d$ -MP. Lin<sup>[51]</sup>进一步证明, 第二个约束是多余的, 所以将约束减少到2个. 对于存在环路的网络, Yeh<sup>[52]</sup>进一步表明可以通过检测每个 $d$ -MP是否构成环路来去除不满足

条件的候选 $d$ -MP. 此外, 研究者们也提出了不需要事先获取网络中的MP就能生成全部 $d$ -MP的有效算法. Ramirez-Marquez等人<sup>[53]</sup>提出了一种不依赖于MP的先验来获得 $d$ -MP的算法, 并使用信息共享方法和网络简化技术减少了所需分析的向量数量. Yeh<sup>[54]</sup>提出了一种新的网络可靠性分析方法, 它基于 $d$ -MP的性质来搜索所有 $d$ -MP, 而不需要所有MP的先验, 且该方法容易理解和实现. Niu等人<sup>[55]</sup>针对现有大部分 $d$ -MP算法都采用简单而低效的隐式枚举法这一问题, 通过研究 $d$ -MP和可行环之间的关系, 提出了一种结合传统最大流算法和划分技术来寻找网络中全部 $d$ -MP的独特算法. 虽然这些方法省略了枚举网络中全部MP的步骤, 但由于NP-难问题的性质, 不能简单证明此类算法的效率一定更优.

以上研究每次只关注一个特定的需求 $d$ 值, 然而, 当在设计阶段或运行阶段评估多状态网络的可靠性时, 人们往往对系统的可靠性与每个系统的性能水平感兴趣, 以便获得系统能力的完整情况. 对于 $d$ -MP方法来说, 这需要生成所有需求等级的 $d$ -MP. Bai等人<sup>[56]</sup>提出了一种基于广度优先搜索的递归算法, 通过将所有预先得到的 $(d-1)$ -MP与1-MP相加来生成 $d$ -MP候选, 进而生成面向全部 $d$ 值的所有 $d$ -MP, 该算法是第一个描述所有可能的 $d$ 值的递归算法, 也是第一个使用隐枚举机制来描述枚举 $d$ -MP的实际过程, 且可以用来搜索特定 $d$ 级的 $d$ -MP. 研究者也提出了不使用MP而生成 $d$ -MP的方法. Yeh<sup>[57]</sup>提出了一个带有3个约束条件的基于组件的公式, 可实现面向全部 $d$ 值而使用隐枚举法获得所有候选 $d$ -MP.

然而, 上述 $d$ -MP生成算法在执行过程中都会产生大量的重复 $d$ -MP候选项, 这是影响算法效率的重要因素. 因此, 研究者们针对 $d$ -MP重复机制与去重算法也开展了讨论. 例如, Forghani-elahabad等人<sup>[58]</sup>基于常规(非矢量化)算法提出了一种矢量化 $d$ -MP生成算法, 使用了不产生重复 $d$ -MP候选项的技术, 通过矢量化提高了算法的实际效率. Yeh和Zuo<sup>[59]</sup>提出了一种基于 $(d+1)$ -MP和1-MP相减生成 $d$ -MP的新算法, 然后检测并去除了重复的 $d$ -MP, 提供了算法时间复杂度分析, 比较了提出的基于减法的算法与基于加法的算法的性能. Chen等人<sup>[60]</sup>基于Bai等人<sup>[56]</sup>的算法提出了一种改进的 $d$ -MP免重复生成算法, 他们发现重复 $d$ -MP候选项的生成与网络节点度相关, 但并没有从理论上证明

它们之间的关系. 因此, Bai等人<sup>[61,62]</sup>基于该研究进一步分析了叠加算法中产生重复 $d$ -MP候选项的机制, 通过严谨的数学证明指出, 当且仅当网络中存在如图7所示的两类节点时(虚线框内的 $v_i'$ ,  $v_x$ 和 $v_j$ 可以被等效为一个虚拟节点 $v_i$ ), 在算法搜索 $d$ -MP时必然会产生 $d$ -MP重复项, 进而提出了一个面向全部需求 $d$ 的 $d$ -MP免重搜索算法, 分析了算法复杂度, 并通过效率对比实验, 验证了算法的正确性和有效性, 且随着网络规模增大, 该算法优势越来越明显.

(2) 搜索多源或多汇多状态网络最小路集向量

在很多实际网络中, 常常包含多个源点或汇点<sup>[63]</sup>. 若不要求源点和汇点一一对应, 只存在所有的汇点接收到的流量都满足指定需求的约束, 那么这样的包含多源或多汇多状态网络只需经过适当的变形就可以转化为单源单汇网络. 例如, Bai等人<sup>[48]</sup>提出了在单源多汇网络、多源单汇网络以及多源多汇网络中获取每个源-汇节点对间的所有MP的搜索算法, 过程中主要利用网络变换技术(添加虚拟节点和虚拟链路)将以上网络变换为两端多状态网络, 然后再搜索每个源-汇节点对间的所有MP. 但是很多实际的多源多汇多状态网络要求源点和汇点一一对应. 针对这种情况, Lin<sup>[64]</sup>将搜索单源单汇多状态网络 $d$ -MP的约束条件进行了扩展, 提出了基于MP搜索多源多汇多状态网络 $d$ -MP的约束条件和相应的算法. 一旦获得了所有 $d$ -MP, 可以采用已有的基于 $d$ -MP的可靠度求解算法进行计算. 但是, 由于每个源-汇节点对的MP并不相同, Lin<sup>[64]</sup>的算法需要搜索的MP数量会随着源-汇节点对的增多大幅增加, 导致搜索 $d$ -MP的复杂度陡增.

然而, Lin<sup>[64]</sup>只考虑了网络中需求同步的情况, 即每对源-汇节点都存在一个吞吐量的需求, 且网络必须同时满足所有节点对的需求. 然而实际的多源多汇多状态网络中还存在需求异步的情况, 即每个源-汇节点对都存在一个吞吐量的需求, 但是这些需求都是不同时发生的, 在时间上没有重叠. 例如在一些物流供应

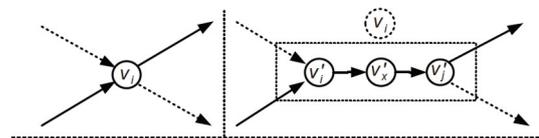


图7 生成 $d$ -MP重复项的两类节点  
Figure 7 Two types of nodes that generate duplicate  $d$ -MPs.

链网络中, 每一对源点汇点的物流需求和运输发生在不同的时段<sup>[65]</sup>.

### 3.2.2 基于 $d$ -MP或 $d$ -MC评估多状态网络可靠性

鉴于已经搜索出全部 $d$ -MP ( $d$ -MC), 问题就变成如何评估这些向量的并集概率. 例如, 给定所有 $L$ 个 $d$ -MP作为先验, 表示为 $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \dots, \mathbf{z}^L$ , 则多状态网络可靠性可以表示为

$$\begin{aligned} & \Pr(\phi(\mathbf{x}) \geq d) \\ &= \Pr(\{\mathbf{x} \geq \mathbf{z}^1\} \cup \{\mathbf{x} \geq \mathbf{z}^2\} \cup \dots \cup \{\mathbf{x} \geq \mathbf{z}^L\}), \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{x}$ 是组件状态向量,  $\phi(\cdot)$ 是系统结构函数.

Hudson和Kapur<sup>[66,67]</sup>、Yeh<sup>[68]</sup>等提出了使用容斥(inclusion-exclusion, IE)原理与不交和(sum of disjoint products, SDP)原理来评估给定所有 $d$ -MP的并集概率的方法.

IE方法通过Bonferroni不等式连续计算事件联合概率的上、下界, 不断包含和排除所有项, 最终收敛至准确概率值. 设 $E_j$ 为组件状态向量大于或等于 $d$ -MP的事件, 即 $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{z}^j\}$ ,  $S_k$ 代表组件状态向量大于或等于任意 $k$ 个 $d$ -MP的概率之和, 其可以表示为

$$S_k = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq L} \Pr(E_{j_1} \cap E_{j_2} \cap \dots \cap E_{j_k}). \quad (7)$$

然后, 可靠性计算如下:

$$\Pr(\phi(\mathbf{x}) \geq d) = \sum_{k=1}^L (-1)^{k-1} S_k. \quad (8)$$

SDP方法应用概率加法评估事件的联合概率. 设 $E_j$ 为组件状态向量大于或等于 $d$ -MP的事件, 即 $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{z}^j\}$ . 多状态网络对系统需求水平 $d$ 的可靠性计算如下:

$$\begin{aligned} \Pr(\phi(\mathbf{x}) \geq d) &= \Pr(E_1) + \Pr(\bar{E}_1 E_2) + \Pr(\bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3) \\ &+ \dots + \Pr(\bar{E}_1 \dots \bar{E}_{L-1} E_L). \end{aligned} \quad (9)$$

IE方法中项的符号在正负间变化, 负号是由于在前面的包含运算中出现了重复计算. 另一方面, 在SDP方法中, 所有项的符号都为正. 这两种方法都需要评估 $2^L - 1$ 个项来获得最坏情况下的可靠性, 其中 $L$ 是 $d$ -MP的数量. 对于IE方法和SDP方法来说, 评估多状态网络可靠性的复杂性随着 $d$ -MP数量的增加而呈指数级增长.

然而, IE和SDP方法并不系统且效率不高. Aven<sup>[10]</sup>

提出了一种基于SSD方法的算法, 该算法提供了一种系统的方法来评估几乎不考虑 $d$ -MPs数量的并集概率, 除了在 $d$ -MPs数量远小于组件的数量的情况下, 该方法被证明比IE方法更有效, 这种情况在现实世界的网络系统中存在较少. 针对最小路集(割集)向量的多状态网络可靠度精确求解算法, 通过详细对比分析, Bai等人<sup>[69]</sup>在详细研究SSD方法的基础上, 基于 $d$ -MPs改进SSD方法对多状态网络进行精确的可靠性评估, 提出了一种改进的启发式规则, 选择合适的 $d$ -MP用以分解每组未指定的状态, 所提出的算法比使用SSD方法的现有算法更有效. 针对基于状态空间分解原理求解多状态网络可靠性的问题, Bai等人<sup>[70]</sup>发现每个未指定状态的分解过程相互独立, 具有并行运算的基础, 所以提出了一种并行机制, 并将其引入到SSD方法中, 然后在选择合适的 $d$ -MP时提出了4种启发式算法.

基于SDP原理, Zuo等人<sup>[71]</sup>提出了一种递归方法, 称为递归不相交积和(recursive sum of disjoint product, RSDP)方法, 用于给所有 $d$ -MPs的并集概率评估. 研究发现, 当网络组件数量不太少时, RSDP<sup>[71]</sup>比文献<sup>[10]</sup>中的算法更有效. Yeh<sup>[72]</sup>在RSDP方法的基础上提出了另一种方法, 即改进的不相交积和(improved sum-of-disjoint product, iSDP)方法, 通过加入额外简化程序来减少乘法和求和的数量, 据称比文献<sup>[71]</sup>中的RSDP方法更有效. 受二态网络可靠性评估中MP排序启发, Bai等人<sup>[73]</sup>发现 $d$ -MP的不同排序也会影响RSDP的效率, 所以利用提出的 $d$ -MP长度定义, 开发了四种排序启发式方法, 在将 $d$ -MP送入RSDP前对其进行排序, 从而提高了RSDP的可靠性评估效率.

间接法的两个阶段都涉及一个或两个NP-难问题. 第一阶段, 基于路的方法要求给出所有的最小路(MP), 并以MP为变量进行隐式/显式枚举以找到所有的 $d$ -MPs, 其中, 寻找两端网络的所有MP是NP-难的<sup>[14]</sup>. 对于寻找所有的 $d$ -MC, 已知方法都是基于隐式/显式列举, 给定所有最小割(MC), 寻找两端网络的所有MC是NP-完全的(当一个问题既是NP又是NP-难的时候, 它就是NP-完全的)<sup>[14]</sup>. 上述子问题都是NP-难的原因是组合爆炸, 即MP/MC的数量和 $d$ -MP/ $d$ -MC的数量都随着网络的大小呈指数增长. 对于第二阶段, 已知方法仍是NP-难问题<sup>[74]</sup>. IE, SDP和RSDP方法评估的项数量在 $d$ -MP/ $d$ -MC的规模中呈指数级增长, 而 $d$ -MP/ $d$ -MC的数量在网络的规模中也呈指数级增长, SSD方法的分

解调用次数随网络规模增大呈指数级增长。

决策图法也可用于多状态网络的可靠性评估<sup>[75,76]</sup>。潘竹生等人<sup>[77]</sup>为寻找新的高性能启发式排序,从分析基于边界集的BDD模型构建的动态过程入手,提出排序起点选择方法和BDD模型宽度小优先的排序策略。实验表明,新提出的启发式排序可提升基于BDD的网络可靠性分析方法的性能。Shrestha等人<sup>[78]</sup>提出了两种方法来实现多态多值决策图(MMDD),用于多状态网络的可靠性评估。第一种方法是在给定所有 $d$ -MP的情况下生成MMDD,然后评估其可靠性。第二种方法是直接从多状态网络中生成MMDD,然后评估其可靠性。因此,将MMDD的性能与以上评估多态网络可靠性的方法进行比较具有重要意义。

#### 4 多状态网络可靠度近似算法

随着许多新成果的出现,多状态网络可靠度的精确计算变得更加有效。然而,这并没有改变其仍为NP-难问题的现实。对于具有大量组件和状态的复杂网络,要获得精确的系统可靠度和系统状态分布仍然十分困难,致使研究者考虑在网络规模相对较大时对其进行近似求解。现有两种多状态网络可靠度的近似方法,即可靠度边界技术和蒙特卡洛模拟技术,如图8所示。

##### 4.1 可靠度边界

一种可靠度的近似求解方法是可靠度边界技术,该技术可以通过较少的计算工作量提供近似的可靠度值。因此,决策者可以在计算工作量和可接受的精度间权衡。早期研究将二态背景下的网络可靠性边界扩展

到多状态背景下,如路-割边界和最大-最小边界<sup>[79,80]</sup>,更多最新的研究主要集中在扩展多状态网络可靠度评估的精确方法上。

##### (1) 直接法

对于直接法,首先,递归地执行SSD方法,直到效率低于指定水平,其次,再使用已经分解的可接受状态获得可靠性下界,用1减去已经分解的不可接受状态的总和获得可靠性上界。Jane和Laih<sup>[74]</sup>提出了一种基于SSD的动态边界算法,以获得多状态两端网络的边界,其中一个预先设定的临界值被用来对未指定的状态向量集进行分类,有概率大于临界值的非指定状态集被进一步分解。然后,可靠度下界(lower reliability bound, LRB)是那些被分解的可接受集的概率之和,可靠度上界(upper reliability bound, URB)是那些被分解的不可接受集的概率之和,如果预设的临界值较低,就可以得到一个更紧密的LRB或URB。针对可靠度的边界估计问题,为进一步弥补预设阈值所带来的问题,Liu等人<sup>[81]</sup>提出了一个基于状态空间广度优先分解的串行与并行结合的算法,通过实验对比分析表明,新算法能以较少的计算量提供较紧的可靠性边界并具有更强的稳定性。针对无人机集群信息交换网络(USIEN)可靠性建模与评估方法问题,Xu等人<sup>[82]</sup>通过考虑无人机信息交换能力,为USIEN建立了新的多状态网络模型,并提出了一种快速的SSD边界算法,用可靠度阈值 $\tau$ 来快速评估可靠度是否达到该阈值,效率研究表明,提出的算法为大型无人机集群提供了一个有效的可靠度近似值。

##### (2) 间接法

对于间接法,由于多状态网络可靠性是计算事件的并集概率,每个事件涉及一个 $d$ -MP/ $d$ -MC,如果只有一个 $d$ -MP/ $d$ -MC的子集可用,可以得到LRB/URB。存在两个阶段可以实现计算量与精度之间的权衡: 1) 不使用已知算法搜索所有的 $d$ -MP,而是开发一个新算法来搜索 $d$ -MP的子集; 2) 鉴于生成的所有 $d$ -MP,可以使用较少数量的 $d$ -MP来获得LRB。对于第一阶段,Sattitsatian和Kapur<sup>[83]</sup>开发了一种有效的算法来生成 $d$ -MP的子集,该算法背后的原理是使用二态最小割(MC)的子集来生成 $d$ -MP的子集,当使用更多MC时,可以生成更多 $d$ -MP进而改善LRB。Bai等人<sup>[56]</sup>提出的算法可以用来生成所有或某些 $d$ 值的 $d$ -MP子集,并给出一个MP子集。对于第二阶段,Hudson和Kapur<sup>[84]</sup>提出了一种使

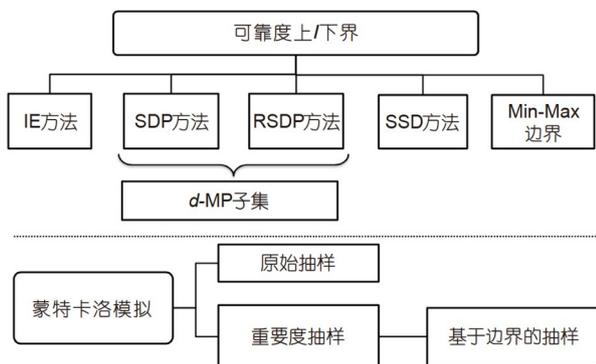


图8 多状态网络可靠度的近似算法  
Figure 8 Approximation algorithm for multi-state network reliability.

用多状态系统的 $d$ -MP/ $d$ -MC子集获得LRB/URB的方法. 以使用 $d$ -MP子集的LRB为例, 其思路是首先使用一个 $d$ -MP计算LRB, 然后, 其他 $d$ -MP被逐个计算, 最后生成的LRB是所有 $d$ -MP都已被计算后得到的确切可靠度, 这些边界总是在0和1之间且严格单调递增. 当网络的规模和组件的状态相对较大时, 用状态空间分解逼近可靠度边界是一种有效的权衡计算量和可接受的网络可靠度近似值的方法. 因此, Zhang等人<sup>[85]</sup>在Bai的算法<sup>[69]</sup>的基础上, 提出了一种基于SSD原理的改进间接边界算法, 给出了多状态网络的可靠度上下界序列. 然后开发具有预设阈值的启发式规则用于过滤掉概率较小的未指定状态集, 有助于快速获得紧界序列, 并将其并入算法中. Bai等人<sup>[86]</sup>发现将 $d$ -MP/ $d$ -MC输入该算法时的顺序会影响LRB/URB的紧密性, 所以提出了相应的启发式方法, 将 $d$ -MP/ $d$ -MC按适当的顺序排列以生成LRB/URB序列.

## 4.2 蒙特卡洛模拟

除了边界评估, 蒙特卡洛模拟提供了另外一种可靠度近似方法. Ramirez-Marquez和Coit<sup>[87]</sup>提出了一种标准的蒙特卡洛方法, 用于评估给定所有 $d$ -MC或 $d$ -MP的多状态网络可靠性. 首先, 生成给定组件状态分布的系统状态向量, 一旦得到一个向量, 就与 $d$ -MP进行比较, 以确定该向量的容量是否满足需求, 成功试验的数量除以总试验数为所评估的可靠度值.

尽管蒙特卡洛模拟可在合理的执行时间内产生较为准确的估计值, 而且容易实现, 但如果多状态网络可靠度很高或要求精度较高, 则会产生严重的计算开销, 且获得合理的抽样相对误差所需的试验数量非常大, 即使是小型网络也需要大量执行时间. Bulteau和Khadiri<sup>[88]</sup>提出了一种新的重要度抽样蒙特卡洛方法, 在模拟过程中使用SSD方法, 将给定子集的抽样转化为较小子集的抽样并递归执行, 直至不存在新的分解. 结果表明, 该方法的采样原理可以通过比传统方法更少的试验次数模拟得到概率较小的状态, 获得具有合理相对误差的可靠度估计值所需时间远小于获得精确解所需的时间, 且在评估高可靠度的网络时表现更好.

## 5 多状态网络韧性与评估方法

韧性(resilience, 也有学者称“弹性”)源于拉丁文

“resiliere”, 意为反弹, 迅速恢复. 韧性是可靠性的拓展与延伸, 是衡量系统对抗扰动并从中恢复的能力, 能够反映故障及恢复的全过程, 对系统设计、优化、崩溃或状态转移捕获等都有重要的指导意义. 将韧性作为评价指标纳入多状态网络的设计、建造、运行和维护中, 能够为复杂环境下多状态网络的优化设计和运维管理提供决策辅助和技术支持, 确保这类网络的稳定运行.

韧性度量是其韧性分析及求解的基础, 韧性度量方法可分为定性度量方法和定量度量方法. 其中定性度量方法通过设计一系列问题和指标来评判系统的韧性情况<sup>[89,90]</sup>. 定量度量方法是从系统性能随干扰、毁伤产生的变化出发, 通过数学模型量化系统的韧性过程, 以数值的形式表现系统的韧性<sup>[91]</sup>.

Bruneau等人<sup>[92]</sup>提出了经典的“韧性三角形”模型(如图9所示), 用于评估地区震后基础设施的韧性损失. 该模型采用确定性静态指标来衡量系统的韧性, 认为系统的性能下降和恢复是立即发生的, 并在一段时间后能够完全恢复到初始性能水平. 在此基础上, Zobel<sup>[93]</sup>提出一种“韧性预测三角形”, 将韧性指标计算的时间范围设定为足够长以使系统能够100%恢复. 但韧性三角形及预测三角形对中间过程的量化过于简单. 因此, Henry和Ramirez-Marquez<sup>[94]</sup>把系统的韧性过程分为初始、扰动、扰动完成、恢复、恢复完成五个阶段, 并提出一个以时间为变量的韧性指标. Tran等人<sup>[95]</sup>设计并整合从不同角度刻画系统韧性的参数, 并将该指标推广到多次独立的韧性过程. Bai等人<sup>[96]</sup>引入绝对时间尺度的韧性指标反映实际系统中毁伤时间和恢

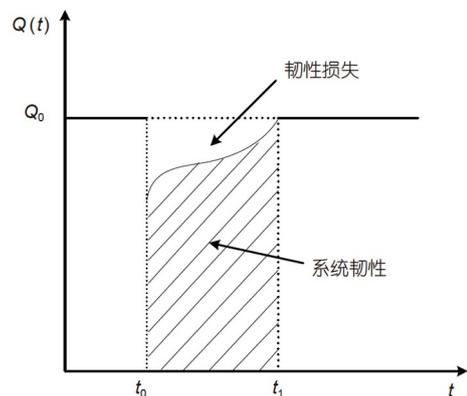


图9 韧性三角形  
Figure 9 Resilience triangle.

复时间对系统韧性的影响. 随后, 进一步就系统遭遇毁伤后能否满足任务执行的方面提出了一个与时间相关的韧性度量框架和指标<sup>[97]</sup>. 另外, 在以机械系统为对象的韧性建模与分析方面, Youn等人<sup>[98]</sup>针对具有韧性特征的复杂工程机械系统开发了一个韧性驱动系统设计框架, 并以简化的飞控作动系统设计问题为案例, 从而生成具有高韧性的飞控系统. Zhang等人<sup>[99]</sup>结合有限元模型和动态贝叶斯网络, 提出了一种考虑力学性能的机械结构通用韧性评估方法, 并采用受内波攻击的海底井口连接器对该方法进行说明. Cheng等人<sup>[100]</sup>基于执行联合侦察任务的无人机集群系统提出了面向任务的无人机群韧性度量方法, 并研究通讯距离对无人机集群通讯系统网络在不同毁伤模式下的韧性, 提出新的韧性度量指标<sup>[101]</sup>.

目前, 关于多状态网络韧性建模与评估方面的研究较少. Liu等人<sup>[102]</sup>针对多状态网络的韧性建模与评

估方法, 给出了与组件状态分布相关的多状态网络性能度量. 他们提出了一种基于半马尔可夫过程的韧性模型来描述组件状态分布的转移, 该过程作为马尔可夫过程的推广成为建模的良好选择, 原因是在半马尔可夫过程中, 任何状态的逗留时间分布都可以是任意的. 同时, 他们还提出了一种快速重复算法以提高多状态网络的韧性评估效率. 在此过程中, 他们将韧性定义为: 多状态网络正常运行时, 部分组件遭遇扰动导致网络性能水平下降后, 能够从中快速恢复, 并支撑其完成一定任务的能力. 并将多状态网络吸收扰动、从扰动中恢复以及维持在新状态的一系列过程称为网络的韧性过程. 他们认为网络组件的运行需要基于一定条件, 韧性过程中的扰动和恢复会造成这些条件的变化, 进一步影响组件性能, 因此, 构建了运行条件与网络组件运行状态概率分布的关系, 定义组件的条件运行概率矩阵为

$$C^i(t) = \begin{bmatrix} Pr\{A^i(t) = 0 \mid B_1^i(t)\} & Pr\{A^i(t) = 1 \mid B_1^i(t)\} & \dots & Pr\{A^i(t) = m_i \mid B_1^i(t)\} \\ Pr\{A^i(t) = 0 \mid B_2^i(t)\} & Pr\{A^i(t) = 1 \mid B_2^i(t)\} & \dots & Pr\{A^i(t) = m_i \mid B_2^i(t)\} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Pr\{A^i(t) = 0 \mid B_u^i(t)\} & Pr\{A^i(t) = 1 \mid B_u^i(t)\} & \dots & Pr\{A^i(t) = m_i \mid B_u^i(t)\} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中, 事件 $B_1^i(t)$ ,  $B_2^i(t)$ ,  $\dots$ ,  $B_u^i(t)$ 为组件运行条件,  $Pr\{A^i(t) = c_i \mid B_j^i(t)\}$ 为组件 $i$ 在 $t$ 时刻发生事件 $B_j^i$ 条件下流量处于状态 $c_i$ 的概率, 所以组件概率分布为

$$\mathbf{p}^i(t) = \mathbf{p}b^i(t) * \mathbf{C}^i(t). \quad (11)$$

基于组件状态分布模型, 提出了单次与多次扰动下的半马尔可夫组件韧性过程模型(如图10和11), 进而可计算得到任意时刻的多状态网络状态概率分布矩阵 $\mathbf{P}(t)$ . 如图10所示, 组件在韧性过程中经历5个阶段: 初始状态, 时刻 $T_d$ 扰动发生, 网络抵御并吸收扰动影响, 部件性能下降, 并在时刻 $T_p$ 达到最低性能, 在决策阶段后, 组件在 $T_s$ 开始恢复, 最后, 恢复在 $T_r$ 时刻完成, 多状态网络稳定运行.

同时, 考虑影响多状态网络性能的由最小路集向量 $d$ -MP组成的最小路集矩阵 $\mathbf{K}_d$ , 当网络遭受扰动导致网络拓扑或运行状态发生变化时, 网络的最小路集向量 $d$ -MP也随之改变, 进而影响最小路集矩阵 $\mathbf{K}_d$ , 所

以分别从扰动吸收、准备与决策及恢复三个阶段分析了多状态网络最小路集向量的变化过程, 给出了多状态网络韧性扰动阶段下最小路集矩阵的更新算法与恢复阶段下最小路集矩阵的重构算法.

在多状态网络韧性过程中, 往往需要韧性度量结果能及时提供给管理者与决策者, 并在扰动发生后迅速对恢复策略下的韧性提升效果进行评估, 给出优化结果以辅助决策. 多状态网络韧性的高效求解需要快速获取网络性能指标. 针对网络及组件状态不确定性情况, 其性能指标的基础是获取网络满足特定流量需求下的概率, 即任务成功率. 但任务成功率的求解时间会随着网络规模的增加呈指数增长. 本文第三节所介绍多状态网络可靠度求解算法可用于韧性过程中关键要素与性能指标的求解.

然而, 多状态网络在每次毁伤和恢复后组件状态分布发生转移时都需要重新计算任务成功率, 这极大限制了其韧性度量的求解效率. 因此, 探索更高效、准确的多状态网络韧性求解算法仍是需要努力的方

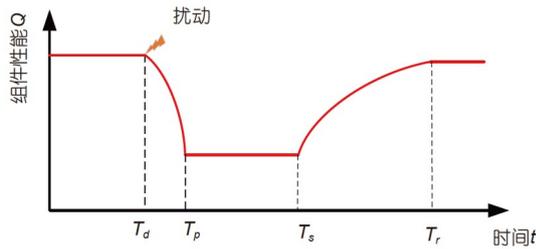


图 10 单次扰动下多状态网络组件韧性过程<sup>[102]</sup>  
Figure 10 Multi-state network component resilience process under single disturbance [102].

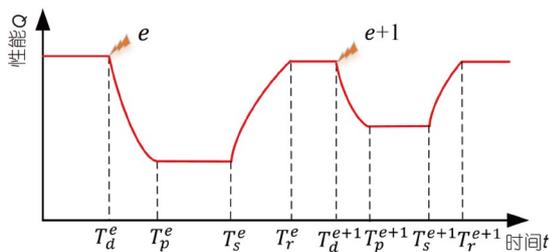


图 11 多次扰动下多状态网络组件韧性过程<sup>[102]</sup>  
Figure 11 Multi-state network component resilience process under multiple disturbances [102].

向。尽管在多状态网络方面引入韧性概念是一个重要进展，但目前针对其评估与求解上的研究成果较少，仍存在如复杂环境下多状态网络韧性度量方法、毁伤恢复机理、网络状态转移下的最小路集(割集)向量重构机理等诸多问题亟待解决。

## 6 结论

在二态网络可靠性评估背景下，通常假设网络系统中的组件只存在工作与失效两种状态。然而，许多现实世界的网络系统中，组件可处于不同的性能水平(状态)，通过允许组件和系统具有多状态性能水平，即建立多状态网络模型，能以比二态网络模型更准确与灵活的方式表征系统状况。

当前许多研究都提出了科学的指标与有效的算法来评估多状态网络可靠性与韧性。本文旨在提供关于此类问题的综述，包括对多状态网络可靠性与韧性的基本概念、建模方法和求解算法等方面的回顾。由于网络规模和复杂度的不断增长使多状态网络可靠度的求解变得十分困难，理论上多状态网络可靠度的求解是NP-难问题。因此，本文主要聚焦求解算法的效率改善研究，分别介绍了多状态网络可靠度求解的精确算法与近似算法，其中精确算法包括直接法和间接法，近似算法包括可靠度边界算法与蒙特卡洛模拟。同时，从韧性视角出发，阐述了多状态网络韧性及其评估方法。梳理了多状态网络可靠性与韧性求解效率提升的探索历程，关注专家学者对降低求解算法时间复杂度、提升可求解网络规模的相关研究。

需要注意的是，多状态网络可靠度间接算法的两个阶段都是NP-难问题。对于第一阶段，寻找全部 $d$ -MP和 $d$ -MC是NP-难问题。对于第二阶段，现有算法也被证明是NP-难问题。然而，对于第二阶段，有可能存在多项式时间算法，该假设主要基于以下事实：在已知两端二态网络的全部MC后，确实存在评估其可靠性的多项式时间方法<sup>[103]</sup>。

此外，目前针对多状态网络韧性的研究主要以毁伤和恢复导致的网络性能和状态变化为基础，尚未考虑复杂环境下高动态、强随机等特点对多状态网络产生的影响。因此，如何在复杂环境下准确、快速地度量多状态网络的性能状态和韧性指标，即如何在时间开销最小的情况下求解多状态网络任务成功率，为管理者与决策者提供最及时的决策辅助，是当前多状态网络研究领域迫切需要解决的难点问题。

本文的最终目的是为多状态网络的优化与维护提供工具与理论支撑，确保网络的可靠、稳定运行，利于形成完善与全面的多状态网络可靠性与韧性思想。其中所涉及的全部方法与算法，使得需要反复评估多状态网络可靠性与韧性的优化设计与维护变得更加可行，具有重要的现实意义和应用价值。

## 参考文献

- Andersson G, Donalek P, Farmer R, et al. Causes of the 2003 major grid blackouts in North America and Europe, and recommended means to improve system dynamic performance. *IEEE Trans Power Syst*, 2005, 20: 1922–1928
- Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, et al. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 2010, 464: 1025–1028

- 3 The 2012 India blackouts [Available from: <http://www.desismartgrid.com/2012/08/indian-power-grid-blackout-reasons-and-future-requirements/>.]
- 4 Aven T. Reliability evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE T Reliab*, 1985, 34: 473–479
- 5 Lisnianski A, Levitin G. *Multi-state System Reliability: Assessment, Optimization and Applications*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2003
- 6 Lin Y K, Chang P C. Evaluate the system reliability for a manufacturing network with reworking actions. *Reliability Eng Syst Saf*, 2012, 106: 127–137
- 7 Chang P C, Lin Y K. Reliability analysis for an apparel manufacturing system applying fuzzy multistate network. *Comput Industrial Eng*, 2015, 88: 458–469
- 8 Kou L, Qin Y, Jia L, et al. Multistate reliability evaluation of bogie on high speed railway vehicle based on the network flow theory. *Int J Soft Eng Knowl Eng*, 2018, 28: 431–451
- 9 Lin S, Jia L, Zhang H, et al. Reliability of high-speed electric multiple units in terms of the expanded multi-state flow network. *Reliability Eng Syst Saf*, 2022, 225: 108608
- 10 Aven T. Availability evaluation of oil/gas production and transportation systems. *Reliability Eng Syst Saf*, 1987, 18: 35–44
- 11 Lin Y K, Yeh C T. Maximal network reliability with optimal transmission line assignment for stochastic electric power networks via genetic algorithms. *Appl Soft Computing*, 2011, 11: 2714–2724
- 12 Lin Y K. System reliability evaluation for a multistate supply chain network with failure nodes using minimal paths. *IEEE Trans Rel*, 2009, 58: 34–40
- 13 Su Y. A petri net-based approach for evaluating the capability of equipment maintenance support network (in Chinese). Dissertation for Master's Degree. Changsha: National University of Defense Technology, 2012 [苏莹. 基于Petri网的装备维修保障网络能力评价. 硕士学位论文. 长沙: 国防科学技术大学, 2012]
- 14 Ball M O. Computational complexity of network reliability analysis: An overview. *IEEE Trans Rel*, 1986, 35: 230–239
- 15 Bai G. Efficient evaluation of multistate network reliability. Dissertation for Doctoral Degree. Edmonton: University of Alberta, 2016
- 16 Evans J R. Maximum flow in probabilistic graphs-the discrete case. *Networks*, 1976, 6: 161–183
- 17 Niu Y F, Gao Z Y, Lam W H K. Evaluating the reliability of a stochastic distribution network in terms of minimal cuts. *Transportation Res Part E Logistics Transportation Rev*, 2017, 100: 75–97
- 18 Yeh W C. A simple universal generating function method to search for all minimal paths in networks. *IEEE Trans Syst Man Cybern A*, 2009, 39: 1247–1254
- 19 Colbourn C J. *The Combinatorics of Network Reliability*. Oxford: Oxford University Press, 1987
- 20 Cao J H, Cheng K. *Introduction to Reliability Mathematics (in Chinese)*. Beijing: Higher Education Press, 2012 [曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论. 北京: 高等教育出版社, 2012]
- 21 Euler diagram for P, NP, NP-complete, and NP-hard set of problems. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/NP\\_\(complexity\)](https://en.wikipedia.org/wiki/NP_(complexity))
- 22 Tarjan R E. *Data Structures and Network Algorithms*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1983
- 23 Singh H, Sharma R. Role of adjacency matrix and adjacency list in graph theory. *Int J Comput Tech*, 2012, 3: 179–183
- 24 Cormen T H, Leiserson C E, Rivest R L, et al. *Introduction to 408 algorithms*. Cambridge: MIT Press, 2009
- 25 Frank H, Hakimi S. Probabilistic flows through a communication network. *IEEE Trans Circuit Theor*, 1965, 12: 413–414
- 26 Doulliez P, Jamoulle E. Transportation networks with random arc capacities. *Recherche Opérationnelle*, 1972, 6: 45–59
- 27 Ford L R, Fulkerson D R. *Flow in Networks*. Princeton: Princeton University Press, 1962
- 28 El-Newehi E, Proschan F, Sethuraman J. Multistate coherent systems. *J Appl Probability*, 1978, 15: 675–688
- 29 Barlow R E, Wu A S. Coherent systems with multi-state components. *Math Oper Res*, 1978, 3: 275–281
- 30 Griffith W S. Multistate reliability models. *J Appl Probability*, 1980, 17: 735–744
- 31 Alexopoulos C. A note on state-space decomposition methods for analyzing stochastic flow networks. *IEEE Trans Rel*, 1995, 44: 354–357
- 32 Rueger W J. Reliability analysis of networks with capacity-constraints and failures at branches and nodes. *IEEE Trans Rel*, 1986, 35: 523–528
- 33 Jane C C, Yuan J. A sum of disjoint products algorithm for reliability evaluation of flow networks. *Eur J Operational Res*, 2001, 131: 664–675
- 34 Jane C C, Lai H Y W. A practical algorithm for computing multi-state two-terminal reliability. *IEEE Trans Rel*, 2008, 57: 295–302
- 35 Niu Y, Shao F M. A practical bounding algorithm for computing two-terminal reliability based on decomposition technique. *Comput Math*

- Appl, 2011, 61: 2241–2246
- 36 Yeh W C. Novel direct algorithm for computing simultaneous all-level reliability of multistate flow networks. *Reliability Eng Syst Saf*, 2022, 225: 108623
- 37 Ball M O, Colbourn C J, Provan S J. Network reliability. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 1995, 7: 673–762
- 38 Jane C C, Lin J S, Yuan J. Reliability evaluation of a limited-flow network in terms of minimal cutsets. *IEEE Trans Rel*, 1993, 42: 354–361, 368
- 39 Yeh W C, Bae C, Huang C L. A new cut-based algorithm for the multi-state flow network reliability problem. *Reliability Eng Syst Saf*, 2015, 136: 1–7
- 40 Niu Y F, Gao Z Y, Lam W H K. A new efficient algorithm for finding all d-minimal cuts in multi-state networks. *Reliability Eng Syst Saf*, 2017, 166: 151–163
- 41 Niu Y F, Xu X Z. A new solution algorithm for the multistate minimal cut problem. *IEEE Trans Rel*, 2019, 69: 1064–1076
- 42 Rai S, Aggarwal K K. On complementation of pathsets and cutsets. *IEEE Trans Rel*, 1980, R-29: 139–140
- 43 Al-Ghanim A M. A heuristic technique for generating minimal path and cutsets of a general network. *Comput Industrial Eng*, 1999, 36: 45–55
- 44 Yeh W C. A simple heuristic algorithm for generating all minimal paths. *IEEE Trans Rel*, 2007, 56: 488–494
- 45 Shen Y. A new simple algorithm for enumerating all minimal paths and cuts of a graph. *MicroElectron Reliability*, 1995, 35: 973–976
- 46 Kobayashi K, Yamamoto H. A new algorithm in enumerating all minimal paths in a sparse network. *Reliability Eng Syst Saf*, 1999, 65: 11–15
- 47 Chen S G, Lin Y K. Search for all minimal paths in a general large flow network. *IEEE Trans Rel*, 2012, 61: 949–956
- 48 Bai G, Tian Z, Zuo M J. An improved algorithm for finding all minimal paths in a network. *Reliability Eng Syst Saf*, 2016, 150: 1–10
- 49 Zhou X, Bai G, Tao J, et al. An improved method to search all minimal paths in networks. *IEEE T Reliab*, 2023, doi: 10.1109/TR.2023.3234055
- 50 Lin J S, Jane C C, Yuan J. On reliability evaluation of a capacitated-flow network in terms of minimal pathsets. *Networks*, 1995, 25: 131–138
- 51 Lin Y K. A simple algorithm for reliability evaluation of a stochastic-flow network with node failure. *Comput Operations Res*, 2001, 28: 1277–1285
- 52 Yeh W C. A simple method to verify all d-minimal path candidates of a limited-flow network and its reliability. *Int J Adv Manuf Tech*, 2002, 20: 77–81
- 53 Ramirez-Marquez J E, Coit D W, Tortorella M. A generalized multistate-based path vector approach to multistate two-terminal reliability. *IIE Trans*, 2006, 38: 477–488
- 54 Yeh W C. A novel method for the network reliability in terms of capacitated-minimum-paths without knowing minimum-paths in advance. *J Operational Res Soc*, 2005, 56: 1235–1240
- 55 Niu Y F, Wan X Y, Xu X Z, et al. Finding all multi-state minimal paths of a multi-state flow network via feasible circulations. *Reliability Eng Syst Saf*, 2020, 204: 107188
- 56 Bai G, Zuo M J, Tian Z. Search for all d-MPs for all d levels in multistate two-terminal networks. *Reliability Eng Syst Saf*, 2015, 142: 300–309
- 57 Yeh W C. A novel method for the network reliability in terms of capacitated-minimum-paths without knowing minimum-paths in advance. *J Operational Res Soc*, 2005, 56: 1235–1240
- 58 Forghani-elahabad M, Franceschini E, Yeh W C. A simple vectorization algorithm to address the d-MP problem without generating duplicate candidates. In: *Proceedings of Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. Brazilian, 2021. 8: 1–7
- 59 Yeh W C, Zuo M J. A new subtraction-based algorithm for the d-MPs for all d problem. *IEEE Trans Rel*, 2019, 68: 999–1008
- 60 Chen X, Tao J, Bai G, et al. Search for d-mps without duplications in multistate two-terminal networks. In: *Proceedings of 2017 Second International Conference on Reliability Systems Engineering (ICRSE)*. IEEE, 2017. 1–7
- 61 Bai G, Xu B, Chen X, et al. Searching for d-MPs for all level d in multistate two-terminal networks without duplicates. *IEEE Trans Rel*, 2020, 70: 319–330
- 62 Xu B, Fang Y, Bai G, et al. Search for d-MPs without duplicates in two-terminal multistate networks based on MPs. *J Syst Eng Electron*, 2022, 33: 1332–1341
- 63 Clancy D P, Gross G, Wu F F. Probabilistic flows for reliability evaluation of multiarea power system interconnections. *Int J Electrical Power Energy Syst*, 1983, 5: 101–114
- 64 Lin Y K. Reliability evaluation for overall-terminal multistate flow networks with bi-directed arcs. *Expert Syst Appl*, 2010, 37: 6669–6674
- 65 Daly M S, Alexopoulos C. State-space partition techniques for multiterminal flows in stochastic networks. *Networks*, 2006, 48: 90–111
- 66 Hudson J C, Kapur K C. Reliability analysis for multistate systems with multistate components. *IIE Trans*, 1983, 33: 153–160

- 67 Hudson J C, Kapur K C. Modules in coherent multistate systems. *IEEE Trans Rel*, 1983, R-32: 183–185
- 68 Yeh W C. A greedy branch-and-bound inclusion-exclusion algorithm for calculating the exact multi-state network reliability. *IEEE Trans Rel*, 2008, 57: 88–93
- 69 Bai G, Tian Z, Zuo M J. Reliability evaluation of multistate networks: An improved algorithm using state-space decomposition and experimental comparison. *IIESE Trans*, 2018, 50: 407–418
- 70 Bai G, Liu T, Zhang Y, et al. An improved method for reliability evaluation of two-terminal multistate networks based on state space decomposition. *IEEE Trans Rel*, 2020, 70: 1084–1095
- 71 Zuo M J, Tian Z, Huang H Z. An efficient method for reliability evaluation of multistate networks given all minimal path vectors. *IIE Trans*, 2007, 39: 811–817
- 72 Yeh W C. An improved sum-of-disjoint-products technique for symbolic multi-state flow network reliability. *IEEE T Reliab*, 2015, 64: 1–9
- 73 Bai G, Zuo M J, Tian Z. Ordering heuristics for reliability evaluation of multistate networks. *IEEE Trans Rel*, 2015, 64: 1015–1023
- 74 Jane C C, Lai H Y W. A dynamic bounding algorithm for approximating multi-state two-terminal reliability. *Eur J Operational Res*, 2010, 205: 625–637
- 75 Xing L D, Dai Y S. A new decision-diagram-based method for efficient analysis on multistate systems. *IEEE Trans Dependable Secure Comput*, 2009, 6: 161–174
- 76 Shrestha A, Xing L D, Dai Y S. Decision diagram based methods and complexity analysis for multi-state systems. *IEEE Trans Rel*, 2010, 59: 145–161
- 77 Pan Z S, Li W B, Lin F L. A new heuristic ranking method for BDD network reliability analysis (in Chinese). *J Zhejiang Norm Univ (Nat Sci)*, 2022, 45: 378–387 [潘竹生, 李闻白, 林飞龙. 一种用于BDD网络可靠性分析的启发式排序新方法. *浙江师范大学学报(自然科学版)*, 2022, 45: 378–387]
- 78 Shrestha A, Xing L, Coit D W. An efficient multistate multivalued decision diagram-based approach for multistate system sensitivity analysis. *IEEE Trans Rel*, 2010, 59: 581–592
- 79 Block H W, Savits T H. A decomposition for multistate monotone systems. *J Appl Probability*, 1982, 19: 391–402
- 80 Butler D A. Bounding the reliability of multistate systems. *Operations Res*, 1982, 30: 530–544
- 81 Liu T, Bai G, Tao J, et al. An improved bounding algorithm for approximating multistate network reliability based on state-space decomposition method. *Reliability Eng Syst Saf*, 2021, 210: 107500
- 82 Xu B, Liu T, Bai G, et al. A multistate network approach for reliability evaluation of unmanned swarms by considering information exchange capacity. *Reliability Eng Syst Saf*, 2022, 219: 108221
- 83 Satitsatian S, Kapur K C. An algorithm for lower reliability bounds of multistate two-terminal networks. *IEEE Trans Rel*, 2006, 55: 199–206
- 84 Hudson J C, Kapur K C. Reliability bounds for multistate systems with multistate components. *Operations Res*, 1985, 33: 153–160
- 85 Zhang C, Liu T, Bai G. An improved algorithm for reliability bounds of multistate networks. *Commun Stat Theor Methods*, 2020, 49: 3772–3791
- 86 Bai G, Zuo M J, Tian Z. A heuristic for lower reliability bound evaluation of multistate networks. In: *Proceedings of IIE Annual Conference, Institute of Industrial and Systems Engineers (IIESE)*. Anaheim, California, USA, 2016
- 87 Ramirez-Marquez J E, Coit D W. A Monte-Carlo simulation approach for approximating multi-state two-terminal reliability. *Reliability Eng Syst Saf*, 2005, 87: 253–264
- 88 Bulteau S, El Khadiri M. A new importance sampling Monte Carlo method for a flow network reliability problem. *Naval Res Logistics*, 2002, 49: 204–228
- 89 Cutter S L, Barnes I, Berry M, et al. A place-based model for understanding community resilience to natural disasters. *Global Environ Chang*, 2008, 18: 598–606
- 90 Shirali G A, Mohammadfam I, Ebrahimipour V. A new method for quantitative assessment of resilience engineering by PCA and NT approach: A case study in a process industry. *Reliability Eng Syst Saf*, 2013, 119: 88–94
- 91 Li R Y, Du S J, Kang R. *Modeling and Metrics of Complex System Resilience* (in Chinese). Beijing: Chemical Industry Press, 2019 [李瑞莹, 杜时佳, 康锐. 复杂系统弹性建模与度量. 北京: 化学工业出版社, 2019]
- 92 Bruneau M, Chang S E, Eguchi R T, et al. A framework to quantitatively assess and enhance the seismic resilience of communities. *Earthquake Spectra*, 2003, 19: 733–752

- 93 Zobel C W. Representing perceived tradeoffs in defining disaster resilience. *Decision Support Syst*, 2011, 50: 394–403
- 94 Henry D, Emmanuel Ramirez-Marquez J. Generic metrics and quantitative approaches for system resilience as a function of time. *Reliability Eng Syst Saf*, 2012, 99: 114–122
- 95 Tran H T, Balchanos M, Domercant J C, et al. A framework for the quantitative assessment of performance-based system resilience. *Reliability Eng Syst Saf*, 2017, 158: 73–84
- 96 Cheng C, Bai G, Zhang Y, et al. Improved integrated metric for quantitative assessment of resilience. *Adv Mech Eng*, 2020, 12: 1687814020906065
- 97 Liu T, Bai G H, Tao J Y, et al. A mission-oriented resilience evaluation method for complex system (in Chinese). *J Syst Eng Electron*, 2021, 43: 1003–1011 [刘涛, 白光晗, 陶俊勇, 等. 面向任务的复杂系统韧性度量方法. *系统工程与电子技术*, 2021, 43: 1003–1011]
- 98 Youn B D, Hu C, Wang P. Resilience-driven system design of complex engineered systems. *J Mech Des*, 2011, 133: 101011
- 99 Zhang Y, Cai B, Liu Y, et al. Resilience assessment approach of mechanical structure combining finite element models and dynamic Bayesian networks. *Reliability Eng Syst Saf*, 2021, 216: 108043
- 100 Cheng C, Bai G, Zhang Y A, et al. Resilience evaluation for UAV swarm performing joint reconnaissance mission. *Chaos*, 2019, 29: 053132
- 101 Bai G, Li Y, Fang Y, et al. Network approach for resilience evaluation of a UAV swarm by considering communication limits. *Reliability Eng Syst Saf*, 2020, 193: 106602
- 102 Liu T, Bai G, Tao J, et al. Modeling and evaluation method for resilience analysis of multi-state networks. *Reliability Eng Syst Saf*, 2022, 226: 108663
- 103 Provan J S, Ball M O. Computing network reliability in time polynomial in the number of cuts. *Operations Res*, 1984, 32: 516–526

## Survey of multistate network reliability and resilience evaluation methods

BAI GuangHan<sup>1,2</sup>, ZHANG Shuai<sup>1,2</sup>, ZHANG YunAn<sup>1,2</sup>, FANG YiNing<sup>1,2</sup> & TAO JunYong<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> College of Intelligence Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

<sup>2</sup> Laboratory of Science and Technology on Integrated Logistics Support, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China

A network approach has been developed to accurately and efficiently study the ability of complex systems in maintaining reliable operations under various conditions. In several real-world network systems, the network must not only be connected but also function at a required performance level. This type of network is called a multistate network. Multistate network reliability models are widely applied to real-world network systems, such as energy, transportation, information, logistics, infrastructure networks, equipment support networks, command and control networks, and UAV swarm networks. However, the increasing complexity of modern networks makes ensuring multistate network reliability challenging. Thus, creating more efficient methods for solving network reliability is an urgent need. This paper reviews the reliability solving algorithms for multistate networks and summarizes the recent research related to their efficiency improvement. By reducing the complexity of multistate network reliability, the algorithmic efficiency and solvable network scale can be considerably improved. Furthermore, these improvements will provide support for managers in the design and maintenance of multistate networks. Resilience provides a new approach to network design and analysis, enhancing the ability of these systems to withstand unexpected threats and bounce back from disruptive events. This paper provides a detailed discussion of multistate network resilience evaluation methods and their progress.

**multistate networks, reliability, resilience, minimal path, minimal cut**

doi: [10.1360/SST-2023-0093](https://doi.org/10.1360/SST-2023-0093)